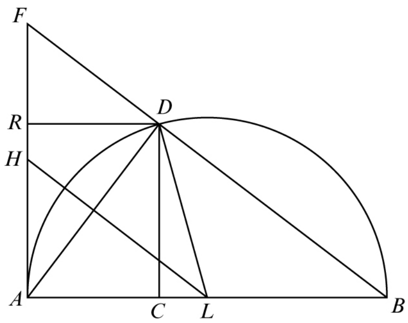
Zum 1. Teil (S. 424)
Zum Inhaltsverzeichnis

26. DE DUCTIBUS
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 229–232. 2 Bog. 2°. 8 S. — Figuren 1–3 nicht vorhanden (Vorlage die entsprechenden Figuren aus N. 21 u. N. 23). Im Laufe der Überarbeitung umfangreiche Änderungen des ursprünglichen Textes vor allem auf dem 1. Bogen (bis S. 448 Z. 11); Hinzufügung von Verweisen auf andere Sätze; substanzielle Ergänzungen (Sätze 4_2, 5_{2-3}, 6_{2-6}, 15, 16; der größte Teil der Abschnitte S. 437 Z. 11 bis S. 439 Z. 16; Fig. 5 nebst den zugehörigen Abschnitten S. 442 Z. 9 – S. 443 Z. 12).
Cc 2, Nr. 697

Datierungsgründe: Das vorliegende sowie das nächstfolgende Stück stützen sich insbesondere auf die Figuren 1–3 von N. 21 und N. 23; sie sind unmittelbare Folgestücke. Beide Studien nehmen wechselseitig aufeinander Bezug.

Catalogus propositionum, quibus ductus
curvilineorum ex circulo natorum, comparantur:



[*Fig. 1*]

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: BDA et DCA. $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.

sinus versus
diam. $\frown$ abscissa a vertice chorda arcus
$AB \quad AC \quad = \quad AD\,\square$.

15 *Fig. 1 erg. Hrsg. nach Text u. N. 21.*

P r o p. 1. Semicubus [diametri] aequatur summae quadratorum semiparabolae, seu duplo momento semiparabolae ex axe libratae.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC}. \quad \text{Ergo} \quad \underset{\text{diam.}}{AB} \frown \underset{\text{sin.}}{DC} = \underset{\text{chord.}}{AD} \frown \underset{\text{chorda complementi}}{DB}. \qquad \text{seu}$$

P r o p. 2. Parabola eiusdem altitudinis ac basi, ducta in se ipsam inverse, aequatur cylindro semicirculi sub diametro. Idem est de portionibus abscissis, quae aequantur cylindris semisegmentorum sub diametro.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{DC}. \quad \text{Ergo} \quad \underset{\text{chord.}}{AD} \frown \underset{\text{sin.}}{DC} = \underset{\text{chorda complem.}}{DB} \frown \underset{\text{sinus versus}}{AC}. \qquad \text{ergo}$$

P r o p. 3. Ductus semicirculi rectus in parabolam aequatur ductui trianguli inverso in eandem, seu momento parabolae ex vertice.

Sed si ductus sit semisegmenti in parabolam, aberit momentum ex vertice abscissae portionis parabolae, per rectam basi parallelam, a basi ipsa AC distantem. Ecce rem admirabilem: semisegmentorum ductus in parabolam q u a d r a r i posse, parabolae in parabolam non posse.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: DCA et BCD. $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{DC}{AC}$.

$$\underset{\text{chord.}}{AD} \frown \underset{\text{sinus vers. complem.}}{CB} = \underset{\text{chorda complem.}}{DB} \frown \underset{\text{sin.}}{DC}.$$ est quodammodo inversa prioris.

P r o p. 4. Momentum parabolae vel a vertice abscissae portionis ex basi aequari portioni parabolae eiusdem a vertice abscissae inverse, ductae in semisegmentum circuli eiusdem altitudinis.

Praecedens ductus semisegmenti in parabolam erat rectus, posterior est inversus, itemque ductus est q u a d r a b i l i s .

P r o p. 4. n u m. 2. $BC \frown AC = DC\,\square$. quadrata sinuum momentis ex vertice portionum diametri.

[$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia FBA et ABD.] $\dfrac{FB}{AB} = \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{FA}{AD}$. FB = secans falsa.

1 radii *L ändert Hrsg.* 10 Ductus *(1)* circuli vel semisegmenti | circularis *nicht gestr.* | inverso *(2)* semicirculi *L* 25 *(1)* P r o p. 4. n u m. 2: DB $\frown$ AC = AD $\frown$ BC. seu momentum chordarum supplementi ex basi *(2)* P r o p. 4. *L* 27 $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ... ABD. *erg. Hrsg.* 27 FB = *(1)* chorda compl. aucta tangente arcus dimidii *(2)* secans *L*

$$\text{Ergo}\quad \underset{}{FB} \frown \overset{\text{chord. compl.}}{DB} = \overset{\text{diam.}}{AB}\,\square. \quad \text{ergo}$$

P r o p. 5. Parabola vel portio, seu summa chordarum complem. ducta in se ipsam, seu summa quadratorum parabolae portionisve (quae quadrari potest), aucta eadem parabola, seu summa chordarum arcuum complementalium, in summam FD ducta, aequatur cubo diametri.

C o r o l l. Cumque quadrata applicatarum parabolae summari possint, si a cubo diametri subtrahantur, residuum erit ductus parabolae inversus in figuram omnium FD. Is ergo ductus poterit q u a d r a r i .

P r o p. 5. n u m 2. $FB \frown AD = AB \frown FA$. seu secantes falsae in chordas aequantur diametro in tangentes falsas seu c y l i n d r o c o n c h o e i d i s f a l s a e .

P r o p. 5. num 3. $AB \frown AD = DB \frown FA$. diameter in chordas, chordis supplementi in tangentes falsas, seu c y l i n d e r p a r a b o l i c u s aequatur ductui inverso parabolico in conchoeidem falsam.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia FDR et DCB. $\dfrac{FR}{DC} = \dfrac{FD}{DB} = \dfrac{AC = RD}{CB}$. Ergo

$$FD \frown \overset{\text{dist. a basi } B}{CB} = \overset{\text{chord. complem.}}{DB} \frown \overset{\text{dist. a basi } A}{AC}. \quad \text{seu}$$

P r o p. 6. Momenta FD ex basi (eiusve portionis a vertice abscissae), aequantur momentis figurae chordarum seu parabolae eiusve portionis a basi abscissae, itidem ex basi.

At haec quadrari possunt. Ergo illa quoque.

C o r o l l. 1. Habetur ergo m o m e n t u m f i g u r a e o m n i u m FD ex basi, quadrabile. Adde inf. prop. 8. coroll.

C o r o l l. 2. Ergo et solidum revolutione reductum ad cylindrum.

P r o p. 6. n u m. 2. $FR \frown DB = DC \frown FD$. seu [chorda supplementi in differentiam

5 summam *(1)* tangentium arcuum dimidiorum *(2)* FD *L* 8 in *(1)* figuram tangentium dimidiorum *(2)* figuram *L* 17 *Über* FD *gestr.:* tang. dim. *L* 22 f i g u r a e *(1)* tangentium dimidiorum tam ex vertice quam ex basi, quadratus *(2)* o m n i u m *L* 24 revolutione *(1)* conchoeidis falsae | contractae *erg.* |, sic enim appellare placet *(2)* | eius *gestr.* | reductum ad cylindrum. | Et | esse *erg.* | aequale *(a)* cylindro sec *(b)* conoeidi parabolico homogeneumque *(c)* conoeidi circulari. *gestr.* | *L* — *Dazu interlinear, gestr.:* Conchoeidem autem falsam voco, cum secans exit non ex centro, sed ex altera diametri extremitate, tangens autem ex una A. ut AH est[,] dat conchoeidem falsam contractam.
25–428,1 sinus in chordam semisupplementi, demto sinu in differentiam sui *L ändert Hrsg.*

sinus] a tangente falsa = sin. $\frown$ FD.

P r o p. 6. n u m. 3. $FR \frown CB = DC \frown AC$. seu momenta ex vertice differentiarum inter sinus et tangentes falsas = momentis sinuum ex una diametri extremitate seu vertice circuli, si quadrans non excedatur, seu momenta tangentium falsarum ex basi aequantur momentis sinuum, ex utraque extremitate, id est sinuum cylindro. Add. prop. 2. et coroll. prop. 7. ubi quae huic aequantur.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: FDR et FAB. Ergo $\dfrac{BF}{DF} = \dfrac{AB}{RD} = \dfrac{AF}{FR}$.

P r o p. 6. n u m 4. $BF \frown RD = DF \frown AB$ secantis falsae m o m e n t a a vertice circuli, seu suo quoque aequantur diametro in earum differentias a chordis supplementi, seu c y l i n d r o omnium FD.

Secans autem falsa BF componitur ex chorda supplementi BD et ipsa DF seu FD. Ergo cum momentum chordarum supplementi detur, ad q u a d r a t u r a m omnium FD opus erit eorum momento ex circuli vertice.

P r o p. 6. n u m 5. $BF \frown FR = DF \frown AF$. secans falsa in differentiam tangentis falsae a sinu = FD in tangentes falsas.

P r o p. 6. n u m 6. $AB \frown FR = RD \frown AF$. differentia inter tangentem falsam et sinum in diametrum, seu c y l i n d e r c o n c h o e i d i s f a l s a e, demto c y l i n d r o p o r t i o n i s c i r c u l a r i s, aequatur m o m e n t o t a n g e n t i u m f a l s a r u m e x v e r t i c e.

Hoc ergo momentum supponit tetragonismum. Adde prop. 7. et prop. 6. num. 2. nimirum cylinder portionis circularis est momentum tangentium falsarum ex basi.

Semper autem NB. duo momenta, alterum ex vertice, alterum ex basi constituunt cylindrum.

Dictum paulo ante, quod chord. $\frown$ sin. = chord. complem. $\frown$ sin. versus. Ergo

$$\text{sin} = \frac{\text{chord. complem.} \frown \text{sin. vers.}}{\text{chord.}}.$$

Ergo si applicatae semiparabolae basis altitudini aequalis, ex basi sumtae ducantur in rationes sinuum versorum ad applicatas eiusdem parabolae respondentes ex vertice sumtas

3 falsas = *(1)* cylindro sinuum, sub radio. Prop. 6. *(2)* momentis *L* 4 circuli, | quadrabilibus *gestr.* si quadrans non excedatur, *erg.* | seu *L* 27 basis … sumtae *erg.* *L*

(seu aeque distantes a vertice, ut illae a basi) producentur applicatae quadrantis circuli. Et summa illorum, dabit semisegmenta circularia ex radio abscissa per applicatam.
Aliter: si rationes applicatarum diverse sumtarum, ita tamen ut ex basi sumta sit antecedens, ex vertice sumta consequens, inter se ducantur in sinus versos applicatarum parabolae ex basi sumtarum, a vertice, producentur sinus seu applicatae quadrantis, et ex summa semisegmentum ex radio abscissum vel etiam quadrans.
Sunt autem applicatae parabolae[:]

$$\frac{Rq \llcorner a^2 - \beta a \lrcorner}{Rq\ \beta a} \qquad \frac{Rq \llcorner a^2 - 2\beta a \lrcorner}{Rq\ 2\beta a} \qquad \frac{Rq \llcorner a^2 - 3\beta a \lrcorner}{Rq\ 3\beta a} \qquad \frac{Rq \llcorner a^2 - 4\beta a \lrcorner}{Rq\ 4\beta a}$$

fiet

$$Rq \llcorner \frac{a^2}{\beta a} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a^2}{2\beta a} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a^2}{3\beta a} - 1 \lrcorner$$

seu

$$Rq \llcorner \frac{a}{\beta} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a}{2\beta} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a}{3\beta} - 1 \lrcorner \qquad \text{etc.}$$

quae si ducantur in

$$a - \beta \qquad a - 2\beta \qquad a - 3\beta$$

vel

$$Rq \llcorner a^2 + \beta^2 - 2a\beta \lrcorner \qquad Rq \llcorner a^2 + 4\beta^2 - 4a\beta \lrcorner \qquad Rq \llcorner a^2 + 9\beta^2 - 6a\beta \lrcorner$$

fient

$$Rq \llcorner \frac{a^3}{\beta} + 3a\beta - 3a^2 - \beta^2 \lrcorner \qquad \text{etc.}$$

sinus.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: BAF et BCD. $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AF}{CD} = \dfrac{FB}{DB}$. Ergo
P r o p. 7. $AB \frown CD = CB \frown AF$. seu c y l i n d e r p o r t i o n i s c i r c u l i sub AC

---

18 $\dfrac{a^2 + \beta^2 - 2a\beta}{1} \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \end{array} \dfrac{a}{\beta} = \dfrac{a^3}{\beta} + a\beta - 2a^2$.

$$Rq \llcorner \frac{a^3}{\beta} + a\beta - 2a^2 - a^2 - \beta^2 + 2a\beta \lrcorner \quad \text{sinus.}$$

$$\llcorner \frac{a^3}{\beta} + 3a\beta - 3a^2 - \beta^2 \lrcorner Rq.$$

3 f. ita ... consequens *erg. L* 21 CB ⌢ AF. *(1)* | seu *nicht gestr.* | semicubus radii, vel etiam *(a)* cylinder semiquadrati portionis regulae vel sinus versi *(b)* prisma sinus versi sub radio *(2)* seu c y l i n d e r p o r t i o n i s *(a)* q u a d r a n t i s | sub *nicht gestr.* | radio *(b)* c i r c u l i *(aa)* altitudine AC *(bb)* sub *L*

a vertice abscissa, aequatur m o m e n t o t a n g e n t i u m d u p l o r u m a r c u u m d i m i d i a t o r u m seu distantiis earum a basi.

Intelligendum est enim AF applicatam esse ubi est CD. basis eius seu maxima applicabitur in B. ergo CB. est applicatae distantia a basi; est autem AF tangentis arcus dimidii, AH duplum. Cylinder ergo portionis ACD sub AC aequatur momentis omnium AF applicatarum ad AC.

C o r o l l. Hinc momentum chonchoeidis falsae ex basi, et ductus parabolico-parabolicus inversus aequantur per prop. hanc iuncta prop. 2. adde prop. 6 num. 3. et prop. 19.

Pergendum in his aequationibus: $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AF}{CD} = \dfrac{FB}{DB}$. Ergo

$$\begin{array}{ccccccc} \text{diam.} & & \text{chord. complem.} & & \text{sin. vers.} & & \text{chord. compl.} + [FD] \\ AB & \frown & DB & = & CB & \frown & FB. \end{array}$$ Ergo

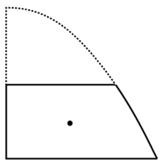
P r o p. 8. Cylinder cuius basis portio semiparabolae a basi per applicatam abscissae, altitudo diameter, aequatur summae momentorum ex basi, tam chordarum, seu portionis parabolicae a basi per applicatam abscissae, quam omnium FD, seu portionis figurae omnium FD a vertice abscissae.

C o r o l l. Hinc rursus q u a d r a t u r a m o m e n t i figurae omnium FD. ut et supra prop. 6. coroll.

---

1 seu m o m e n t o c o n c h o e i d i s f a l s a e

6 f. ad AC. | At cum AF sit duplum FD. *(1)* et momen *(2)* vel AH. tangentium dimidiorum, seu applicatarum conchoeidis falsae contractae, et ostenderimus tangentium dimidiorum momentum aequari momento portionis parabolae a vertice abscissae, ex basi. Ergo cylinder portionis circularis, m o m e n t o p a r a b o l i c o aequaretur. Quod si verum esset haberetur non tantum *(a)* qua *(b)* tetragonismus sed et goniotomia |. Et certe nondum invenio errorem. *gestr.* | modo haberi possit centrum gravitatis portionis semiparabolae a basi per applicatam abscissae.



Sin minus habetur saltem tetragonismus arithmeticus, *(aa)* isque non per approximationes, sed exactus, *(bb)* nimirum per infinitam seriem numerorum rationalium quod hactenus in circulo potuit nemo. Et quod est admirabilius, datur sectio angulorum universalis, seu inventio quotcunque proportionalium methodo eadem. *gestr.* | C o r o l l. *L*

8 inversus *(1)* quadrari possunt *(2)* aequantur *L* 11 tang. arcus dimid. *L ändert Hrsg.* 15 quam *(1)* tangentium arcuum dimidiorum, seu conchoeidis falsae contractae *(2)* omnium *L* 17 m o m e n t i *(1)* c o n c h o e i d i s f a l s a e c o n t r a c t a e. *(2)* figurae *L* 19 f a l s a e | (protractae) *gestr.* | *L*

$\overset{\text{dupl. tang. arcus dimid.}}{AF} \frown \overset{\text{chord. compl.}}{DB} = \overset{\text{sin}}{CD} \frown \overset{\text{chord. compl.} + FD}{FB}.$ Ergo

P r o p. 9. Portio conchoeidis falsae a vertice abscissae, ducta in portionem semiparabolae a basi abscissae, aequatur portionis semicirculi a vertice abscissae, ductui in semiparabolicam a basi abscissae, demto ductu eiusdem portionis semicirculi in figurae omnium FD portionem a vertice abscissam. Eadem omnium portionum altitudine (AC) supposita.

Iam ductus parabolico-circularis quadrari potest, prop. 3. Ergo ductus parabolicus in conchoeidem falsam demto ductu circulari in fig. FD q u a d r a r i potest.

Antequam autem ad novas aequationes procedamus operae pretium est resumere atque examinare alibi iam explicatas, ac uno velut obtutu oculis sistere.

Diximus supra $FD \frown \overset{\text{chord. compl.}}{DB}$ quadrari posse.

At quia etiam $\dfrac{FD}{DB} = \dfrac{DR = AC}{CB}$ portio regulae a vertice port. circ. / altera portio seu supplementum regulae.

Ergo $FD \frown CB = DB \frown AC$. ut iam habuimus. Ergo $FD = \dfrac{AC \frown DB}{CB}$. Ergo $\dfrac{AC \frown DB}{CB} \frown DB = FD \frown DB$. Ergo

P r o p. 10. $\dfrac{AC \frown \square DB}{CB} = FD \frown DB$. seu [solido] dato quia $FD \frown DB$ quadrabile est, sup. prop. 5. coroll.

3 NB. cum c o n c h o e i d e m dico, intelligo exemta circuli generatoris portione. Cum de ductibus loquor, intelligo iisdem regulae portionibus seu altitudinibus assumtis; et quod de totis, idem de partibus per applicatas abscissis intelligo.

1 chord. compl. + *(1)* tang. dimid. *(2)* FD *L* 5 f. in *(1)* conchoeidis falsae contractae *(2)* figurae *L* 13 supra *(1)* $\overset{\text{tang. dimid.}}{\text{FD}} \frown \overset{\text{chord. compl.}}{\text{DB}} = \overset{\text{diam}}{\text{AB}}\,\square$. *(2)* FD *L* 16 FD ⌢ DB *(1)* = *(a)* AB□. Ergo P r o p. 10. $\dfrac{\text{AC} \frown \square\text{DB}}{\text{CB}} = \text{AB}\square$. *(b)* plano *(aa)* assignabili *(bb)* dato *(2)*. Ergo *L* 17 plano *L ändert Hrsg.*

At $\square^{\text{ta}}$ DB seu chordarum a maxima, seu ab AB ita procedunt:

$$a^2 \qquad a^2-\beta a \qquad a^2-2\beta a \qquad a^2-3\beta a$$

eae ducantur in suas distantias ab A. seu in AC.

$$0 \qquad \beta \qquad 2\beta \qquad 3\beta$$

fient

$$0 \quad a^2\beta-\beta^2 a \quad 2a^2\beta-4\beta^2 a \quad 3a^2\beta-9\beta^2 a \quad \text{etc.}$$

Quae si dividantur per CB. seu distantias a B.

$$a \qquad a-\beta \qquad a-2\beta \qquad a-3\beta$$

[fiet]

$$\frac{0}{a} \quad \frac{a^2\beta-\beta^2 a}{a-\beta} \quad \frac{2a^2\beta-4\beta^2 a}{a-2\beta} \quad \frac{3a^2\beta-9\beta^2 a}{a-3\beta} \quad \text{etc.} \quad = \text{solido dato.}$$

C o r o l l. 1. Manifestum est, hoc solidum esse progressionis cuiusdam ad harmonicam accedentis, seu hyperboliformis, et tamen quadrari posse. Quod nulli hactenus quod sciam hyperboloeidi contigit.

Idem ex solido transferri potest in planum, divisis omnibus per a, unde apparet ipsum solidum esse spatii cuiusdam hyperboloeidis cylindrum, fiet enim basis:

$$\frac{a\beta-\beta^2}{a-\beta}+\frac{2a\beta-4\beta^2}{a-2\beta}+\frac{3a\beta-9\beta^2}{a-3\beta} \text{ etc.} = \text{solido dato per } a \text{ diviso.}$$

Hoc spatium habet asymptotam, sed in eo differt ab hyperbolico quod incipit a puncto, nam $\dfrac{a\beta-\beta^2}{a-\beta} = [\beta] =$ puncto, β enim est infinitesima ipsius a. Ipsae autem rectae a. $a-\beta$. $a-2\beta$ etc. sunt distantiae applicatarum ab aymptota continue decrescentes uniformiter, ut in spatio hyperbolico asymptoto. Habemus ergo

C o r o l l. 2. q u a d r a t u r a m p l a n i h y p e r b o l o e i d i s asymptoti infiniti.

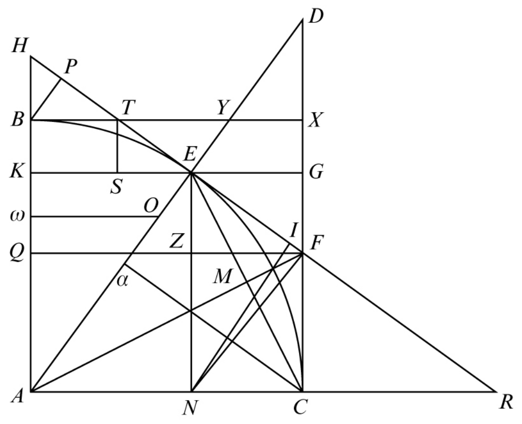
Quod hactenus quantum sciam nemo praestitit. Nam solidum hyperbolicum, seu ungulam spatii asymptoti, ideo quadrare facillimum fuit quia elementa eius non

9 fiet *gestr. L, erg. Hrsg.* 10 = *(1)* a^3. *(2)* solido *L* 15 cylindrum | sub a *gestr.* |, fiet *L* 16 = *(1)* a^2 *(2)* solido *L* 18 $\frac{a}{a}$ *L ändert Hrsg.*

11 C o r o l l. 1. : Leibniz übersieht, dass $\dfrac{na^2\beta-n^2\beta^2 a}{a-n\beta} = na\beta$ ist, so dass sich keine Hyperbel- sondern eine Parabelquadratur bzw. eine Identität ergibt.

hyperbolice sed cylindrice, ut elementa rectanguli, progrediuntur, ex nota hyperbolae proprietate.

Figura II.



[*Fig. 2*]

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ ADC et EDF similia. Ergo $\dfrac{AD}{DF} = \dfrac{DC}{DE} = \dfrac{AC}{EF}$.

P r o p. 11. $AD \frown DE = DF \frown DC$. secans in seipsum radio demto = tangenti in seipsum, demto tangente arcus dimidii, adde inf. prop. 43. coroll. 1. $d^2 - \cancel{ad} = c^2 - \cancel{ad} + a^2$. seu quadrata applicatarum spatii hyperbolici ad altitudinem, demto c y l i n d r o h y p e r b o l i c o, aequantur quadratis tangentium, seu applicatarum conchoeidis, demto rectangulo tangentium in tangentes arcuum dimidiorum, seu ductu conchoeidis in conchoeidem falsam contractam, seu demto cylindro hyp. add. cub. rad. prop. 13. Ergo quadr. sec. = quad. tang. + quad. rad.

Caeterum quadrata ista applicatarum, credo summari non posse; quia ipsae applicatae sunt infinitae, nec refert, quod applicatae summari possunt. Nam omnia quadrata sunt momentum utique figurae seu omnium applicatarum ex altitudine, at momentum hoc est figura ducta in distantiam centri gravitatis, ab axe librationis. Quam distantiam

4 *Fig. 2 erg. Hrsg. nach Text u. N. 21.* 8 $\mathrm{d}^2 - \ldots + \mathrm{a}^2$. *erg. L* 11–13 seu demto ... quad. rad. *erg. L*

necesse est esse assignabili qualibet maiorem. Semper enim quamcunque ducas rectam ex asymptota altitudini parallelam, patet ab uno eius latere finitas, ab altero infinitas longitudines esse. Pro longitudinibus autem seu distantiis continue pondera crescunt. Quare non est dubitandum haec spatia quibusdam quadrato-quadratis aequari, quemadmodum lineas infinitas aequari quadratis, alibi ostendi hyperbolae ipsius exemplo, in qua asymptota, quadrato illi, numeratori communi, aequalis est.

Unde praeclara consequentia ducitur, scilicet figuras quadratoquadratas, aliasque quascunque altiores non esse imaginarias, sed reapse posse exhiberi. Quod alioquin multis modis in partibus inassignabilibus ostendi potest, quemadmodum aliud paradoxum longe maius dari dimensiones medias inter puncta, lineas, superficies, corpora etc.

Ductus autem tangentium in tangentes arcuum dimidiorum, finitus est ut mox ostenderimus. Nam maximus tangentium arcus dimidii est ipse radius, unde patet conchoeidem falsam, eiusque contractam esse finitae longitudinis, nec habere asymptotam.

Prop. 12. $AD \frown EF = DF \frown AC$. secans in tangentem arcus dimidii aequatur differentiae tangentium, arcus dati et dimidii, in radium, seu spatium hyperbolicum in conchoeidem falsam contractam, aequatur cylindro conchoeidis verae, demto cylindro conchoeidis falsae contractae, adde prop. 38.

Prop. 13 $DC \frown EF = DE \frown AC$. seu tangens arcus dati in tangentem arcus dimidii aequatur radio in differentiam secantis et radii.

Ergo ductus conchoeidis verae in falsam contractam, cylindro hyperbolico demto cubo radii, add. prop. 37.

Ergo cubus radii aequatur cylindro hyperbolico demto ductu conchoeidis verae in falsam contractam. Quare si ductus iste quadrari posset, haberetur quadra-

---

13 Nota quod dixi conchoeidem falsam eiusve contractam esse finitam intellige, si intra quadrantem sistatur, quod fit quotiescunque secantibus, scilicet ex radio ductis utimur, at quoties chordas ex adversa diametri extremitate venientes ipsamque diametrum adhibemus, tunc ultra quadrantem ad ipsum usque semicirculum progredimur, quod in conchoeidis falsae eiusve contractae dimensione notandum est.

8–10 Quod alioquin ... corpora etc. *erg. L* t u r a h y p e r b o l a e , unde apparet, quanti sit momenti haec ductuum doctrina.

Cylinder hyperbolicus demto ductu conchoeidis verae in falsam contractam q u a d r a r i p o t e s t , semper autem aequatur cubo radii, quaecunque sit altitudo portionis regulae, quod notabile est.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ DEF et DGE similia sunt. Ergo $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{DE}{DG} = \dfrac{EF}{EG}$.

P r o p. 14. $DF \frown DG = DE\Box$. quadratum differentiae inter secantem et radium aequatur differentiae inter tangentem et tangentem arcus dimidii ductae in differentiam sinus et tangentis.

$$\text{sec.} \frown \text{sec.} + \text{rad.} \frown \text{rad.} - 2\,\text{rad.} \frown \text{sec.} =$$

$$\text{tang.} \frown \text{tang.} - \overline{\text{sin.} \frown \frac{\text{tang.} - \text{tang. dim.}}{\text{tang.} - \text{sin.}}\text{tang.} + \text{sin.} \frown \text{tang. dim.}} - \underset{\text{tang.} \frown \text{tang. dim.}}{[\text{sec.} \frown \text{rad.} - \text{quad. rad.}]}$$

$$\text{seu } \cancel{2}\,\text{rad.} \frown \text{rad.} - \cancel{2}\,\text{rad.} \frown \text{sec.} = - \text{sin.} \frown \text{tang.} + \text{sin.} \frown \text{tang. dim.}$$

$$- \cancel{\text{rad.} \frown \text{sec.}} + \cancel{\text{rad.} \frown \text{rad.}}$$

7 quadratum *(1)* complementi sinus | altitudinis seu portionis a vertice abscissae *erg.* | *(2)* differentiae *L* 9 et *(1)* secantis. $\text{sec.}\frown\text{sec.} + \text{rad.}\frown\text{rad.} - 2\text{rad.}\frown\text{sec.} = \text{sec.}\frown\text{tang.} - \overline{\text{sin.} \frown \frac{\text{tang.} - \text{tang. dim.}}{\text{sec.} - \text{sin.}}\text{tang.} + \text{sin.} \frown \text{tang. dim.}} - \text{sec.}\frown\text{tang. dim.}$ Ergo semicubus portionis a vertice abscissae = ductui conchoeidis in spatium hyperbolicum addito ductu portionis circularis in conchoeidem falsam contractam, demto ductu portionis circularis in conchoeidem | *darüber nicht gestr.:* prop. 46. 20. |, demtoque ductu spatii hyperbolici in conchoeidem falsam contractam | *darüber erg. u. gestr.:* C o r o l l. seu demto cylindro conchoeidis verae, addito cylindro conchoeidis falsae contractae per prop. 14 |. Idem sic enuntiari potest: semicubus aequatur ductui hyperbolae in conchoeidem veram falsa contracta minutam, addito ductu portionis circularis in *(a)* eandem *(b)* falsam contractam, demto ductu eiusdem in veram | *darüber nicht gestr.:* (qui quadrari potest posita hyperb. quadr. prop. 20.) |. Mirabilis est ista figurarum usque adeo heterogenearum atque extraordinariarum q u a d r a t u r a. *Absatz.* C o r o l l. Eadem est quadratura si per p r o p. 14. pro ductu spatii hyperbolici in conchoeidem falsam contractam substituas cylindrum conchoeidis verae, demto cylindro conchoeidis falsae contractae. *(2)* tangentis *L* 11 cyl. hyp. – *(1)* quad. rad. *nicht gestr.* *(2)* cub. rad. *L ändert Hrsg.*

---

7 P r o p. 14.: Die fehlerhafte 1. Fassung des Satzes hat Leibniz, wie die Verweise auf spätere Aussagen zeigen, bis zu Satz 48 beibehalten; erst dann hat er den Irrtum bemerkt und korrigiert.

Iam sin. ⌒ tang. = [sec. ⌒ rad.] − rad. in sin. compl.

Ergo: rad. ⌒ rad. = rad. in sin. compl. + sin. ⌒ tang. dimid.

Vide infra post prop. 48.

P r o p. 15. DF ⌒ $EG = DE$ ⌒ EF. seu differentiae tangentium a tangentibus arcuum dimidiorum ductae in distantias suas a vertice, seu eorum momenta aequantur differentiis inter radium et secantem in tangentem arcus dimidii ductis, seu ductui hyperbolae in tangentes arcus dimidii, demto c y l i n d r o tangentium arcus dimidii.

P r o p. 16. DE ⌒ $EG = DG$ ⌒ EF. seu momentum ex vertice differentiarum inter secantem et radium (quod datur data hyperbolae quadratura) aequatur ductui differentiae inter sinum et tangentem, in tangentem arcus dimidii; seu cylindro hyperbolico demto cubo radii (id est tangenti in tangentem arcus dimidii) et demto ductu sinuum in tangentes arcuum dimidiorum.

Ergo is ductus habetur dato hyperbolae tetragonismo.

$$\cancel{da} - df - a^2 + af = \cancel{ad} - \cancel{a^2} - bi.$$

$$\cancel{a^2}$$

Ergo sinus in tang. arc. dimid. $bi = a^2 - af$. seu sinus in tang. arc. dimid. = rad. in dist. a vertice. Ergo q u a d r a b i l e .

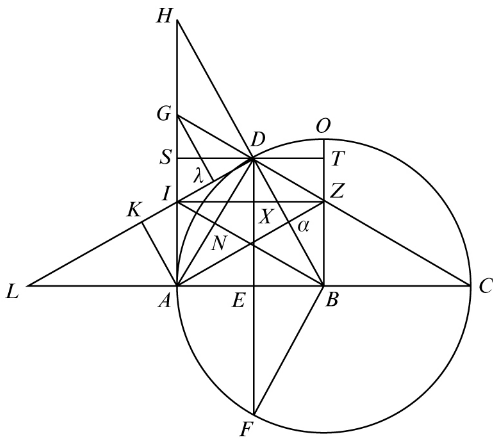
Regula artis combinatoriae in geometria:

Post lineas fundamentales, nulla facile recta ducenda est, quae non sit a puncto aliquo iam dato, ad aliud iam datum, aut quae non sit alteri cuidam parallela, aut aequalis, aut rationis ad eam datae, aut anguli aequalis, aut perpendicularis. Sed hoc inprimis observandum, ut linea ex puncto dato ducta sit alteri parallela aut perpendicularis, aut aequalis, aut angulum faciens aequalem.

1 cyl. hyp. *L ändert Hrsg.* 10 (quod *(1)* q u a d r a r i potest *(2)* datur *L* 13 f. dimidiorum. *(1)* Hoc ergo ductu habito haberetur h y p e r b o l a e t e t r a g o n i s m u s. *(2)* Ergo *L*

20 Regula: Beispiele dafür finden sich vor allem in Leibniz' Handexemplar des *Horologium oscillatorium*, 1673, insbesondere S. 66 u. 89; s. dazu N. 2.

Inprimis autem magni momenti est, triangula similia, inprimis rectangula constituere, quoad eius fieri potest. In rectangulis enim triangulis inter se comparatis, sufficit unius anguli obliquorum aequalitas, ad perfectam similitudinem.
Porro ope similium triangulorum, habentur lineae proportionales. At harum ope omnis generis rectangula aequalia.
Sed et alius modus est inveniendi rectangula aequalia citra similitudinem diversorum $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$, si scilicet in eodem $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ diversis modis assumtae altitudines in bases ducantur. Quod inprimis utile est, in triangulis quae rectilinea non sunt, nam in rectilineis res ad considerationem triangulorum similium redit.



[*Fig. 3*]

Fig. 3. $\bigtriangledown IDZ$. ubi $IZ \frown XD = ID \frown \alpha D$. at $\alpha D = EA$. distantia a vertice.
NB. radius ductus in sinum demto tangente arcus dimidii aequatur momento tangentium arcus dimidii ex vertice.

10 *Fig. 3 erg. Hrsg. nach Text u. N. 23.* 13–438,1 ex *(1)* circuli centro *(2)* vertice. | Dato hoc momento | et *(a)* conchoeide *(b)* figura ipsa *erg.* | datur ... alibi. *erg.* *(aa)* Nota datur autem hoc momentum *(bb)* Dato momento tangentium fig. sufficit momentum tangentium verarum ad tetragonismum. *erg. u. gestr.* | *L*

10 [*Fig. 3*]: Es ist zu beachten, dass Leibniz die urspüngliche spezielle Fassung der fig. 3. (s. N. 23) heranzieht und mit ihrer Hilfe die folgenden Beziehungen ableitet, die daher nicht immer allgemein gültig sind, so dass die darauf basierenden Integrationen falsch werden.

Dato hoc momento et figura ipsa datur tetragonismus ut alibi.

$\bigtriangledown IDB.$ tang. dimid. ID in radium DB = secanti dimidii BI in [sinum dimidii DN].

NI differentia inter NB regulae portionem ex centro, et BI secantem, ducta in sinum duplicatum AD aequatur ID in AK non tamen momento tangentium arcus ex vertice.
NB est dimidia CD. et BI dimidia CG.
Dato autem momento ex basi, datur momentum ex vertice et contra, saltem cylindris datis.
Hinc sequitur quadrabilem esse differentiam inter circularem portionem, et conchoeidis falsae contractae.

$\bigtriangledown BDC.$ DE sinus in radium BC = chordae complementi DC in semisinum arcus.

Fig. 3. in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ $ZDB.$ rad. $BD.$ in $Z\alpha = AZ$ $(= BI) - A\alpha$ $(= DE)$ aequatur $ZB \frown BE.$
Radius in differentiam secantis arcus dimidii a sinu dati, aequatur $ZB \frown BE$ tangenti arcus dimidii in distantiam a basi, seu momento horum tangentium ex basi, ac denique aequatur differentiae DZ inter CD et CZ $(= BI)$, seu inter chordam supplementi, et secantem arcus dimidii in sinum arcus dimidii DN.
Horum ergo omnium per prop. 19. coroll. 6. q u a d r a t u r a haberi potest.

---

19 *Daneben (bezogen auf die Grundstufe) großes*

2 dimidium semi *L ändert Hrsg.* 4 inter *(1)* radium et secantem, ducta in sinum duplicatum (quadrabilis) aequatur momento tangentium arcus | dimidii *gestr.* | ex vertice, | sed eorum duplo *gestr.* | *(2)* NB | semicordam *(!)* complementi *erg. u. gestr.* | regulae *L* 8 saltem *(1)* in totis *(2)* cylindris *L* 17 aequatur *(1)* illi toties dicto TD | = GD. male, tota ZD non est = DG. *erg.* | *(2)* differentiae *L* 19 per prop. 19. coroll. 6. *erg. L*

---

4 NI: s. dazu auch S. 439 Z. 11. 12 $\bigtriangledown BDC.$: s. dazu auch S. 439 Z. 3.

Et quia habetur ductus sinuum in chordas supplementi, habebitur ductus sinuum in secantes arcus dimidii.

NB. fig. 3. $\bigtriangledown BDC$: BC rad. in DE sin. = chorda compl. in sagittam complementi. NB. sagitta est distantia a centro, non tamen ideo cylinder quadrantis aequatur momento semicirculi, quia intellegi debent applicari chordae ubi sunt sinus et tunc sunt parabolae, sed sagittae non sunt amplius earum distantiae a centro.

Fig. 3. $\bigtriangledown FBD$. radius FB in sinum complementi arcus dimidii BN = duplo sinui arcus dati FD in BE sinum complementi.
Ergo summa sinuum complementi arcus dimidii q u a d r a r i potest. Ergo et summa sinuum versorum arcus dimidii.

Esto in fig. 3. $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ AID. chorda arcus in diff. secantis et sinus complementi aequatur ID tangenti dimidii, in sinum versum $AK = AE$. seu momento tangentis dimidii ex vertice.
Hoc vero momentum quadrabile est, forte et sinus complementi in chordam, ergo tunc foret quoque quadrabilis ductus hyperbolicus in parabolicum.

In $\bigtriangledown BAD$. AB rad. in ED sinum = sinus complementi arcus dimidii, in chordam.

Portiones conchoeidis falsae, ademtis portionibus cissoeidis, faciunt portiones cy-

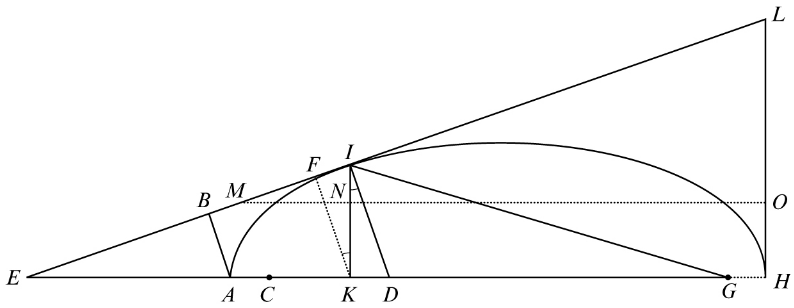
14 NB. hoc momentum ex vertice est quadrabile, quia figura (segmento) detracta ex portione circulari, residua manet rectilinea.

16 NB.

438,19–439,1 potest. *(1)* Quare differentia inter portionem circularem *(2)* At secans *(3)* Hinc data quadratura circuli datur quadratura hyperbolae, et vicissim. Imo data dimensione partium hyperbolae, datur sectio angulorum universalis. | Imo forte error quia in prop. 19. coroll. 6. ponderant ex basi per centrum non per extremum diametri transeunte. Sed quicquid huius sit, si unum momentum datur, dabitur etiam alterum, modo et figurae dimensio detur, data enim distantia centri figurae, a basi per centrum circuli transeunte, dabitur et a transeunte per diametri extremum. Ergo data quadratura circuli datur quadratura hyperbolae *(a)* non *(b)* et contra. Quia figurae dimensio pendet a circuli quadratura igitur et ex data circuli quadratura, dabitur curva elliptica et parabolica. *erg.* | *(4)* Et *L* 11 *(1)* NB. videtur etiam ductus hyperbolico-parabolicus quadrari posse *(2)* Esto *L* 14 forte *erg. L* 15 parabolicum. | Imo non est, nam *gestr.* | *L* cloeidis; modo scilicet a cycloeide portiones circulorum generantium ademtae intelligantur.

Lineae figuraeque epicyclicae dimensio.
Arnaldus, Bullialdus, Carcavius, Dalancius, Galloisius, Huetius, Hugenius, Oldenburgius, Thevenotus, Thomasius.

Conchoeis falsa contracta est momentum arcus circuli ex tangente, seu duplum eius segmentum.



[*Fig. 4*]

Si sit ellipsis AIH. foci C et G. punctum quodlibet in curva sumtum I. ex quo perpendicularis in distantiam focorum CG demissa ID. erit $\dfrac{CG}{AH} = \dfrac{DG}{IG}$. ut ostendit P. Fabri, *Synoψ. Opt.* prop. 51.
Ergo $CG \frown IG = AH \frown DG$. seu summa omnium rectarum ex uno focorum ad curvam ducibilium, ducta in distantiam focorum, aequatur abscissis a perpendiculari ex distantia focorum, ductis in diametrum transversam maiorem. Ergo bases horum cylindrorum erunt ut altitudines reciproce, seu summa ductarum ex foco ad curvam, erit ad summam abscissarum, ut est diameter transversa ad distantiam focorum.

1 scilicet a | conchoeide et *gestr.* | cycloeide *L*

10 ostendit: *a. a. O.* S. 155. Auf dieser Seite hat Leibniz in seinem Handexemplar die fehlende Figurenangabe (fig. 127) ergänzt.

Et hoc verum est, quomodocunque unitas in constructione assumatur, seu quaecunque intelligatur regula, sive ea sit curva, sive CD. sive ipsa IG. continue crescens uniformiter.

In omni figura perpendicularis ex curva ad altitudinem, seu applicata, ut IK $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ rectangulum EIK in similia secat. Hinc similia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ EID. et EIK. et IKD.

Ergo $\dfrac{ED}{EI} = \dfrac{EI}{EK} = \dfrac{ID}{IK}$. Ergo $ED \frown EK = \underline{\underline{\Box EI}}$. item: $ED \frown IK = EI \frown ID$. item: $EI \frown IK = EK \frown ID$.

Porro $\dfrac{EI}{ID} = \dfrac{EK}{IK} = \dfrac{IK}{KD}$. ergo: $EI \frown IK = EK \frown ID$. habuimus. $EI \frown KD = ID \frown IK$. denique $EK \frown KD = \underline{\underline{IK\,\Box}}$. seu applicata est media proportionalis inter portiones quas facit in parte altitudinis inter tangentem et perpendicularem interiecta.

Tandem: $\dfrac{ED}{ID} = \dfrac{EI}{IK} = \dfrac{ID}{KD}$. Ergo $ED \frown IK = ID \frown EI$. habuimus $ED \frown KD = \underline{\underline{ID\,\Box}}$. seu perpendicularis est media proportionalis inter totum intervallum perpendicularis et tangentis in altitudine sumtum, eiusque portionem minorem.

Demissa recta KF constat angulos KID et FKI esse aequales ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ KFI et IKD similia ergo $\dfrac{ID}{IK} = \dfrac{IK}{KF} = \dfrac{KD}{FI}$. Ergo $ID \frown KF = IK\,\Box$.

Si tangens EI continuetur dum perpendiculari HL occurrat in L. et ex applicata ducatur parallela ipsi EH. nempe MN. patet $\bigtriangledown^{\text{la}}$ MIN et MLO esse similia ergo

$$\frac{LI}{IM} = \frac{LO}{IN} = \frac{KH = NO}{MN}.$$

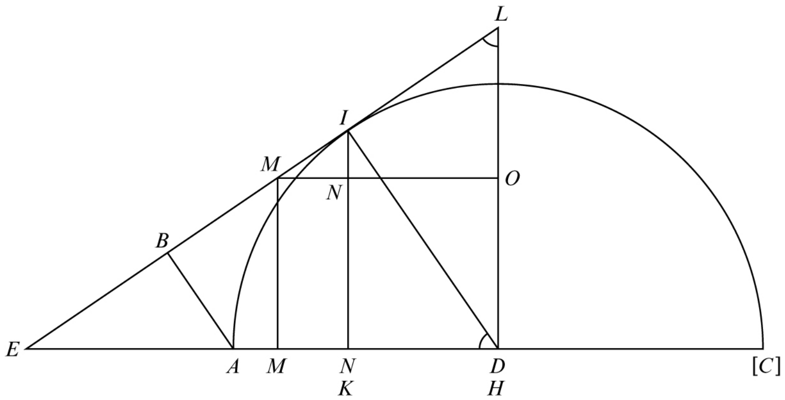
Ergo $LI \frown IN = IM \frown LO$. seu tangentes IL applicatae arcubus IM aequantur summae partium basis LH. demtis applicatis $OH = NK$.
Item $LI \frown MN = IM \frown KH$. Ergo momenta chordarum seu exiguorum arcuum ex basi aequantur summae portionum tangentium inter basin et punctum contactus interceptae altitudini applicatarum, nam ipsae MN sunt altitudinis partes, eamque exacte implent. Quibus si ipsae tangentes imponantur, posita divisione AH. si ponatur esse diameter

18 f. seu *(1)* secantes *(2)* tangentes ... summae *(a)* tangentium *(b)* partium ... = NK. *erg. L*

17–442,7 Die Ähnlichkeitsbeziehung ist unrichtig. Dadurch wird die folgende Textaussage falsch; die beiden anderen sind im Ansatz richtig.

circuli in infinitas MN inter se aequales, orietur figura tangentium, seu conchoeis circulo generatore deminuta, ea ergo aequalis est momento arcus.

Idem universaliter verum est, quaecunque portio conchoeidis assumatur. Conchoeis ergo et quaevis eius portio abscissa quadrari potest, si curva illa sit circularis, quia curvae circularis momentum ex basi radio quadrari potest. Imo error, non tangentium summa sed tangentium arcus supplementi. Nec obest, quod tandem LI fit infinita MO semper manet finita, nam et $\underline{\underline{MN}}$ fit infinities minor IM puncto.



[*Fig. 5*]

$EID\bigtriangledown$ tangens in radium = secanti in sinum.

Secans in secantem complementi = radio in tang. + tang, compl. ob $\bigtriangledown ELD$.

$\dfrac{LM}{IM} = \dfrac{OM}{NM} = \dfrac{LO}{IN}$. ergo

$LM \frown NM = IM \frown OM$. item $LM \frown IN = IM \frown LO$. $\quad OM \frown IN = NM \frown LO$.

$\dfrac{LE}{IM} = \dfrac{LH}{IN} = \dfrac{EH}{MN}$.

$LE \frown IN = IM \frown LH$. $\quad LE \frown MN = IM \frown EH$. $\quad LH \frown MN = EH \frown IN$.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EIK et MIN. Ergo $\dfrac{EI}{IM} = \dfrac{EK}{MN} = \dfrac{IK}{IN}$.

8 [*Fig. 5*]: H L *ändert Hrsg.* 9 | EID$\bigtriangledown$ *erg.* | *(1)* secans in radium = tangenti in sinum. Quo posito dabitur absoluta conchoeidis quadratura *(2)* tangens L

$EI \frown MN = IM \frown EK.$ $\quad EI \frown IN = IM \frown IK.$ $\quad EK \frown IN = MN \frown IK.$
sum. tang.

Item $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EIH et IMN. Ergo $\dfrac{EH}{IM} = \dfrac{IH}{IN} = \dfrac{IE}{MN}$. Ergo
$EH \frown IN = IM \frown IH.$ seu in circulo secans in basin = radio in chordam seu arcum.
$IH \frown MN = IN \frown IE.$ ergo quadrari possunt omnia $IN \frown IE = IM \frown IK.$
$EH \frown MN = IM \frown IE.$ seu tangentes applicatae arcubus aequantur hyperbolae.

Tandem similia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ EBA et IMN. nam $\vee BEA = IMN$. Ergo $\dfrac{EA}{IM} = \dfrac{AB}{IN} = \dfrac{BE}{MN}$. Ergo
$EA \frown IN = AB \frown IM.$ Ergo EA applicatae basi aequantur segmento figurae duplicato (utile hoc in cycloeide, ubi quadratura cuiusdam segmenti).
$AB \frown MN = IN \frown BE.$ in circulo $AB = AK$.
$EA \frown MN = IM \frown BE.$

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ AHE et AEN similia sunt. Ergo: $\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{EN} = \dfrac{HE}{AN}$.

P r o p. 17. $AH \frown EN = AE\square$. seu secans in sinum complementi aequatur quadrato radii. Quod aliunde constat, quia quadratum radii divisum per portionem regulae seu distantiam a basi seu sinum complementi, dat secantem. Hoc ergo idem est cum momento hyperbolae ex basi.

P r o p. 18. $AH \frown AN = AE \frown HE$. secans in sinum = radio in tangentem. Ergo c y l i n d e r c o n c h o e i d a l i s aequatur ductui portionis circularis in hyperbolicam. Adde prop. 56.

4 *Hinter der Formel größeres* NB.

9 segmento *(1)* circuli *(2)* figurae *L* 15 per *(1)* distantiam a basi *nicht gestr.* *(2)* portionem *L*

13 $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AHE et AEN: Von hier an greift Leibniz auf fig. 2. zurück. Die Figur gilt für die Sätze 17–76 sowie 79 u. 80.

Prop. 19. $AE \frown AN = EN \frown HE$. seu cylinder circularis aequatur momento tangentium ex basi.

Hoc theorema conferendum cum prop. 7. Ibi diameter ductus in sinum, aequatur tangenti falso ducto in distantiam a basi, id est in distantiam ab altera diametri extremitate, seu si arcus minor quadrante, in distantiam a centro + rad. Hoc loco (ubi arcus quadrantem nunquam excedit) radius ductus in sinum, aequatur tangenti vero, ducto in distantiam suam a centro.

Esto radius a. sinus b. tangens verus c. falsus d. distantia a centro seu tangentis veri a basi e. tangentis falsi a basi $e + a$. Iam $ab = ce$. item $2ab = de + da$.

Coroll. 1: Ergo $2ce = de + da$.

Coroll. 2: Ergo $\dfrac{2ce}{d} = e + a$. Et quia $2ce - de = da$.

Coroll. 3: Ergo $2c - d = \dfrac{da}{e}$. Item quia $2ab - da = de$. erit

Coroll. 4: $2b - d = \dfrac{de}{a}$.

---

1 f. *Zu* Prop. 19. *am Rande ergänzt:*
cyl. circ. $=$ ab. momentum tangentium ex basi $=$ ec. Iam vid. <u>15. et 12.</u> add. prop. 6. num 6. mom. tang. ex vertice, scilicet id $=$ (prop. 15 + 12) cyl. conchoeid. ver. $-$ cyl. quadrupli segmenti arcus (seu minus cyl. conchoeid. fals.) + (per duct. prop. 6. num. 6.) + cyl. conchoeid. fals. seu cyl. quadrupl. segm. sub rad. $-$ cyl. port. circ.
Ergo, iungendo utrumque momentum: cyl. conch. $=$ cyl. circ. + cyl. conch. $-$ cyl. circ. Calculi comprobatio. Add. prop. 24.

5 f. loco *(1)* diameter *(2)* | (ubi ... excedit) *erg.* | radius *L* 8 f. seu *(1)* sinus *(2)* tangentis veri a basi *erg. L* 13–445,1 $\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{a}}$. | Coroll 5. Ergo omnes 2b – d. seu ductae in a = de. Seu | dupla *erg.* | summa sinuum | omnium *erg.* | id est quadrans | duplicatus seu semicirculus *erg.* |, demtis tangentibus falsis omnibus in quadrante, aequatur tangenti falso | maximo *erg.* | quadrantis, id est diametro, ducto in veri tangentis quadrantis radio scilicet applicati, distantiam a basi. Quae nulla est, tangentibus cum falsis continuo applicatis radio, maximus cadit in ipsum centrum. Hinc sequitur summam tangentium falsorum quadrantis, aequari | semi *gestr.* | circulo. Ecce modum probandi, *(1)* ubi de toto *(2)* dimensionem totius, sine partium dimensione. Sed partes alias metimur, generaliterque definiemus summam tangentium falsorum aequari duplo | semi *gestr.* | segmento arcus |, seu segmento arcus duplicati *gestr.* | . *gestr.* | Porro *L*

Porro

C o r o l l 1. etiam sic enuntiari potest: duplum momentum tangentium verorum ex basi per centrum transeunte aequari momento t a n g e n t i u m f a l s o r u m , addito c y l i n d r o eorum sub radio.

C o r o l l. 4tum ita enuntiari potest: s u m m a s i n u u m duplicatorum demta s u m m a t a n g e n t i u m falsorum, aequatur dicto m o m e n t o tangentium falsorum, per radium diviso. Idque non tantum in quadrante, sed et in alia quacunque portione circulari minore.

C o r o l l. 6. Hinc dimensio m o m e n t i t a n g e n t i u m f a l s o r u m e x b a s i.

Nam summa sinuum duplicata est duplum semisegmentum arcus dati, seu segmentum arcus BE dupli. Summa tangentium falsorum est quater segmentum arcus BE [dimidiati]. Ergo differentia, seu $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ BKE [duplicatum] ductum in radium, dabit momentum tangentium falsorum.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ AEN (vel KEA) et HKE similia sunt. Ergo: $\dfrac{AE}{HE} = \dfrac{AK}{HE} = \dfrac{KE}{KH}$.

$AE \frown KE = HE \frown AK$. coincidit cum prop. 19.

P r o p. 20. $AE \frown KH = HE \frown KE$. seu radius in differentiam secantis et distantiam a basi per centrum transeunte aequatur tangenti in sinum. Seu cylinder hyperbolicus demto prismate, cuius basis distantiae a basi (quadrabiles) aequatur d u c t u i p o r t i o n i s c o n c h o i d a l i s i n c i r c u l a r e m .

Ergo ductus portionis conchoeidalis in circularem, prop. 14. 46, demto cylindro hyperbolico, q u a d r a r i potest. Add. prop. 27. et repetita prop. 14. post prop. 48.

4 f. radio. | C o r o l l. 2. ita enuntiatur. *gestr.* | *(1)* Ex corollario 4^{to} praeter 5^{tum} duco sextum. C o r o l l. 6^{tum} *(2)* C o r o l l. 4^{tum} *L* 13 dimidiati *erg. Hrsg.* 13 duplicatum *gestr. L, erg. Hrsg.* 14 f. falsorum. | C o r o l l. 7. ideo coneides tangentium falsorum reduci potest ad verum cylindrum, etsi area ad segmentum. *gestr.* | $\bigtriangledown^{\text{la}}$ *L* 17 HE $\frown$ KE. *(1)* seu differentia secantis a radio, *(a)* in momentu *(b)* in distantia a basi *(2)* seu *L* 18 f. Seu *(1)* momentum *(a)* hyp *(b)* differentiarum *(c)* applicatarum *(aa)* hyperbolae *(bb)* spatii hyperbolici radio cuilibet earum ademto (quod q u a d r a r i potest) *(2)* cylinder hyperbolicus demto *(a)* semiquadrato cui *(b)* prismate *L*

9 C o r o l l. 6.: In diesem Korollar setzt Leibniz entgegen der Ausgangsformel $d = a - tg\dfrac{\varphi}{2}$.

P r o p. 21. $AK \frown KH = KE\square$. seu quadratum sinus aequatur differentiae secantis a distantia a basi momento ex basi.

Utrumque autem q u a d r a r i dudum constat.

$\triangledown^{la}$ similia: AEH et BPH. Ergo: $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{AE}{BP} = \dfrac{EH}{HP}$.

P r o p. 22. $AH \frown BP = AE \frown HB$. secans in distantiam a circuli vertice = radio in differentiam radii a secante. Seu m o m e n t u m s p a t i i h y p e r b o l i c i e x v e r t i c e, aequatur c y l i n d r o h y p e r b o l i c o sub radio, demta summa radiorum, quae quadrabilis est in radium.

Ergo cylinder hyperbolicus demto momento spatii ex vertice, q u a d r a r i potest est enim momentum ex basi. Hoc per se patet.

P r o p. 23. $AH \frown HP = HB \frown EH$. secans in differentiam inter sinum et tangentem aequatur differentiae inter secantem et radium, in tangentem.

Radius a. sinus b. tangens c. secans d. ita $dc - db = dc - ac$.

C o r o l l. Ergo $db = ac$. seu secans in sinum = radio in tangentem.

Ergo ductus hyperbolicus in circularem, aequalis c y l i n d r o c o n c h o e i d a l i.

P r o p. 24. $AE \frown HP = BP \frown EH$. radius in differentiam tangentis et sinus aequatur distantiae a vertice in tangentem, seu c y l i n d e r c o n c h o e i d a l i s, d e m t o c i r c u l a r i, uterque sub radio, aequatur m o m e n t o p o r t i o n i s c o n c h o e i d a l i s ex vertice.

$\triangledown^{la}$ similia: HPB et EGF. quia $\vee^{li}$ BHP et EFG. aequales. Ergo:

$$\frac{FE}{HB} = \frac{GF}{HP} = \frac{EG}{BP}.$$

P r o p. 25. $FE \frown HP = HB \frown GF$. seu [tangentes] arcus supplementi dimidiati in differentiam tangentis et sinus, aequantur differentiae inter radium et secantem in differentiam inter distantiam a basi et tangentem arcus supplementi dimidii.

Seu posito radio a. secante d. distantia a basi f. tangente arcus suppl. dimid. e.

7 f. summa *(1)* distantiarum a vertice *(2)* radiorum . . . est *(a)* (semiquadratum distantiae a vertice) *(b)* in *L* 23 seu *(1)* momenta tangentium arcus supplementi dimidiati, ex vertice circuli *(2)* | tangentium *ändert Hrsg.* | arcus *L* 25 inter *(1)* sinum *(2)* distantiam *L* 26 secante d. *(1)* sinu b. *(2)* distantia *L*

21 $\triangledown^{la}$ similia: Bei der Behandlung der aus dieser Beziehung abgeleiteten Aussagen unterlaufen Leibniz verschiedene Versehen, welche trotz nachfolgender Korrekturen nicht alle behoben werden. Die Sätze 25–27 sind daher nur eingeschränkt gültig.

fiet $d-a, \frown f-e$. seu $df-de-af+ae=ec-eb$. seu momentum hyperbolicum ex basi demto ductu hyperbolico in tang. dim. suppl. demto momento sinuum ex basi addito denique cylindro tang. arc. suppl. dim. Si hic quadrari potest, ut alibi ostensum ergo m o m e n t a tang. arc. supplem. dim. addito ductu hyp. in tang. dim. suppl. q u a d r a r i possunt. Prop. 46. coroll. 2.

P r o p. 26. $FE \frown BP = HB \frown EG$. tang. dim. suppl. momentum ex vertice circuli = diff. inter distantiam a basi et radium in diff. rad. et sec. [;] seu ductus tang. suppl. dimid. in conchoeid. − tang. dimid. suppl. ductus in port. circ. $= a-f. \frown d-a$. $= ad-a^2-fd+fa$. seu cylindro hyperbolico sub radio demtis radiis in radios, demto momento hyperbolico addito prismate distantiarum a basi.

P r o p. 27. $GF \frown BP = HP \frown EG$. differentia tangentis dimid. arcus supp. a distantia a basi, ducta in differentiam radii et distantiae a basi, aequatur differentiae inter tangentem et sinum in differentiam inter sinum et radium, seu $[e]-f \frown a-f = c-b \frown a-b$.

$[e]-f \frown a-f = ea-ef-fa+f^2 = c-b \frown a-b = ca-cb-ba-b^2$. seu
$ca-da+af-ba-b^2$.

Seu cylinder tangentium arcus dimidii supplementi $\underline{\underline{ea}}$, additis distantiarum a

---

6 *Zur Formel:* prop. 46. coroll. 2.

17 *Zur Streichung:* (quadrabilis) *mit gültigem* non *überschrieben*.

1 fiet *(1)* d − a, ⌒ b − e. seu db − de − ab + ae = |ec − eb. *erg.*| seu ductus hyperbolicus in circularem (cylinder conchoeidalis) *(2)* d − a, ⌒ f − e. *L* 2 suppl. *(1)* addito cylindro circulari *(2)* demto *L* 5 suppl. *(1)* et cyl. circ. |*darüber:* mom. arc.| demto cyl. conchoeid. *(2)* q u a d r a r i *L* 8 circ. *(1)* |b iam posito sinu *erg. u. nicht gestr.*| = a − b. ⌒ d − a = ad − a^2 − bd + ba. *(2)* = a − f. ⌒ d − a. *L* 10 demto *(1)* cylindro conchoeidis (=bd) *(2)* momento *L* 10 addito *(1)* cylindro circulari *(2)* momen *(3)* prismate *L* 11 dimid. arcus supp. *erg.* *L* 13 seu *(1)* c − f ⌒ a − f = c − b ⌒ a − b. c − f ⌒ a − f = ~~ca~~ − cf − fa + f^2 = c − b ⌒ a − b = ~~ca~~ − cb − ba − b^2. Ergo f^2 − cf − fa = b^2 − cb − ba. Ergo f^2 − cf − fa − b^2 + cb + ba = 0. Ergo f^2 + cb + ba = cf + fa + b^2. Seu quadrato distantiarum a basi aucta ductu conchoeido-circulari (qui demto c y l i n d r o quodam hyperbolico quadrari potest prop. 20.) et c y l i n d r o circulari, aequantur momento tangentium, radio in distantias a basi, sinuum quadratis. Hinc dari potest m o m e n t u m t a n g e n t i u m , dato tetragonismo circuli et hyperbolae. Vicissim data quadratura hyperbolae eiusve partium, et momento conchoeidis *(a)* eiusve *(b)* eiusque partium datur t e t r a g o n i s m u s c i r c u l i eiusque partium seu sectio angulorum universalis et quotcunque mediarum proportionalium inventio. *(2)* |c *ändert Hrsg.*| − f *L* 15 c *L ändert Hrsg.* 17 $\underline{\underline{\text{ea}}}$ |(quadrabilis) *gestr.*|, additis *L*

basi quadratis $\underline{\underline{f^2}}$ (quadrabilibus) et quadratis sinuum $\underline{\underline{b^2}}$ (itidem quadrabilibus), demtis $\underline{\underline{fa}}$ distantiis a basi in radium (itidem quadrabilibus), iisdem rursus additis (et ideo plane omissis), aequatur cylindro conchoeidali $\underline{\underline{ca}}$ addito momento tangentium arcus dimid. suppl. $\underline{\underline{ef}}$, demtis cylindris hyperbolico et circulari. Cylindri autem isti omnes sunt sub radio, etsi altitudo partium abscissarum a vertice radio minor sit. Quodsi momenta tangentium arcus dim. suppl. redigi possunt vel ad figuram rectilineam vel saltem ad cylindrum circularem, ut credo, et verum est conchoeidis et hyperbolae et partium quadraturas a se invicem dependere, necesse est dari quadraturam circuli et partium eius, data quadratura hyperbolae; si etiam cylinder tang. semicomplementi q u a d r a r i queat, sed ille non potest.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AEK et ADC. Ergo $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DC}{AK} = \dfrac{AC = AE}{KE}$.

P r o p. 28. $AD \frown AK = AE \frown DC$. secans complementi in distantiam a basi per centrum transeunte seu sinum complementi, aequatur radio in tangentem complementi, seu cylinder tangentium complementi (q u a d r a b i l i s de quo infra) aequatur momento secantium complementi ex basi quadrantis seu ipsius figurae secantium complementi ex vertice.

Ergo hoc m o m e n t u m q u a d r a b i l e est.

Adde prop. 40. Et adde p r o p. 23. c o r o l l. *Trigonometriae inassignabilium*.

P r o p. 29. $AD \frown KE = AE\square$. sinus in secantem complementi, aequatur quadrato radii, seu radius est media proportionalis inter sinum arcus dati, et secantem arcus complementi.

---

20 *Zu* $AD \frown KE$*:* add. prop. 41.

7 vel . . . vel *erg. L* 14 seu sinum complementi *erg. L* 16 f. seu . . . vertice *erg. L*

---

19 Et adde: s. N. 27 S. 472 Z. 6 f., weitere Hinweise auf dieses Stück finden sich in den Sätzen 43, 45, 47 (Korollar 2), 51 und 72.

Quare ductus circularis in figuram secantium complementi inversus, aequatur p r i s m a t i , cuius basis quadratum radii, altitudo distantia sinus in vertice quadrantis. Ergo q u a d r a t u r .

His adde prop. 33. corollar.

P r o p. 30. $DC \frown KE = AK \frown AE$. sinus in tangentem complementi aequatur radio in distantiam a basi quadrantis.

Quare ductus portionis circularis in portionem figurae tangentium complementi inversus, aequatur radio in summam distantiarum a basi seu abscissam trianguli a basi, ergo ductus iste est q u a d r a b i l i s .

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AEH et ADC. Ergo $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{DC}{AE} = \dfrac{AC = AE}{HE}$.

P r o p. 31. $AD \frown AE = AH \frown DC$. radius in secantem complementi, aequatur secanti in tangentem complementi, atque ideo c y l i n d e r s e c a n t i u m c o m p l e m e n t i sub radio aequatur ductui inverso secantium, seu portionis hyperbolicae in portionem figurae tangentium complementi.

P r o p. 32. $AD \frown HE = AH \frown AE$. radius in secantem, aequatur secanti complementi in tangentem, atque ideo cylinder hyperbolicus aequatur ductui inverso portionis conchoeidalis in portionem figurae secantium complementi. Vide post prop. 44. et 67.

P r o p. 33. $DC \frown HE = AE\square$. tangens in tangentem complementi, aequatur quadrato radii. Adde prop. 43.

Atque ideo prisma, cuius basis quadratum radii, altitudo distantia sinus a vertice quandrantis, aequatur ductui inverso portionis conchoeidalis eiusdem altitudinis a vertice abscissae, in portionem figurae tangentium complementi a basi abscissam.

1 secantium *(1)* falsarum *(2)* complementi *L* 14 f. complementi. | C o r o l l. id est, iuncta p r o p. 35., cylinder secantium complementi, aequatur cylindro *erg. u. gestr.* | P r o p. 32. *L* 15 f. secantem | (complementi) *erg., streicht Hrsg.* |, aequatur secanti complementi | (secanti) *erg. u. gestr.* | in tangentem | (complementi) *erg. u. gestr.* |, atque *L* 21 sinus *erg. L* 22 eiusdem altitudinis *erg. L*

---

15 P r o p. 32.: Bei der Ausformulierung erkennt Leibniz die Dualität von Satz 32 zu Satz 31. Er versucht dies mittels beigefügter Klammereinschüben auszudrücken, hat den Versuch aber schließlich doch abgebrochen; s. aber unten die Sätze 48 und 52.

Coroll. atque ideo per prop. 29. sinus in secantem complementi, aequatur tangenti in tangentem complementi ductusque circularis inversus in figuram secantium complementi, ductui conchoeidali inverso in figuram tangentium complementi. Adde prop. seq. 34. et 37.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: HEK et ADC. ergo $\dfrac{DA}{HE} = \dfrac{DC}{EK} = \dfrac{AC}{HK}$.

Prop. 34. $DA \frown EK = HE \frown DC$. secans complementi in sinum = tangenti in tangentem complementi, habuimus prop. 33. corollar., quadrabile.

Prop. 35. $DA \frown HK = HE \frown AC$. differentia inter secantem et sinum complementi in secantem complementi, aequatur tangenti in radium, atque ideo cylinder conchoeidalis aequatur ductui inverso figurae hyperbolicae in figuram secantium complementi, add. prop. 38, demto momento (quadrabili prop. 28) secantium complementi ex basi quadrantis seu vertice suo. Adde prop. 44. et prop. 45.

Prop. 36. $DC \frown HK = EK \frown AC$. radius in sinum = tangenti complementi in differentiam secantis et sinus complementi. Atque ideo cylinder portionis circularis aequatur ductui inverso hyperbolae in figuram tangentium complementi (= cylindro secantium complementi, prop. 31.) demto momento tangentium complementi ex vertice suo seu basi quadrantis.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: ADC et HQF. Est autem QF = radio, HF = tangenti arcus dati + tangenti arcus dimidii complementi, et HQ est differentia inter secantem et tangentem compl. dimid. vel est summa ex differentiis duabus, altera inter secantem et sinum complementi, altera inter sinum complementi et tangentem complementi dimidii. Hinc iam:

$$\frac{AD}{HF} = \frac{DC}{QF = AC} = \frac{AC}{QH}.$$

Prop. 37. $AD \frown AC = HF \frown DC$. secans complementi in radium = tangenti complementi in summam ex tangente et tangente complementi dimidii vel in secantem. Atque ideo cylinder secantium complementi sub radio, aequatur tangentibus complementi in tangentes (quadrabilibus, per prop. 33. coroll. et prop. 34.) additis tangentibus complementi in tangentes complementi dimidii.

26 vel in secantem *erg. L*

Atqui tangentes complementi in tangentes complementi dimidii, aequantur radio in secantes complementi, demto radio in radios; seu cylindro secantium complementi, demto quadrato radii in distantiam a vertice circuli, per prop. 13.

Utraque ergo proposito, 13. et 37. eodem redit, argumento veritatis calculi. Adde prop. 45.

Prop. 38. $AD \frown QH = HF \frown AC$. secans complementi in differentiam secantis et tangentis complementi dimidii, aequatur radio in summam ex tangente et tangente complementi dimidii, atque ideo:

Cylinder conchoeidalis, addito cylindro tangentis complementi dimidiati, aequatur ductui hyperbolico inverso in figuram secantium complementi (qui per prop. 35. = cylindro conchoeidali momento secantium complementi, ex basi quadrantis, quadrabili, quod et cylindro tangentium complementi aequatur, prop. 28., aucto), demto secante complementi in tangentem complementi dimidii.

Atqui secans complementi, in tangentem complementi dimidii aequatur DF differentiae inter tangentem complementi, et tangentem complementi dimidii, in radium, supra prop. 12.

Hinc talis aequatio orietur. Esto radius a. tangens c. secans d. secans complementi g. tangens complementi h. tangens dimidii complementi e. literis superioribus retentis. Ergo:

$$gd - ge = ac + ae.$$

Sed quia pro $\underline{gd}$ substitui potest per prop. 35. $ac + ah$. et per prop. 12. pro $\underline{ge}$ substitui potest $ah - ae$. fiet aequatio talis: $ac + ah - ah + ae = ac + ae$. seu $ac + ae = ac + ae$. insigni documento calculi recte positi.

Prop. 39. $DC \frown QH = AC\,\square$. tangens complementi; in differentiam secantis, et tangentis semicomplementi, aequatur quadrato radii.

---

18 *Zu* supra *zusätzlich:* 46.

10 cylindro *(1)* conchoeidis falsae dimidiatae arcus *(2)* tangentis *L* 13 f. quod et ... prop. 28. *erg. L* 23 ac + *(1)* $\frac{a^2}{\alpha}$ ($\frac{a^2}{\alpha}$ significat quantitatem quadrabilem) *(2)* ah *L*

Atque ideo figura tangentium complementi inverse ducta in hyperbolicam, seu per prop. 31. cylinder secantium complementi, demto suo ductu in figuram tangentium semisupplementi, seu per prop. 13. 37. demto cylindro secantium complementi, addito quadrato radii in distantiam a vertice circuli, seu sagittam, aequatur quadrato radii in sagittam; rursus omnia eodem redeunt certissimo argumento veritatis.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: ADC et DEG. Ergo $\dfrac{AD}{ED} = \dfrac{DC}{DG} = \dfrac{AC}{EG}$.

P r o p. 40. $AD \frown DG = ED \frown DC$. secans complementi in differentiam inter tangentem complementi et sinum complementi, aequatur differentiae inter secantem complementi et radium in tangentem complementi, seu

$$gh - gf = hg - ha.$$

Ergo $gf = ha$. quod iam supra, prop. 28.

P r o p. 41. $AD \frown EG = ED \frown AC$. secans complementi in differentiam radii a sinu, aequatur radio in differentiam secantis complementi et radii. Seu $ga - gb = ag - a^2$. adde prop. 29.

P r o p. 42. $DC \frown EG = DG \frown AC$. tangens compl. in differentiam sinus a radio, aequatur radio in differentiam tangentis complementi a sinu complementi.

Cumque posterior terminus aequationis det summam quadrabilem, erit quadrabilis prior quoque. Ergo

C o r o l l. 1. D u c t u s tangentium complementi in differentias sinuum a radio q u a d r a r i potest.

C o r o l l. 2. Ergo d u c t u s tangentium complementi in sinus q u a d r a r i potest.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AHR et AEH. ergo $\dfrac{HR}{AH} = \dfrac{AR}{AE} = \dfrac{AH}{HE}$. Est autem

$ER = CD$. et $AR = AD$. et $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ $EAR =^{\text{le}}$ et simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ADC.

1 f. seu ... complementi *erg.* *L* 14 Seu | momentum radiorum, demto momento sinuum *gestr.* | ga *L* 22 f. potest. | Nam ductus tangentium complementi in differentias secantium complementi a radio qui quadrari potest, aequatur ductui tangentium complementi in secantes complementi, demto radio in tangentes complementi, qui radii ductus seu cylinder, etiam quadrari potest. Ergo et residuum seu ductus tangentium complementi in *(1)* secantes *(2)* sinus complementi. *gestr.* | *L*

24 f. Est ... $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ADC. *erg.* *L*

P r o p. 43. $HR \frown HE = AH\square$. seu secans est media proportionalis inter tangentem arcus dati, et tangentem arcus dati auctum tangente arcus complementi.

Atque ideo quadrata secantium aequantur quadratis tangentium, ductu tangentium in tangentes complementi auctos. Confer cum prop. 45.

At sup. prop. 11. ostensum est quadrata secantium, demto cylindro hyperbolico sub radio aequari quadratis tangentium, demto ductu tangentium in tangentes arcus dimidii, prop. 46. coroll. 2., seu demto cylindro hyperbolico addito quadrato radii in altitudinem. Ergo

C o r o l l. 1. quadrata secantium = quadratis tangentium quadrato radii in altitudinem, seu a vertice circuli abscissam, auctis.

Hoc ita posito patet tangentem arcus dati in tangentem arcus complementi, aequari quadrato radii, quod iam habuimus prop. 33.

P r o p. 44. $HR \frown AE = AH \frown AR$. compositum ex tangente et tangente arcus complementi in radium, aequatur secanti in secantem complementi.

Hoc facile conciliabis cum prop. 36. et 28.

$AR \frown HE = AE \frown AH$. habuimus, vide prop. 32.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: AHR et ADC. ergo $\dfrac{HR}{AD} = \dfrac{AR}{DC} = \dfrac{AH}{AC}$.

P r o p. 45. $HR \frown DC = AD \frown AR = AD\square$. tangens tangente complementi auctus in tangentem complementi, prop. 33. 37., aequatur quadrato secantis complementi. Seu secans complementi est media proportionalis inter tangentem complementi, et tangentem complementi, tangente auctum, confer cum prop. 43.

---

1 *Zu* media proportionalis: adde *Inass.* prop. 41.

19 *Zu* aequatur: quadrato radii in arcum, *I n a s s i g n a b.* p r o p. 19.

7 addito *(1)* cubo *(2)* quadrato *L* 12 f. prop. 33. | *Absatz:* $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: AER et AEH. ergo $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AH}} = \dfrac{\mathrm{ER} = \mathrm{CD}}{\mathrm{AE}} = \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{HE}}$. Triangulum AER aequale et simile $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ ADC. *Absatz:* P r o p. 44. $\mathrm{CD} \frown \mathrm{HE} = \mathrm{AE}\square$. sed hoc iam habuimus, prop. 33. et passim. *gestr.* | P r o p. 44. *L*

---

19 aequatur: Der Bezug der zugehörigen Anmerkung auf N. 27 enthält einen Irrtum.

Ergo quadrata secantium complementi, excedunt quadrata tangentium complementi, ductu tangentium complementi in tangentes.

C o r o l l. Ergo differentia inter quadratum tangentis et secantis, aequatur differentiae inter quadratum tangentis complementi, et quadratum secantis complementi. Eaque differentia est q u a d r a b i l i s per prop. 43. coroll. 1.

$HR \frown AC = AD \frown AH$. haec iam ex prop. 28. et 35.

$AR \frown AC = DC \frown AH$. habuimus prop. 31.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia HKE et EFG. $\dfrac{HE}{EF} = \dfrac{KE}{EG} = \dfrac{KH}{GF}$.

P r o p. 46. $HE \frown EG = KE \frown EF$. tangens in differentiam inter sinum et radium, aequatur tangenti arcus semicomplementi in sinum arcus dati $= AE \frown GF$, adde prop. 63.

Seu cylinder conchoeidalis sub radio, demto, prop. 14. 20. 27., ductu spatii conchoeidalis in circulare (qui demto cylindro hyperbolico quadrabilis est, p r o p. 20.) aequatur ductui tangentium semicomplementi in sinus seu portionem circularem.

Porro ductus secantium complementi (qui sunt $\dfrac{a^2}{b}$. posito a radio, b sinu) in tangentes semicomplementi (e) aequatur cylindro tangentium complementi, demto cylindro tangentium semicomplementi per prop. 38. et 12. Quod esto x^2a. erit $\dfrac{a^2e}{b} = x^2$.

3 *Zum Korollar am Rande.* NB.

2 f. tangentes. | At ductus tangentium comp. *gestr.* | C o r o l l. *L*

14 seu: Dieser Schluss ist unzulässig. 18 erit: Auch dieser Schluss ist unzulässig; dennoch bleibt das Folgende im Wesentlichen richtig.

Quaeramus rationem $\frac{a^2e}{b}$ ad $\frac{be}{1}$. ea erit $\frac{a^2}{b^2}$. ergo si ductus secantium complementi in tangentes semicomplementi sit ut a^2. ductus circularis erit ut b^2. Et vicissim

$$\text{ductus } \frac{\text{secant. compl. in tang. semicompl.}}{\text{sin. in tang. semicompl.}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ergo

$$\frac{\text{sin. in tang. semicompl.}}{b^2} = \frac{\text{secant. compl. } \frac{a^2}{b} \text{. in tang. semicompl.}}{a^2}.$$

atque ideo

$$\text{sin. in tang. semicompl.} = \frac{\text{secant. compl. in tang. semicompl.} \frown b^2}{a^2}.$$

Ergo

$$[\text{ductus}]\ \frac{\text{tang. complementi} - \text{tang. semicomplementi}}{a} \text{ in } b^2$$
$$= \text{cylind. conchoeid.} + \text{cyl. hyp.} - \text{aliquid quadrabile.}$$

C o r o l l. Dimensio d u c t u s c i r c u l a r i s i n f i g u r a m t a n g e n t i u m s e m i c o m p l e m e n t i supponit dimensionem conchoeidis et hyperbolae.

P r o p. 46. n u m. 2: $HE \frown GF = KH \frown EF$. tangens c in differentiam sinus complementi f et tangentis semicomplementi e, aequatur tangenti semicomplementi e in differentiam secantis d et sinus complementi f. Ergo $cf - ce = ed - ef$. ergo $\frac{cf}{e} - c = d - f$.

C o r o l l. 1. Ergo summa quartarum proportionalium, ad has tres, tangentem semicomplementi, tangentem, sinum complementi, aequatur spatio hyperbolico demto aliquo quadrabili.

C o r o l l. 2. Aliter $cf + ef = ed + ce$. Seu momenta tangentium ex basi (ex q. circ. 19.), addita momentis, prop. 26., tangentium semicomplementi (quadrab.),

---

1 *Unter* ad*:* ×

1 $\frac{a^2}{b^2}$. seu si ergo si *L ändert Hrsg.* 8 f. Ergo | cylinder *gestr., ändert Hrsg.* | *L*

aequantur, prop. 25., secantibus in tangentes semicomplementi, additis, prop. 43., tangentibus in tangentes semicomplementi. Prop. 25. supra.

P r o p. 47. $HF \frown EN = AC \ (= AE) \frown AE$ seu $AE\square$. sive momenta tangentium et tangentium semicomplementi simul ex basi quadrantis, aequantur quadratis radii. Ergo sunt q u a d r a b i l i a .

C o r o l l. 1. Hinc sequitur summam ex tangente et tangente dimidio complementi, aequari secanti, seu $HF = AH$. quia $AH = \dfrac{AE\square}{EN}$. et $HF = \dfrac{AE\square}{EN}$.

C o r o l l. 2. Hinc differentiae inter conchoeidem et hyperbolam, aequatur tangentibus semicomplementi, de quibus 35. *Inass.*

C o r o l l. 3. Item tangens arcus dimidii, auctus tangente complementi, aequalis secanti complementi. Item $HQ = HE$.

C o r o l l. 4. Momenta tangentium semicomplementi ex basi q u a d r a b i l i a , adde prop. 61.

C o r o l l. 5. Ergo iunct. p r o p. 25 *Duct.* hyperb. in tang. semicompl. q u a d r a b i l .

P r o p. 48. $AD \frown EF = DF \frown FQ$ $(FQ = AE)$ ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ADF. ergo secans (complementi) in tangentem arcus dimidii (complementi) aequalis radio in differentiam tangentis (compl.), et tangentis arcus dimidii (compl.).

C o r o l l. Hinc haberi possunt et tangentes arcus dimidii in tang. arcus dimid. compl. si a tang. arc. dimid. in sec. auferatur tang. arc. dimid. in tang. quia sec. = tang. + tang. compl. arc. dimid.

R e p e t i t i o p r o p. 1 4 :

$DE\square = DF \frown DG$. seu quadratum differentiae secantis et radii, est aequale dif-

---

6 Coroll. 1. ita brevius demonstres: in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AHF altitudo AE = altitudini FQ. ergo basis HF = basi AH.

12 *Über* q u a d r a b i l i a *:* male, ex q. circ.

14 *Zu* C o r o l l. 5.*:* Error

8 hyperbolam, | q u a d r a r i potest *gestr.* | aequatur *L* 16 | $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AEF et EST *gestr.* | P r o p. 48. *L*

ferentiae inter tangentem et tangentem arcus dimidii, ductae in differentiam inter tangentem et sinum.

Esto secans d. radius a. tangens c. tangens arcus dimidii i. sinus b. fiet:

$$\underbrace{d^2}_{\substack{\text{prop. 11.}\\ \cancel{c^2}+a^2}} + a^2 - \cancel{2}da = c - i, \frown c - b. = \cancel{c^2} + \underbrace{bi}_{\substack{\text{prop. 16.}\\ \cancel{a^2}-af}} - \underbrace{ci}_{\substack{\text{prop.13.}\\ -\cancel{da}+\cancel{a^2}}} - bc.$$

$$\cancel{2a^2}$$

$$da = bc + af.$$

Adde prop. 20. ubi idem a l i t e r demonstratum, insigni calculi confirmatione.

Redibimus ad $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia intermissa, de quibus ante prop. 46.

$$\frac{HE}{EF} = \frac{KE}{EG} = \frac{KH}{GF}.$$ habuimus $HE \frown EG = KE \frown EF$, restant:

P r o p. 49. $HE \frown GF = KH \frown EF$. tangens in differentiam tangentis semicomplementi et sinus complementi, aequatur differentiae secantis et sinus complementi in tangentem semicomplementi.

$$\underbrace{cf}_{\substack{\text{ex. q. circ.}\\ \text{duct. 19.} = ab}} - ce = \underbrace{de}_{\substack{\text{quadrabil.}\\ \text{Prop. 47. coroll. 4.}}} - \underbrace{fe.}_{\substack{\text{quadrabil.}\\ \text{Prop. 47. coroll. 3.}}}$$

C o r o l l. 1. Ergo ce. seu tangentes semicomplementi in tangentes, vel tangentes complementi in tangentes arcus dimidii pendent ex quadratura circuli, conchoeid. et hyp.

C o r o l l. 2. Cumque sit $c + e = d$. erit $d^2 = c^2 + \underbrace{e^2 + 2ce}_{a^2 \text{ per prop. 11.}}.$

Ideoque e^2 seu summa quadratorum tangentium semicomplementi, vel quadrata

17 *Zu de:* Error

4 − bc. | Iam $d^2 = c^2 + a^2$. p r o p. 11. *streicht Hrsg.* | *L* 22 ex *(1)* <u>da</u> seu cylindro hyperbolico, vel quadratura hyperbolae *(2)* quadratura *L*

tangentium arcus dimidii ad basin pendent ex quadratura circuli, conchoeid. et hyp.

P r o p. 50. $KE \frown GF = KH \frown EG$. seu sinus in differentiam sinus complementi, et tangentis semicomplementi, aequantur differentiae inter secantem et sinum complementi in differentiam sinus et radii.

$$\underset{\substack{/\backslash \\ \text{quadrab.}}}{\cancel{bf}} \quad - \quad \underset{\substack{/\backslash \\ \text{ex q. circ. et hyp.} \\ 46.}}{be} \quad = d - f \frown a - b = da + \cancel{fb} \quad - \quad \underset{\substack{/\backslash \\ \text{q. circ. et hyp.} \\ \text{vel q. conchoeid.}}}{db} \quad - \quad \underset{\substack{/\backslash \\ \text{quadrab.}}}{fa.}$$

P r o p. 51. $NI \frown EF = ZF(EG) \frown EN$. ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ENF in quo posita basi EN altitudo est ZF, posita basi EF altitudo est NI.

Investiganda iam quantitas ipsius NI. Patet NI parallelam AE. Ergo $\dfrac{NI}{AE\,\text{rad.}} = \dfrac{AR\,\text{sec. compl.} - AN\,\text{sinus}}{AR = AD\,\text{secans compl.}}$.

Literas ut ante substituamus: $\dfrac{NI}{a} = \dfrac{g-b}{g}$. seu $NI = \dfrac{ga - ba}{g}$. vel $a - \dfrac{ba}{g}$. Atqui $g = \dfrac{a^2}{b}$. Ergo $NI = a - \dfrac{ba}{\dfrac{a^2}{b}} = a - \dfrac{b^2 a}{a^2} = \underline{\underline{a - \dfrac{b^2}{a}}}$.

Ergo cylinder tangentium semicomplementi, demtis rectangulis ex tangentibus semicomplementi, et applicatis semiparabolae circularis axi parallelis, aequatur momentis ex basi differentiarum inter sinum et radium, utique quadrabilibus.

Nam posito sinu b. et radio a. erit $\dfrac{b^2}{a}$ applicata parabolae circularis axi parallela, quia sinus est media proportionalis inter applicatam axi parallelam semiparabolae circularis, et radium. Semiparabola autem circularis est, cuius altitudo et basis aequales, adde *Inassign.* 41.

Recta EI ex his facile haberi potest est enim $Rq\, f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. adde prop. *Inass.* 42. 43.

1 f. quadratura *(1)* hyperbolae *(2)* circuli | , conchoeid. et hyp. *erg.* | *L*

P r o p. 52. $AC \frown DF = AD \frown EF$. cylinder tangentium [seu] conchoeid. (complementi), demto cylindro tang. semiarcus seu conchoeid. fals. dimidiatae (complementi) = secans (compl.) in tang. semiarcus (compl.), seu tangens + tangens semiarcus in tang. semiarcus, seu tangens in tang. semiarcus + quadrat. tang. semiarcus.

C o r o l l. 1. Ergo quadrata tangentium semiarcus pendent ex quadratura conchoeidis et hyperbolae.

C o r o l l. 2. Cylinder tangentium complementi (quadrabilis) demto cylindro tangentium semicomplementi aequatur tangentibus complementi in tangentes semicomplementi (id est cylindro secantium complementi, demto cylindro radii) additis quadratis tangentium semicomplementi (quae pendent ex q. circ. prop. 49.).

P r o p. 53. $C\alpha = EN$. quia in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AEC. $AC \frown EN = AE(= AC) \frown C\alpha$.

P r o p. 54. $A\alpha = AN$. Nam $\bigtriangledown ENA$ simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ $A\alpha C$. quia ang. AEN = angulo $AC\alpha$. duo autem latera aequalia sunt $EN = C\alpha$. et $AC = AE$. ergo et tertia seu $A\alpha = AN$. ergo $E\alpha = NC$ vel EG.

P r o p. 55. $AM \frown EC = AC \frown EN$. Chorda arcus in sinum complementi arcus dimidii, aequatur cylindro portionis circularis sinuum arcus dati. Vel:
Chorda arcus complementi ad quadrantem (non ad semicirculum) in sinum arcus dati = cylindro sinuum complementi (q u a d r a b i l i).

P r o p. 56. $AD \frown C\alpha = AC \frown CD$. Momentum secantium complementi = cylindro tangentium complementi quadrabili, adde prop. 18.

---

11 *Zu* pendent: *Darüber:* Error
Dahinter: (imo ex q. circ. et dimens. cyl. tang. semicompl.)

1 seu *erg. Hrsg.* 17 portionis circularis *erg. L*

---

3 f. Anstelle von tangens + tangens semiarcus müsste es tangens + tangens semicomplementi heißen. Das Versehen wirkt sich bis zum Ende von Satz 52 aus. 17 Vel: Anstelle des Sinus des gegebenen Bogens hätte Leibniz den Kosinus des halben Komplementärbogens verwenden müssen.

Prop. 57. $EC \frown MF = EF \frown E\alpha$, vel $FC \frown EG$. Chorda arcus in differentiam secantis arcus dimidii a sinu complementi arcus dimidii = tangenti arcus dimidii in sinum versum arcus dati.

Prop. 60. $EF \frown EK = KQ \frown AE$. Tangens semiarcus in sinum complementi, seu momentum tangentium semiarcus = radio in differentiam sinus, et tang. semiarcus.

Coroll. Tangens semicomplementi in sinum = radio in sinus complementi, demto cylindro tang. semicompl.

At per prop. 46. iunct 20. cylinder conchoeid. − cyl. hyp. + rad. in sinus compl. = tang. [semicompl.] in sin. Ergo res eodem redit.

Prop. 61. $EF \frown EN = NC$ (vel EG) $\frown AE$. Momentum tang. [semicompl.] = radio in diff. rad. et sinus, adde prop. 47. coroll. 4. Hinc et tang. [semicompl.] in sinus quadrab.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: AKE et EZF. Nam ang. KAE = angulo EFZ.

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AK = EN}{ZF = EG} = \frac{KE}{EZ = GF}.$$

Prop. 62. $AE \frown EG = EN \frown EF$. momenta tangentium semicomplementi = cylindro trilinei concavi circularis, seu radii demto sinu.

Coroll. Tangentes arcus dimidii seu conchoeidis falsae dimidiatae applicatae, in sinus = radio in sinus versos arcus dati seu quadrabiles.

Prop. 63. $AE \frown GF = KE \frown EF$. cylinder radii in sinus complementi (quadrabilis) demto cylindro radii in tang. semicompl. (quadrab.) = ductui sinuum in tangentes semicomplementi.

Is ergo ductus quadrabilis. Hoc prorsus coincidit prop. 46.

Coroll. Hinc radius in sinus, demto radio in tang. fals. dimid. (cyl. segm. dupl.) = momento tang. fals. dimid. ex basi.

Prop. 64. $EN \frown GF = KE \frown EG$. seu quadrata sinuum complementi (portiones pyramidis a basi abscissae), demtis momentis tangentium semicomplementi (quae pendent ex q. circ.) = ductui sinuum in sinus versos arcuum complementi, seu in differentias suas a radio seu cylindro sinuum, demtis sinuum quadratis.

Coroll. vel sinus in seipsum (quadrab.), demto sinu in tang. arcus dimid. (qua-

4 *Zählung springt L* 10–12 compl. *L ändert Hrsg. dreimal*

drab.) = sinubus versis (seu differentiis sinuum complementi et radiorum) in sinus complementi, seu momento sinuum versorum.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia $C\alpha D$ et AEH. $\dfrac{CD}{AH} = \dfrac{\alpha D}{AE} = \dfrac{C\alpha = EN}{HE}$.

Prop. 65. $CD \frown AE = AH \frown [\alpha D]$. cylinder tangentium complementi (quadrabilium) = ductui secantium in secantes complementi (cyl. tang. compl. + cyl. tang.) demtis secantibus in sinus (cyl. conch.).

Prop. 66. $CD \frown HE = AH \frown EN$. seu tangentes in tangentes complementi = momento secantium ex basi, quadrabili, adde. 33. 43.

Prop. 67. $\alpha D \frown HE = EN \frown AE$. secantes complementi in tangentes, demtis sinubus in tangentes = quadrabiles, seu aequales sinubus complementi in radium, adde *Duct.* 20.

Porro per prop. 32. sec. compl. in tang. = rad. in sec. et per prop. 20. sin. in tang. = rad. in sec. − rad. in EN.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia $C\alpha D$ et AKE. $\dfrac{CD}{AE} = \dfrac{\alpha D}{AK = EN} = \dfrac{C\alpha = EN}{KE}$.

Prop. 68. $CD \frown EN = \alpha D \frown AE$. Momenta ex basi tangentium complementi = cylindro secantium complementi (dupl. sect.) − cyl. sin., adde prop. 73.

Prop. 69. $CD \frown KE = AE \frown EN$. Tangentes complementi in sinus (momenta ex basi sua, si basi quadr. applicentur), adde 42. 61., quadrabiles = quadrilinei cylindro.

Prop. 70. $\alpha D \frown KE = EN\,\square$. Sinus complementi est media proportionalis inter sinum et differentiam secantis complementi a sinu.

Sive secans compl. in sin., demtis quadratis sinuum = quadratis sinuum compl. Ergo $[\alpha D]\frown KE$ quadrabiles, adde *Duct.* 29.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: ACD et $C\alpha D$. $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DC}{D\alpha} = \dfrac{AC}{C\alpha = EN}$.

4 AD *L ändert Hrsg.* 5 ductui *(1)* tangentium complementi in secantes complementi | quadrabilis *erg.* |. Ergo *(2)* secantium *L* 22 AD *L ändert Hrsg.*

22 adde: Der Verweis bezieht sich auf die Verschreibung AD anstelle von αD.

P r o p. 71. $AD \frown D\alpha = DC\,\square$ (45.) quadrata secantium complementi, demtis secantibus complementi in sinus (quadrabilibus) = quadratis tang. compl., adde *Duct.* 11. 74.

P r o p. 72. $AD \frown EN = AC \frown DC$. seu momentum ex basi secantium complementi (quadrabile, *Inassign.* 43. coroll. 1. *Duct.* 28.) = cylindro tangentium compl., adde *Duct.* 18. 23. 50.

P r o p. 73. $DC \frown EN = \alpha D \frown AC$. $(AC = AE)$ habuimus prop. 68.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ s i m i l i a: $C\alpha D$ et EGD. $\dfrac{CD}{DE} = \dfrac{D\alpha}{DG} = \dfrac{C\alpha = EN}{EG}$.

P r o p. 74. $CD \frown DG = DE \frown D\alpha$. Tangens compl. in seipsum demto tang. compl. l moment. ex basi = differentiae secantis complementi g et radii a in differentiam secantis complementi et sinus b, seu $g - a, \frown g - b = g^2 + ab - ga - gb$. seu quadrata secantium complementi aucta cylindro sinuum, minutaque sec. compl. [et sec. compl.] in sin.

Iam $g^2 - gb = l^2$ (per prop. 71. si l = tang. compl.). ideo $l^2 + ab - ga = l^2 - lf$. Ergo $ga - ab = lf$. concordat 68.

P r o p. 75. $CD \frown EG = \overset{EN}{C\alpha} \frown DE$. $la - lb = gf - af$. Et quia per prop. 72. $la = gf$. ideo $lb = af$. tangens compl. in sinum = radio in sin. compl.

P r o p. 76. $D\alpha \frown EG = DG \frown EN$. secans compl. demto sinu, in radium demto sinu = tang. compl. in sin. compl., demto sin. compl. in sin. compl. $g - b \frown a - b$. seu

$$\cancel{ga} + b^2 - gb - \cancel{ba} = \underset{\cancel{ga} - \cancel{ab}}{\overset{lf}{/\backslash}} - f^2.$$ Ergo $gb - b^2 = f^2$.

13 et sec. compl. *erg. Hrsg.*

5 *Inassign.* 43.: Der Verweis bezieht sich auf die gestrichene Fassung des Satzes, s. N. 27 S. 479 Z. 32–36.

P r o p. 77. Ex f i g. 3. $HG \frown DS\ (= AC) = DH \frown D\lambda$. ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}\ HGD$.

id est: differentiae inter tangentem veram et falsam momentum ex vertice, aequatur differentiae inter secantem et radium, in tangentem semiarcus minutum differentia inter sinum et tangentem semiarcus, seu

$$c - 2i, \frown a - f = d - a, , \frown \underbrace{i -, b - i}_{2i - b}. \qquad \text{seu}$$

$$\cancel{ca} - \underset{\underset{\cancel{ab}}{/\backslash}}{cf} + \underset{\underset{\cancel{2ab} - \cancel{2ai}}{/\backslash}}{2if} - \cancel{2ia} = \underset{\underset{\cancel{2ca} - \cancel{2ai}}{/\backslash}}{2di} + \cancel{ab} - \underset{\underset{\cancel{ca}}{/\backslash}}{db} - \cancel{2ia}.$$

prop. 19. prop. 7. [prop. 12] [prop. 18.23.50.72. *Duct.*]

Manifestum est omnia exacte convenire.

In eadem fig. 3. $\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a , quanquam non orthogonia: HGD et DBZ. Nam ang. GDH = ang. BDZ. et ang. GHD = angulo DBZ. etc. Ergo

$$\frac{DB = \text{rad.}\,AB}{HD} = \frac{BZ = AI}{[GH]} = \frac{GD}{DZ}.$$

$AB \frown [GH] = AI \frown HD$. Radius in differentiam tangentis et tangentis falsae, = tangenti falsae dimidiae in differentiam secantis et radii.

5+7 seu *(1)* $ca + \underset{\underset{\cancel{ab}}{/\backslash}}{2if} - cf - \cancel{2ia} = \underset{\underset{|2, \cancel{ca} - ai\ \textit{gestr.}|}{/\backslash}}{2di} + \cancel{ab} - \underset{\underset{\cancel{ca}}{/\backslash}}{db} - \cancel{2ia}.$

prop. 7. Duct. prop. 12 | prop. 18.23.50.72. Duct | *nicht gestr.*

$$\underbrace{\cancel{ca} - cf}_{\cancel{ca} - ab} \qquad \cancel{2}ca - 2ai \qquad \cancel{ca} - 2ai$$

prop. 19. et 24. Duct.

Ergo cf = 2ia. |cf = ab. prop. 19. *nicht gestr.*| Ergo ab = 2ai, quod absurdum, error ergo in calculo. *(2)* ~~ca~~ *L* 11 prop. 12 *und* prop. 18.23.50.72. Duct. *erg. Hrsg.* 15 GN *L ändert Hrsg.* 16 GN *L ändert Hrsg.*

15 $\frac{GD}{DZ}$: Es müsste umgekehrt $\frac{DZ}{GD}$ heißen. Dies wirkt sich auf Prop. 78 aus, welche Leibniz konsequent mit dem falschen Ansatz durchrechnet.

$ac - 2ai =$ id $- ai.$ Patet ex calculo.

/\

$ac - ai.$ prop. 12.

P r o p. 78. $AB \frown DZ = GD \frown HD.$ seu applicata parabolae inversa (chorda suppl.) demto secante arcus dimidii, in radium (haec quadrabilia)

$=$ 2 sec. fals. $-$ chord. suppl. $\frown$ sec. $-$ rad.

$=$ 2 sec. fals. $\frown$ sec. $+$ chord. suppl.$\frown$ rad.

$-$ 2 sec. fals. $\frown$ rad. $-$ chord. suppl. $\frown$sec.

Et quia chord. suppl. $\frown$ rad., et 2 sec. fals.$\frown$ rad. q u a d r a b i l i a , ideo 2 sec. fals. $\frown$ sec. $-$ chord. suppl. $\frown$ sec., q u a d r a b i l e .

In fig. 2. ex puncto O. termino sinus complementi AO. ducatur in radium AB perpendicularis $O\omega$. manifestum est:

$$\frac{O\omega}{KE\,\text{sinus}} = \frac{AO\,\text{sin compl.} = AK}{AE\,\text{rad.}}.\ \text{Ergo}\ O\omega = \frac{\text{sin.} \frown \text{sin. compl.}}{\text{rad.}}.$$

P r o p. 79. $O\omega \frown AE = AO \frown KE.$ cylinder omnium $O\omega =$ momento sinuum, ideoque q u a d r a b i l i s est summa omnium $O\omega$.

P r o p. 80. Porro $\dfrac{O\omega}{BY = HE\,\text{tang.}} = \dfrac{AO = AK}{AY = AH\,\text{sec.}}.$ Ergo $O\omega \frown AH = HE \frown AK.$ seu ductus hyperbolicus in $O\omega =$ momento tangentium, pendet ergo ex q. circ.

27. TRIGONOMETRIA INASSIGNABILIUM
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 242–245. 2 Bog. 2°. 8 S. — Titel fehlt, Zwischentitel mit Bogenzählung: (II) Inassignabilia am Beginn des 2. Bogens (über S. 481 Z. 23). Figura secunda nicht vorhanden (Vorlage die entsprechende Figur aus N. 21).
Cc 2, Nr. 696

Datierungsgründe: s. N. 26.

[Trigonometria inassignabilium]

[*Teil 1*]

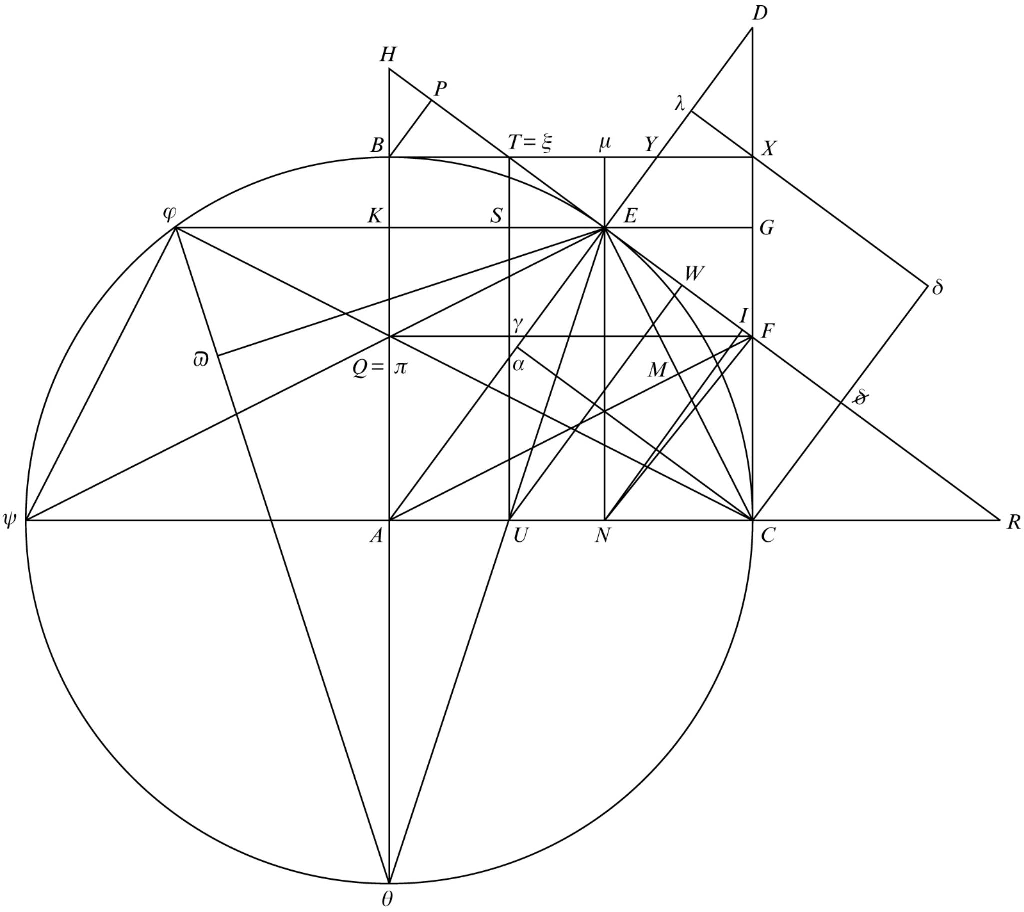
Fig. 2.

$\underline{ST}$ pars regulae, seu altitudinis, $\underline{ES}$ pars basis, $\underline{ET}$ pars arcus.
[Altitudinem autem voco latus orthogonii divisum in partes aequales infinitas, per ordinatim applicatas, basin latus alterum.
Porro quoties summam linearum nomino, eas altitudini ordinatim applicatas intelligi debet. Hinc sinus, tangentes, secantes etc. complementi in circulo sunt, qui scilicet sinus, tangentes etc. appellari deberent, si id quod nunc basis est, altitudo esset, seu cum non altitudini, sed basi applicantur.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: EST et AEH. Ergo $\dfrac{AH}{ET} = \dfrac{AE}{ES} = \dfrac{HE}{ST}$.]

Prop. 1. $AH \frown ES = AE \frown ET$. secans in portionem basis = radio in portionem arcus. Seu figura secantium basi applicatarum, aequatur superficei cylindricae sub arcu et radio, adde prop. 9.

9 Trigonometria inassignabilium *erg. Hrsg. nach N. 26 S. 448 Z. 19.* 11–19 Fig.2. | ST ... arcus. *erg.* | $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ ... $\dfrac{\mathrm{HE}}{\mathrm{ST}}$. *(1)* AH ⌢ ES = ET ⌢ AE. secans in portionem *(a)* altitudinis = tangenti in partem basis. *(b)* basis = radio in partem altitudinis. Ideo summa secantium complementi, scilicet in *(aa)* sagittam *(bb)* sinum arcus altitudini parallelum, seu altitudinem trilinei orthogonii aequatur radio in basin. *(2)* Altitudinem ... esset *(a)* . Habemus ergo iam quadraturam figurae secantium complementi. *(b)* , seu ... applicantur. *L, Reihenfolge ändert Hrsg.*



[*Fig. 1*]

1 *Figur erg. Hrsg. nach Text u. N. 21.*

Coroll. 1. Ergo summa secantium complementi, aequatur radio in arcum, seu superficiei cylindricae sub arcu et radio.

Coroll. 2. Ergo figura secantium basi applicatarum aequatur summae secantium complementi.

Prop. 2. $AH \frown ST = ET \frown HE$. secans in portionem altitudinis = tangenti in portionem arcus. Ideoque superficies cylindrica truncata tangentium arcui insistentium, aequatur spatio hyperbolico, adde prop. 11.

Prop. 3. $AE \frown ST = HE \frown ES$. rectangulum sub radio et basi aequatur summae tangentium complementi, prop. 23. Huius ergo figurae datur quadratura.

Coroll. 1. Vel rectangulum sub radio et altitudine, aequatur tangentibus basi applicatis.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et AKE. Ergo: $\dfrac{AE}{ET} = \dfrac{AK}{ES} = \dfrac{KE}{ST}$.

Prop. 4. $AE \frown ES = AK \frown ET$. rectangulum sub radio et basi (altitudine) = momento arcus ex radio basi (altitudini) parallelo.

Coroll. 1. Ergo momentum ex radio basi parallelo arcus aequale summae tangentium complementi.

Coroll. 2. Momentum arcus ex radio altitudini parallelo = summae tangentium ad basin.

Prop. 5. $AE \frown ST = KE \frown ET$. Radius in altitudinem = summae sinuum in arcum, seu momento arcus ex altitudine, seu superficiei cylindricae truncatae sinuum arcui impositorum, add. prop. 7. et prop. 3 coroll. 1.

Prop. 6. $AK \frown ST = KE \frown ES$. Momentum altitudinis ex basi aequatur momento basis ex altitudine, in trilineo orthogonio circulari, cuius altitudo pars radii, basis radio parallela.

Nihil autem hic refert, quod eius latus pro radio sumas quod pro basi[;] aliter enunties: sinus ad basin aequantur sinubus complementi ad altitudinem[,] adde

15 f. parallelo. *(1)* Coroll. 1. Hinc datur quadratura momenti omnis trilinei orthogonii circularis, tam ex altitudine quam ex basi. *(2)* Coroll. 1. *L*

8 Prop. 3.: Leibniz dualisiert die Formel zunächst; die direkte Umsetzung erfolgt im Korollar.

prop. 12. 36[a]. prop. 36[b]. coroll. 4.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et EKH. $\dfrac{HE}{ET} = \dfrac{KE}{ES} = \dfrac{HK}{ST}$.

P r o p. 7. $HE \frown ES = KE \frown ET$. figura tangentium basi applicatarum, aequatur momento arcus ex altitudine, adde prop. 3. coroll. 1. + prop. 5.

P r o p. 8. $HE \frown ST = HK \frown ET$. Summa tangentium (seu s p a t i u m c o n c h o e i d a l e , exemta quod postea semper intelligi volo portione circuli generantis) aequatur secantibus in arcum, demto momento arcus ex basi, adde prop. 14. et 24.

P r o p. 9. $KE \frown ST = HK \frown ES$. Summa sinuum, seu portio circularis, aequatur secantibus in basin, demtis sinubus complementi in basin.
At sinus complementi in basin aequantur toti figurae $ABEN$, vid. prop. 16., radio AB. arcu BE. sinu complementi EN. portione basis AN. comprehensae. Hinc iuncta p r o p. 1. duplex calculi fundamentum, alterum examini alterius.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et BPH. $\dfrac{HB}{ET} = \dfrac{BP = BK}{ES} = \dfrac{HP}{ST}$.

P r o p. 10. $HB \frown ES = BK \frown ET$. sinus versi BK in arcum (id est segmentum arcus duplum) aequantur secantibus in basin (id est, prop. 1., arcui in radium [=] sectori duplo) demto radio in sinum (quadrabili).

P r o p. 11. $HB \frown ST = HP \frown ET$. spatium hyperbolicum, demto rectangulo radii in altitudinem (quadrabili), aequatur tangenti in arcum (spatio ipsi hyperbolico p r o p. 2.) demto momento arcus ex basi (= rectangulo radii in altitudinem prop. 4.)

P r o p. 12. $BK \frown ST = HP \frown ES$. [summa sinuum versorum in altitudinem (quadrabilis)] aequatur tangentibus in basin (quadrabilibus prop. 7.) demtis sinubus in basin. Seu sinus compl. in altitud. = sinubus in basin, vid. prop. 43. et 45.
C o r o l l. Ergo habetur q u a d r a t u r a s u m m a e s i n u u m i n b a s i n , add. prop. 6. [21]. 23. 36[a,b].

15 BK | seu altitudines *gestr.* | in *L* 17 | = *erg. Hrsg.* | sectori duplo *erg. L* 17 radio in *(1)* basin *(2)* sinum *L* 22 f. HP ⌢ ES. *(1)* summa sinuum versorum (quadrabilis) demt *(2)* Radius in altitudinem demta summa sinuum versorum (quadrabili) *L ändert Hrsg.* 24 Seu . . . et 45. *erg. L* 26 prop. 6. 20. 23. 36. *L ändert Hrsg.*

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et FQH. Ergo $\dfrac{FH}{ET} = \dfrac{FQ}{ES} = \dfrac{HQ}{ST}$.

P r o p. 13. $FH \frown ES = FQ \frown ET$. Tangentes in basin, et tangentes semicomplementi in basin, adde prop. 27 = radio in arcum,

quod idem est ac si diceres,

C o r o l l. 1. summam tangentium arcus dimidii, addita summa tangentium complementi (quae quadrabilis est), aequari arcui in radium, seu sectori cuidam circulari.

C o r o l l. 2. Ergo s u m m a t a n g e n t i u m a r c u u m d i m i d i o r u m s e g m e n t o circulari duplicato comparari potest, adde prop. 15.

P r o p. 14. $FH \frown ST = HQ \frown ET$. spatium conchoeidale, addita summa tangentium semicomplementi, seu spatium hyperbolicum, aequatur secantibus in arcum (= prop. 8. spatio conchoeidali, addito momento arcus ex basi, adde prop. 24.) demtis tangentibus semicomplementi in arcum, seu aequatur tangentibus in arcum.

C o r o l l. Ergo summa tangentium semicomplementi, additis tangentibus semicomplementi in arcum, aequatur momento arcus ex basi, ac proinde q u a d r a r i possunt, adde prop. 28. et 42.

P r o p. 15. $FQ \frown ST = HQ \frown ES$. Radius in altitudinem = summae secantium in basin (= radio in arcum), demto tangente semicomplementi in basin, add. prop. 13. et 29.

TS producatur usque ad basin in U. et iungatur EU. et ex U. ducatur perpendicularis in TE productam si opus est, quae erit UW. Manifestum est in triangulo TEU. posita basi TU. altitudinem esse ES, et posita basi ET. altitudinem esse UW. Basin autem UE poni nil necesse est, cum UE non differat, nisi parte inassignabili a TU.

Porro UW autem sic investigabimus: cum $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AER et UWR sint similia erit

$$\frac{WU}{AE} = \frac{UR = AR - AU.\,(AU = KE\,\text{sinus})}{AR\,(= AD.\,\text{secans compl.})}.\ \text{ergo}\ WU = \frac{AD - KE, \frown AE}{AD}.$$

Surget aequatio haec, posita etiam $TU = KA = EN$. sinu complementi.

11 seu spatium hyperbolicum *erg. L* 19 (= radio in arcum) *erg. L*

17 adde prop. 28. et 42.: Leibniz bezieht sich auf die gestrichene Fassung der prop. 42.

$$\overset{(WU)}{\frac{AD - KE \frown AE}{AD}} \frown TE = ES \frown EN.$$

Iam sinus complementi in basin aequantur areae quadrilinei $ABEN$. vid. prop. 9. Et $AD - KE \frown AE, \frown TE = AD \frown ES \frown EN$. ergo

P r o p. 16. ductus figurae secantium in basin, in figuram ipsam $ABEN$. aequatur cylindro secantium in arcum demto cylindro sinuum in arcum (quadrabili). Radio posito altitudine cylindrorum.

Sed si AD ponatur esse non secans complementi, sed ipse secans, ES portio altitudinis, KE sinus complementi, EN sinus, utilior erit aequatio, quia dividi poterit per AD. Quia enim omnes AD, sunt $\frac{a^2}{1}\ \frac{a^2}{2}\ \frac{a^2}{3}$ etc. seu quadratum radii divisum per sinus complementi, ideo dividi per AD idem est quod dividi per quadratum radii, multiplicari per sinum complementi. Ergo pro AD substitue $\frac{AE\,\square}{KE}$. fiet aequatio talis:

$$\frac{\frac{AE\,\square}{KE} - KE, \frown AE}{\frac{AE\,\square}{KE}} \frown TE = EN \frown ES. \text{ seu } \overset{(WU)}{\frac{AE\,\square - KE\,\square}{AE}} \frown TE = EN \frown ES.$$

Hanc aequationem dupliciter interpretari potes, ut dixi, vel enim KE est sinus, EN sinus complementi, vel contra. Alterutro modo, haec inde ducetur enuntiatio:

P r o p. 17. superficies cylindrica sub arcu et radio, seu duplex sector arcus, demtis quadratis sinuum (sinuum complementi) ad arcum, per radium divisis, aequatur sinubus complementi (sinubus) in basin (altitudinem) id est areae figurae arcu, basi (altitudine), radio et sinu complementi (sinu) minimo (radius enim maximus est, vel etiam si usque ad maximum seu radium non pertingatur, duabus maximis), comprehenso.

Hinc quadrata sinuum, item sinuum complementi ad arcum, necesse est non esse q u a d r a b i l i a pure, adde prop. 22.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EST et ADC. $\frac{AD}{ET} = \frac{DC}{ES} = \frac{AC}{ST}$.

16 seu duplex sector arcus *erg. L* 22 non *erg. L*

Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 4

P r o p. 18. $AD \frown ES = DC \frown ET$. secantes complementi in basin id est s p a t i u m h y p e r b o l i c u m (adde prop. 21), aequantur tangentibus complementi in arcum.

P r o p. 19. $AD \frown ST = AC \frown ET$. summa secantium complementi aequatur radio in arcum, adde prop. 26.

P r o p. 20. $DC \frown ST = AC \frown ES$. summa tangentium complementi aequatur radio in sinum, adde prop. 25.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et UWR. Ergo $\dfrac{UR}{ET} = \dfrac{WR}{ES} = \dfrac{UW}{ST}$.

Iam (UW) est $\dfrac{AE\square - KE\square}{AE}$. WR autem sic inveniemus $\dfrac{WR}{UR} = \dfrac{AE}{AH}$. Ergo $(WR) = \dfrac{AE \frown UR}{AH}$. At (UR) est $AD - KE$. AH est $\dfrac{AE\square}{EN}$. ergo $WR = \dfrac{AE \frown UR \frown EN}{AE\square}$. seu $\dfrac{UR \frown EN}{AE}$. UR seu $NR = AD - KE$.

P r o p. 21. $UR \frown ES = WR \frown ET$. seu secantes complementi in basin (tangentes complementi in arcum, prop. 18.) spatium hyperbolicum demtis sinubus in basin (quadrabilibus, prop. 12.), aequantur, rectangulis secantium (spatio hyperbolico) complementi in sinus complementi, ad arcum, divisis per radium, demtis, rectangulis sinuum in sinus complementi, in arcum. adde prop. 36[b]; divisis per radium.

P r o p. 22. $UR \frown ST = UW \frown ET$. summa secantium complementi (sector duplicatus ABE), demta summa sinuum (seu portioni circulari KBE) aequatur UW in arcum, vel sectori duplicato, demtis $\dfrac{KE\square}{AE}$ in arcum.

C o r o l l. Ergo $\dfrac{KE\square}{AE}$ in arcum seu quadrata sinuum per radium divisa, in arcum, aequantur s u m m a e s i n u u m , seu portioni circulari, adde prop. 17. et 36[a].

23.

1 f. id est s p a t i u m h y p e r b o l i c u m *erg. L* 13+14 spatium hyperbolicum *und* (spatio hyperbolico) *erg. L* 15 radium | (quadrabilibus) *gestr.* |, demtis *L* 19 sinuum *(1)* (residuum q u a d r a b i l e esse necesse est) *(2)* (seu *L*

P r o p. 23. $WR \frown ST = UW \frown ES$. seu momentum secantium complementi ex radio basi parallelo, demto momento (quadrabili) sinuum complementi, ex eodem radio, aequatur summae UW in basin, seu radio in basin, demtis sinubus in basin, per radium divisis.

At sinus in basin sunt quadrabiles prop. 12., adde prop. 32. 36[a]. Ideo

C o r o l l. 1. ergo m o m e n t u m s e c a n t i u m c o m p l e m e n t i ex radio, basi parallelo, q u a d r a r i potest.

C o r o l l. 2. Ergo habetur cylinder aequalis conoeidi secantium complementi.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EST et ENR. $\dfrac{ER}{ET} = \dfrac{NR}{ES} = \dfrac{EN}{ST}$.

P r o p. 24. $ER \frown ES = NR \frown ET$. tangentes complementi in basin (spatium conchoeidale), aequantur secantibus complementi in arcum demtis sinubus in arcum seu momento arcus ex [radio altitudini parallelo] (quadrabili).

Conf. prop. 8. et 14. ubi dicitur: secantes in arcum aequari spatio conchoeidali addito momento arcus ex radio basi parallelo.

C o r o l l. Ergo differentia inter secantes in arcum, et secantes complementi in arcum, seu differentia inter secantem et secantem complementi in arcum q u a d r a r i potest.

P r o p. 25. $ER \frown ST = EN \frown ET$. summa tangentium complementi aequatur momento arcus ex radio basi parallelo, quadrabilis ergo, adde prop. 20. et alias passim.

P r o p. 26. $NR \frown ST = EN \frown ES$. summa secantium complementi, demta summa sinuum, aequatur sinubus complementi in basin, seu duplex sector arcus (prop. 19.),

---

6 f. *Zu* Coroll. 1: adde prop. 28. *De ductibus*.

8 complementi. | Coroll. 3. Ergo sinus *streicht Hrsg.* | *L* 11 f. arcum *(1)* (quadrabilibus) *(2)* seu momento arcus ex | altitudine, radio *ändert Hrsg.* | (quadrabili) *L* 16 seu ... arcum *erg. L*

---

1 P r o p. 23.: In der Ausformulierung des Satzes müsste es statt momento sinuum complementi und demtis sinubus vielmehr momento sinuum und demtis quadratis sinuum heißen. — Die Aussagen bezüglich der Quadrierbarkeit bleiben davon unberührt. 15 C o r o l l.: Diese Aussage ist unzutreffend.

demta summa sinuum; aequatur quadrilineo arcu, basi, radio et sinu complementi comprehenso.

Quod facile comprobatu, calculi nostri confirmatio est.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia EST et DEF. $\dfrac{DF}{ET} = \dfrac{DE}{ES} = \dfrac{EF}{ST}$.

P r o p. 27. $DF \frown ES = DE \frown ET$. Tangentes complementi in basin (spatium conchoeidale), demtis tangentibus semicomplementi in basin (id est per prop. 13. duplex sector, demtis tangentibus in basin, p r o p. 7., quadrabilibus, adde prop. 33.) aequantur secantibus complementi in arcum (prop. 24. spatio conchoeidali addito momento arcus ex radio [altitudini parallelo]) demto radio in arcum (seu duplici sectore).

Manifesta horum omnium aequatio est, documentum calculi veri.

P r o p. 28. $DF \frown ST = EF \frown ET$. summa tangentium complementi (quadrabilis) demta summa tangentium semicomplimenti aequatur tangentibus semicomplementi in arcum, adde prop. 14. et 34. 42.

P r o p. 29. $DE \frown ST = EF \frown ES$. summa secantium complementi (duplex sector), demto radio in altitudinem, aequatur tangentibus semicomplementi in basin, adde prop. 15. adde prop. 31.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: EST et DEG. $\dfrac{DE}{ET} = \dfrac{DG}{ES} = \dfrac{EG}{ST}$.

P r o p. 30. $DE \frown ES = DG \frown ET$. secantes complementi in basin (spatium hyperbolicum, intellige scilicet i n v e r s u m , id enim semper intelligendum est, ita tangentes complementi in basin sunt spatium conchoeidale inversum, sinus complementi in basin sunt spatium circulare inversum) demto radio in sinum, ae-

---

20 *Über* inversum: NB.

9 radio *(1)* basi parallelo *(2)* altitudine *L ändert Hrsg.* 15 complementi *(1)* quadrabilis, demta summa sinuum *(2)* (duplex sector) *L*

---

14 adde prop. 14. et 34. 42.: Leibniz bezieht sich auf die gestrichene Version der prop. 42.

quantur tangentibus complementi ad arcum demtis sinubus complementi in arcum seu momento arcus ex radio basi parallelo.

Sed cum per prop. 18. aequentur secantes complementi in basin et tangentes complementi in arcum, rursusque radius in sinum, et momentum arcus ex radio basi parallelo, prop. 4. Hinc rursus calculi veritas comprobatur.

P r o p. 31. $DE \frown ST = EG \frown ET$. summa secantium complementi (duplex sector) demto radio in altitudinem aequatur radio in arcum, demtis sinubus ad arcum, seu aequatur segmento arcus complementi duplicato.

Rursus comprobatio eorum, quae prop. 29.

P r o p. 32. $DG \frown ST = EG \frown ES$. summa tangentium complementi demta summa sinuum complementi, aequatur radio in sinum, demtis sinubus ad basin.

Hinc confirmatur quadratura sinuum ad basin, de qua prop. 12. et 23.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et EGF. $\dfrac{EF}{ET} = \dfrac{EG}{ES} = \dfrac{FG}{ST}$.

P r o p. 33. $EF \frown ES = EG \frown ET$. Figura tangentium semicomplementi ad basin (seu portio conchoeidis contractae dimidiatae, seu figurae tangentium arcus dimidii, inversa) aequatur radio in arcum, demto momento arcus ex altitudine seu radio in altitudinem seu sinum ⟨versum⟩, adde prop. 13. 27. 35.

P r o p. 34. $EF \frown ST = FG \frown ET$. summa tangentium semicomplementi (seu figura inversa tangentium arcus dimidii) ad basin, aequatur momento arcus ex radio basi parallelo (seu momento arcus ex altitudine), demta figura tangentium semicomplementi (figura inversa tangentium arcus dimidii) ad arcum.

At per prop. 28. tangentes semicomplementi in arcum, aequantur summae tangentium complementi (quadrabili) demta summa tangentium semicomplementi. Ergo summa tangentium semicomplementi, aequatur momento arcus ex radio

14 (Segmentum quoddam circulare, vid. prop. 27.)

6 f. (duplex sector) *(1)* demta summa sinuum | complementi *gestr.* | (portione circulari) *(2)* demto *L* 8 seu . . . duplicato. *erg. L* 16 f. arcum, *(1)* demtis sinubus in arcum *(2)* demto momento arcus ex *(a)* radio basi parallelo *(b)* altitudine seu radio in altitudinem seu sinum | versum *Papierverlust erg. Hrsg.* |, adde *L* 20 (seu . . . altitudine) *erg. L*

basi parallelo addita summa tangentium semicomplementi, demta summa tangentium complementi.

Ergo momentum arcus ex radio basi parallelo, aequatur summae tangentium complementi, quod iam toties habuimus.

P r o p. 35. $EG \frown ST = FG \frown ES$. radius in altitudinem, demta summa sinuum, seu quadrilineum circulare concavum $BXGE$, aequatur sinubus complementi ad basin, id est quadrilineo supra dicto $ABEN$. demtis tangentibus semicomplementi ad basin.

Iam vero figura tangentium semicomplementi ad basin per prop. 33. aequatur duplo sectori ABE, demto radio in altitudinem. Ergo [quadrilineum] circulare concavum $BXGE$, aequatur quadrilineo $ABEN$, demto duplici sectore ABE, addito [rectangulo $BKXG$]. Seu mixtilineum $BXGE = \bigtriangledown^{\text{lo}}\, AKE$, demto sectore ABE, addito rectangulo $BKXG$. Cumque sector constet ex portione circulari BKE et triangulo AKE. fiet mixtilineum $BXGE = \bigtriangledown^{\text{lo}}\, AKE - \bigtriangledown AKE -$ portio circular. BKE + rectang. $BKXG$. Ergo mixtilineum $BXGE$ + portio circularis BKE = rectang. $BKXG$. Quod cum per se pateat, apparet calculum recte positum fuisse.

NIE

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EST et (TUW). sed pro hoc triangulo, substituendum est istud NIE. ita ut N sit loco U. I loco W. Sic ergo:

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EST et NIR. $NR = AD - KE$. et $AD = \dfrac{AE\,\square}{KE}$. et $IE = ER - IR$.

6 seu *(1)* trilineum circulare concavum BXE *(2)* quadrilineum *L* 10–12 sectori ABE, *(1)* demta portione circulari | KBE. id est sectori ABE *(a)* – *(b)* + $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AKE *gestr.* |. Ergo trilineum circulare concavum BXE, aequatur quadrilineo ABEN, demto sectore ABE, *(aa)* addito *(bb)* demto $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AKE. ad *(!)* his ablatis a quadrilineo residuum erit nihil. Errorem ergo hoc loco in calculo esse necesse est. *(2)* demto radio in sinum. Ergo trilineum circulare concavum BXGE, aequatur quadrilineo ABEN, demto duplici sectore ABE, addito radio in sinum seu rectangulo BAN. Iam si quadrilineum abiciatur, restabit ex duplici sectore nil nisi portio circularis KBE. Ergo haec prodibit aequatio: BXGE = rectang. BAN – KBE. Ergo rectang. BXGK = rectang. BAN. Sed hoc absurdum, nondum ergo sublatus omnis error. *(3)* demto radio in altitudinem. Ergo | trilineum *ändert Hrsg.* | circulare ... addito | seu rectangulo BAN *ändert Hrsg.* |. Seu *L*

19–476,3 Leibniz verwendet die Benennung Y. Diese ist aufgrund der später erfolgten Umbenennung (vgl. unten prop. 41) vom Hrsg. in I abgeändert worden.

et $IR = WR = \dfrac{NR \frown EN}{AE}$. et $NI = UW = AE - \dfrac{KE\square}{AE}$.

Iam haec laterum comparatio erit:

$$\frac{EN}{ET} = \frac{NI = AE - \dfrac{KE\square}{AE}}{ES} = \frac{EI = ER - \dfrac{NR \frown EN}{AE}}{ST}.$$

P r o p. 36[a]. $EN \frown ES = AE \frown ET,, - \dfrac{KE\square}{AE}, \frown ET.$ sinus complementi ad basin (quadrilineum $ABEN$) = radio in arcum (duplici sectori ABE), demtis sinubus quadratis ad arcum per radium divisis.

Atqui sector duplex est quadrilineum $ABEN$ portione circulari KBE auctum. Ergo sinuum quadrata ad arcum aequantur, portioni circulari KBE. quod iam ostensum, prop. 22.

P r o p. 36[b]. $EN \frown ST = ER \frown ET - NR\,(AD - KE) \frown \dfrac{EN}{AE} \frown ET =$

$$ER \frown ET + \frac{KE \frown EN}{AE} \frown ET - \frac{AD - EN}{AE} \frown ET. \text{ sive:}$$

Summa sinuum complementi (quadrabilis), aequatur tangentibus complementi in arcum (spatio hyperbolico) additis sinubus in sinus complementi ad arcum per radium divisis (vid. sup. prop. 21.), demtis secantibus complementi in sinus complementi per radium divisis, ad arcum.

Iam secantes complementi in sinus complementi, aequantur tangentibus complementi in radium, vid. *D e d u c t i b u s p r o p.* 28. Ergo secantes complementi in sinus complementi, per radium divisi, ad arcum, aequantur tangentibus complementi in radium ductis, per radium divisis, ad arcum.

C o r o l l. 1. Ergo tangentes complementi ad arcum, spatium hyperbolicum, aequantur secantibus complementi in sinus complementi per radium divisis ad arcum.

C o r o l l. 2. Ergo summa sinuum complementi (quadrabilis) = sinubus in sinus complementi ad arcum per radium divisis, seu ductui figurae sinuum, in figuram sinuum complementorum, inverso.

C o r o l l. 3. sinus in sinus complementi in arcum per radium divisi, aequantur sinubus in basin (adde prop. 21.).

4+10 P r o p. 36. *Zählung doppelt, L ändert Hrsg.* 20 spatium hyperbolicum *erg. L*

Coroll. 4. summa sinuum complementi aequatur sinubus ad basin.

Prop. 37. $AE \frown ST - \dfrac{KE\square}{AE} \frown ST = ER \frown ES \;\; (= CD \frown ES) - \dfrac{NR \frown EN}{AE} \frown ES.$

Iam pro $NR = AD - KE$. pro AD $\dfrac{AE\square}{KE}$ fiet:

$CD \frown ES - \dfrac{\dfrac{AE\cancel{\square} \frown EN}{KE} \frown ES}{\cancel{AE}} + \dfrac{KE \frown EN}{AE} \frown ES$. Iam per prop. 36[b] hic et prop. 28. *De ductibus*, $\dfrac{AD \frown EN}{AE} \;\left(= \dfrac{\dfrac{AE\square \frown EN}{KE}}{AE}\right) = \dfrac{DC \frown AE}{AE}.$

ergo (Coroll. 1) $\dfrac{AE \frown EN}{KE} = DC.$

(quemadmodum [Coroll. 2.] $\dfrac{AE \frown KE}{EN} = HE.$)

Hinc propositio tandem eiusmodi oritur:

Radius in altitudinem, demtis quadratis sinuum per radium divisis (quae omnia quadrabilia sunt) = tangentibus complementi in basin (spatio hyperbolico inverso), demtis tangentibus complementi in basin (quae se destruunt), additis sinubus in sinus complementi per radium divisis ad basin.

Ergo

Coroll. 3. Radius in altitudinem demtis quadratis sinuum per radium divisis, aequatur sinubus in sinus complementi per radium divisis ad basin. Haec ergo quadrabilia.

$\triangledown^{\text{la}}$ similia YXD et TSE. quia $\vee DYX = \vee BYA$. Ergo YDX ang. $= BAE$ ang. Ergo $\triangledown^{\text{la}}$ AEH et YXD ergo et TSE et YXD similia, quia $\vee SET = \vee BAE$. ergo $= \vee^{\text{lo}}\, YDX$. Ideo $\dfrac{DY}{ET} = \dfrac{DX}{ES} = \dfrac{YX}{ST}$.

DY est differentia inter secantem arcus complementi, et dati; YX est differentia inter tangentem et radium; DX est differentia inter tangentem complementi et radium.

---

2 *Über* $AE \frown ST$: adde prop. 6.

7 *Eckige Klammern L*

P r o p. 38. $DY \frown ES = DX \frown ET$. secantes complementi in basin, demtis secantibus in basin (spatium hyperbolicum demto circulari) aequantur tangentibus complementi in arcum (spat. hyp.), demto radio in arcum (spat. circ.), vid. 2. hic et 18.

P r o p. 39. $DY \frown ST = YX \frown ET$. res eodem redit cum prop. praeced.

P r o p. 40. $DX \frown ST = YX \frown ES$. Tangentes complementi demto radio in altitudinem = tangentibus demto radio in basin.

7–479,1 basin.

| $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EDG et EST. $\dfrac{\text{DE}}{\text{ET}} = \dfrac{\text{DG}}{\text{ES}} = \dfrac{\text{EG}}{\text{ST}}$. *gestr.* |

| $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EFN et EST. quia angulus ENF (vel HAE) = ang. SET. $\dfrac{\text{EN}}{\text{ET}} = \dfrac{\text{FN}}{\text{ES}} = \dfrac{\text{EF}}{\text{ST}}$.

(1) | Porro FN sunt ad radium ut differentiae secantium complementi et sinuum, ad secantes complementi. Si radius a. secans complementi g. sinus b. erit $\dfrac{\text{FN}}{\text{a}} = \dfrac{\text{g} - \text{b}}{\text{g}}$. seu $\text{FN} = \dfrac{\text{g} - \text{b}}{\text{g}} \frown \text{a}$. at $\dfrac{\text{g} - \text{b}}{\text{g}} = \dfrac{\text{a}^2}{\text{b}^2} - 1$. Ergo $\text{FN} = \dfrac{\text{a}^3}{\text{b}^2} - \text{a}$. et FN $\frown$ a. seu cylinder $\text{FN} = \dfrac{\text{a}^4}{\text{b}^2} - \text{a}^2$. aequalis quadratis segmentorum complementi demtis quadratis radii. *erg.* |

P r o p. 41. EN $\frown$ ES = FN $\frown$ ET. sinus complementi in basin (quadrilineum) = FN. in arcum. Ergo

C o r o l l. 1. Cylinder quadrilinei, aequatur quadratis secantium complementi in arcum | quadrato radii in arcum minutis *erg.* |.

Atqui per Duct. prop. 43. secans complementi est media proportionalis inter tangentem complementi arcus dati, et compositam ex tangente arcus dati, et arcus complementi. Ergo

C o r o l l. 2. quadrata tangentium complementi in arcum, aucta rectangulis ex tangentibus et tangentibus complementi in arcum, aequantur cylindro quadrilinei sub radio quadratis radii in arcum, seu cylindro sectoris duplicis aucto.

(2) Porro FN sunt ad radium ut differentiae complementi et sinuum, ad secantes complementi. Si radius a. secans complementi g. sinus b. erit $\dfrac{\text{FN}}{\text{a}} = \dfrac{\text{g} - \text{b}}{\text{g}}$. seu $\text{FN} = \dfrac{\text{g} - \text{b}}{\text{g}} \frown \text{a}$.

„ Dixi FN inquam $= \dfrac{\text{ag} - \text{ba}}{\text{g}}$. vel $\text{a} - \dfrac{\text{ba}}{\text{g}}$. Sed $\text{g} = \dfrac{\text{a}^2}{\text{b}}$.

„ Ergo $\dfrac{\text{ba}}{\text{g}} = \dfrac{\text{ba}}{\dfrac{\text{a}^2}{\text{b}}} = \dfrac{\text{b}^2\text{a}}{\text{a}^2} = \dfrac{\text{b}^2}{\text{a}}$. Ergo $\text{FN} = \text{a} - \dfrac{\text{b}^2}{\text{a}}$.

P r o p. 41. EN $\frown$ ES = FN $\frown$ ET. Sinus complementi, in basin (quadrilineum) = FN. in arcum, seu radio in arcum, demtis quadratis sinuum per radium divisis, in arcum.

Constat autem aliunde quadrata sinuum cylindro cuidam circulari sub radio aequari. Haec ergo concordant. Sed si alibi non extarent hic demonstrarentur. Nam si quadrilineum ABEN detrahatur a duplici sectore ABE, restat portio circularis KEB. quae proinde quadratis sinuum per radi-

P r o p. 41. Summa omnium IN quadrari potest.

Nam IN est radius demta applicata parabolae axi parallela, p e r *D u c t.* p r o p. 5 1. Est ergo summa omnium IN radius in altitudinem BK. demta portione semiparabolae per axi parallelam abscissae, cuius altitudo BK. id est, summa omnium NI, dabit trilineum parabolicum.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ IEN et EST similia sunt. Ang. $SET =$ angulo ENI. Ideo $\dfrac{EN}{ET} = \dfrac{IN}{ES} = \dfrac{EI}{ST}$.

um divisis aequalis, atque ideo

C o r o l l. cylinder portionis circularis sub radio aequalis quadratis sinuum, adde supra 17. 22. 23.

P r o p. 42. EN ⌢ ST = EF ⌢ ET. Sinus complementi in altitudinem, seu summa sinuum complementi = tangentibus semicomplementi in arcum.

C o r o l l. 1. Ergo tangentes semicomplementi in arcum, sunt quadrabiles.

C o r o l l. 2. Ergo quia per prop. 14. et 28. 34. tangentes semicomplementi in arcum, iunctis tangentibus semicomplementi in altitudinem, seu iuncta eorum summa sunt quadrabiles. Ideo summa tangentium semicomplementi quadrabilis.

Inter omnia figurarum circularium elementa, nulla sunt tangentibus semicomplementi, et per consequens tangentibus arcus dimidii feliciora, quae in arcum, altitudinem, basin habentur. Nisi quod tang. semicompl. in basin, et tang. arcus dimid. in alt. habentur. Sed supposita quadratura.

C o r o l l. 3. Figura tang. arc. dimid. in arcum quadrabilis, est enim non nisi figura inversa tangentium arcus semicomplementi in arcum.

C o r o l l. 4. Figura tangentium arcus dimidii in basin quadrabilis, est enim inversa tangentium arcus semicomplementi in altitudinem.

C o r o l l. 5. Quadratura figurae tangentium seu conchoeidis ex data quadratura hyperbolae, seu quadratura differentiae inter conchoeidem et hyperbolen. Nam per D u c t. p r o p. 47. coroll. 1. differentia inter secantem et tangentem (applicata hyperbolae et conchoeidis), aequatur tangenti semicomplementi.

C o r o l l. 5. *(!)* Cum figura tang. semicompl. ad arc. + sum. tang. semicompl. = prop. 14. mom. arcus ex basi = prop. 4. rad. in basin, seu sinum. Ergo summa tangentium semicompl. seu diff. hyp. et conch. est radius in basin, demtis sinubus complementi in altitudinem.

| C o r o l l. 6. Differentia inter *erg., bricht ab* |

P r o p. 43. FN ⌢ ST = EF ⌢ ES. Summa omnium FN = tangentibus semicomplementi in basin. At tangentes semicomplementi in basin aequantur tangentibus arcus dimidii (inversis) in altitudinem seu conchoeidi falsae dimidiatae. Et conchoeis falsa dimidiata aequatur portioni inversae seu a basi abscissae. Ergo

C o r o l l. 1. Portio quaelibet conchoeidis falsae *gestr.* |

P r o p. 41 *L*

P r o p. 42. $EN \frown ES = IN \frown ET$. sinus complementi ad basin, seu quadrilineum $ABEN$ = applicatis trilinei parabolici ad arcum, adde prop. 46.

C o r o l l. Ergo trilineum parabolicum ad arcum, pendet a quadratura circuli.

P r o p. 43. $EN \frown ST = EI \frown ET$. sinus complementi ad altitudinem, aequantur ipsis EI ad arcum.

Ergo EI ad arcum q u a d r a b i l i a sunt. Qualis autem sit recta EI, vid. *Duct.* 51., vid. prop. 45.

P r o p. 44. $IN \frown ST = EI \frown ES$. seu EI ad basin, aequantur applicatis trilinei parabolici ad altitudinem, seu quadrabiles sunt.

His ita positis istud EI accuratius determinemus. Nimirum EI est ad tangentem, ut NI ad radium vel ut EN ad secantem: Ideo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{f}{d}$. Iam $d = \dfrac{a^2}{f}$. Ergo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{f}{\dfrac{a^2}{f}} = \dfrac{f^2}{a^2}$. Ergo $EI = \dfrac{f^2 \frown c}{a^2} = Rq\, f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. Ergo $EI \square =$ $\dfrac{f^4 \frown c^2}{a^4} = f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. Ergo $f^4c^2 = f^2a^4 - a^6 - b^4a^2 + 2b^2a^4$.

Item $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{NI}{a}$. Iam: $NI = a - \dfrac{b^2}{a}$. Ergo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{a - \dfrac{b^2}{a}}{a} = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$. Ergo $EI =$ $c - \dfrac{b^2c}{a^2}$. Ergo $\dfrac{f^2c}{a^2} = \dfrac{a^2c - b^2c}{a^2}$. Ergo $f^2c = a^2c - b^2c$. Ergo $f^2 = a^2 - b^2$. quod verissimum, notaque calculi recte positi.

$\bigtriangledown$la NIR et EST similia sunt et ang. NRI = angulo SET. ideo: $\dfrac{NR}{ET} = \dfrac{IR}{ES} = \dfrac{NI}{ST}$. IR est tangens compl. $-EI$. NR est secans compl. demto sinu.

P r o p. 45. $NR \frown ES = IR \frown ET$. secantes complementi ad basin (spatium hyperbolicum inversum), demtis sinubus ad basin (quadrabilibus) = tangentibus

11 Ideo *(1)* $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c} = \text{tang.}} = \dfrac{\mathrm{d} = \text{sec.}}{\mathrm{f}\,\text{sin. compl.}}$. Iam $\mathrm{d} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}}$. Ergo $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c}} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}^2}$. Coroll.: Ergo $\mathrm{EI} \frown \mathrm{f} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}} \frown \mathrm{c}$. seu momenta omnium EI ex basi = se *(2)* $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c}}$ *L*

11 Ideo: im Folgenden verwendet Leibniz die Bezeichnungen von N. 26.

complementi ad arcum (spatio hyperbolico inverso), demtis EI ad arcum. Ergo Coroll. EI ad arcum = sinubus ad basin, seu sinubus compl. ad altit. prop. 43. et 12.

Prop. 46. $NR \frown ST = NI \frown ET$. Ergo summa secantium complementi (sect. circ. duplex), demta summa sinuum, seu quadrilineum $= NI \frown ET$. concordat prop. 42.

Prop. 47. $IR \frown ST = NI \frown ES$. Summa tangentium complementi (quadrabilis) demta summa ipsorum EI. seu summa horum: $\frac{b^2c}{a^2}$ aequatur, applicatis trilinei parabolici circularis axi parallelis, ad basin.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia $C\alpha D$ et EST. $\frac{DC}{ET} = \frac{D\alpha}{ES} = \frac{C\alpha}{ST}$.

Prop. 48. $DC \frown ES = D\alpha \frown ET$. Tang. complementi ad basin (spat. conchoeid. inversum) = secantibus complementi ad arcum (spat. hyp. inverso) demtis sinubus ad arcum, quadrabilibus.

Coroll. 1. Quadratura conchoeidis ex data hyperbolae quadratura.

Coroll. 2. Tang. semicompl. inversi (seu diff. hyp. et conch. invers.) = sinubus ad arcum, et ideo quadrab.

Coroll. 3. Tang. ad alt. (spat. conch.) = sec. ad arc. (spat. hyp.) − sin. compl. ad arc., quadrabiles prop. 4. hic. Et ideo summa tang. semicompl. = sin. compl. ad arc. seu momento arcus ex basi, sive radio in sinum.

Prop. 49. $DC \frown ST = C\alpha \frown ET$. Summa tangentium complementi (quadrabilis) = sinubus complementi ad arcum seu momento arcus ex basi, ut supra toties.

Prop. 50. $D\alpha \frown ST = C\alpha \frown ES$. Summa differentiarum inter secantes complementi et sinus = quadrilineo $ABEN$.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ γEF et EST similia: Nam ang. $EF\gamma$ ang. TES. Porro $E\gamma$ ita investigabimus: $\frac{A\gamma}{AE} = \frac{AQ\ (EF)}{AK\ (EN)}$. Ergo $A\gamma = \frac{EF}{EN} \frown AE$. Ergo ut obiter dicam momenta $A\gamma$ = cylindro tangentium semicompl. (quadrabili). Ergo et quadrabilia momenta $E\gamma$. Ergo $\gamma E = AE - \frac{EF}{EN} \frown AE$. Eodem modo $\frac{Q\gamma}{KE} = \frac{EF}{EN}$. Ideo $Q\gamma \frown EN = EF \frown KE$.

---

7 $\frac{b^2c}{a^2}$: mit den Bezeichnungen von N. 26 müsste es genauer $\frac{f^2l}{a^2}$ heißen. 14–18 Die Korollare 2 und 3 sind fehlerhaft.

seu momenta omnium $Q\gamma$ = sinubus in tang. [semi]compl. quae pendent a q. hyp. ergo et momenta omnium γF. Ergo $\gamma F = AE - \frac{EF \frown KE}{EN}$. Iam $EF \frown KE = AE \frown KQ$ $[=] \frac{AE \frown EN}{EN} - \frac{AE \frown EF}{EN}$ $[=]$ $AE - \frac{AE \frown EF}{EN}$. Et quia $\gamma F = AE - \frac{EF \frown KE}{EN}$ $\left\{\text{vel } -AE + \frac{AE \frown EF}{EN}\right\}$. ideo $\gamma F = \frac{AE \frown EF}{EN}$. ideo momenta omnium γF = cylindro EF. et quia tam $A\gamma$ quam $\gamma F = \frac{AE \frown EF}{EN}$. ergo $=^{\text{lia}}$ inter se. Ergo $Q\gamma = E\gamma$. Ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ γEF et $AQ\gamma$ similia et aequalia inter se.

Iam $\frac{\gamma F}{TE} = \frac{EF}{ES} = \frac{\gamma E}{ST}$.

P r o p. 51. $\gamma F \frown ES = EF \frown TE$. Tang. semicomplementi in arcum q u a d r a b. = γF in basin (q u a d r a b.).

Ergo γE in basin quadrab. quia rad. in basin (quad.) − γF in basin = γE in bas.

P r o p. 52. $\gamma F \frown ST = \gamma E \frown TE$. Summa omnium γF = summae omnium γE in arcum, quadrab. prop. 55. coroll. 4. [=] radio in arcum demto γF in arcum.

C o r o l l. Ergo momenta omnium γF arcui impositorum ex basi quadrabilia, seu $\gamma F \frown EN$ ad arcum = $AE \frown EF$.

P r o p. 53. $EF \frown ST = \gamma E \frown ES$. Summa tang. semicompl. (q u a d r a b.) = γE ad basin.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a : $DF\gamma$ et EST. $\frac{D\gamma}{ET} = \frac{DF}{ES} = \frac{F\gamma}{ST}$.

---

2 *Unter* $AE - \frac{EF \frown KE}{EN}$, *gestr.:* subsunt errores

1 semi *erg. Hrsg.* 2 EF ⌢ KE = *(1)* $\underbrace{\text{ca} - \text{cb}}_{\text{ca} + \text{af} - \text{da}}$. Et cb = da − af. An error forte in calculo, nam hoc videtur aliquo casu impossibile, quando f. exigua *(2)* AE ⌢ KQ *L* 3 = *erg. Hrsg. zweimal* 12 arcum, *(1)* pendet ex q. circ. v. prop. 55. *(2)* quadrab. *L* 12 = *erg. Hrsg.*

8–16 Die Aussagen der Sätze 51–53 bezüglich der Quadrierbarkeit der einzelnen Größen sind nur teilweise zutreffend. Dies wirkt sich negativ auf die entsprechenden Aussagen von Satz 54 sowie auf Teil 2 S. 489 Z. 10 aus.

P r o p. 54. $D\gamma \frown ES = DF \frown ET$. secantes complementi ad basin (secantes in altitudinem inversi, spatium hyp. a basi abscissum) demtis $A\gamma$ vel γF ad basin (quadrabilibus prop. 51.) aequantur tangentibus compl. ad arcum (spat. hyp.) (tang. ad arc.) demtis tangentibus semicomplementi ad arcum (tang. arcus dimidii ad arcum) quadrabilibus.

P r o p. 55. $D\gamma \frown ST = F\gamma \frown ET$. secans complementi ad altitudinem (radius in arcum), demtis omnibus $F\gamma$ in altitudinem = omnibus $F\gamma$ ad arcum.

C o r o l l. 1. Secans ad basin demtis omnibus $F\gamma$ ad basin (quadrabilibus) = omnibus $F\gamma$ ad arcum.

C o r o l l. 2. Ergo omnes $F\gamma$ ad arcum = radio in arcum, demtis tang. arc. dimid. in arc. (quadrab.).

C o r o l l. 3. Ergo summa omnium γF (scil. ad altitudinem) = tang. arc. dimid. ad arcum = γF ad basin inversis.

C o r o l l. 4. Ergo summa omnium γE in arcum quadrabilis.

P r o p. 56. $DF \frown ST = F\gamma \frown ES$. Summa tangentium complementi (quadrab.), demta summa tangentium semicomplementi (quadrab.) = $F\gamma$ in basin seu tang. semicompl. in arcum (quadrabilibus).

C o r o l l. Figura tangentium in basin (quadrabilis) demta tang. arcus dimidii in basin (seu summa tang. semicompl. inversa, quadrabilis) = $F\gamma$ ad altitudinem (quadrabilibus).

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia $X\lambda D$ et EST. Porro XD habemus. Quaerenda sunt $X\lambda$ et λD.
Iam $X\lambda$ est $C\alpha$ $(= EN)$ $- X\delta$. Sed $X\delta = KE$. quia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ $X\delta C$ et AKE similia, unumque latus AE et CX aequale, uni alterius, ergo et reliqua. Ergo $X\lambda = EN - KE$.
Similiter λD est $AD - A\alpha$ $(= AN = KE)$ $- C\delta$ $(= EN)$. Ergo $\lambda D = AD - EN - KE$.
Denique $DX = CD - AE$.

7 f. arcum |, quadrabilibus *gestr.* | *(1)* C o r o l l. 1. Summa omnium Fγ pendet ex q. circ. iunct. prop. 52. C o r o l l. 2. Omnes γE ad arcum pendent ex q. circ. dict. prop. 52. iunct Coroll. 1. hic. *(2)* C o r o l l. 1. *L* 13 basin | absurdum *gestr.* | inversis. *L* 20 f. (quadrabilibus). *(1)* $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: CδR et EST. *(a)* Ang. FCD = ang. *(b)* $\frac{\text{CR}}{}$ *(2)* $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia *L*

6 P r o p. 55.: Richtig sind die Hauptaussage, Korollar 3 und (trotz mangelhafter Begründung) Korollar 4; falsch hingegen die Korollare 2 und 3. 15 P r o p. 56.: Der Satz selbst ist korrekt, das Korollar nicht; die Quadrierbarkeitsaussagen treffen nur zum Teil zu.

Iam: $\dfrac{DX}{ET} = \dfrac{\lambda D}{ES} = \dfrac{X\lambda}{ST}$.

P r o p. 57. $DX \frown ES = \lambda D \frown ET$. Tangentes complementi ad basin (ex conchoeid.) demto radio in sinum = secantibus complementi ad arcum, demtis pariter sinubus complementi ad arcum, et sinubus ad arcum (ex conchoeid.), adde prop. 24.

P r o p. 58. $DX \frown ST = ET \frown X\lambda$. Summa tangentium complementi, demto radio in altitudinem = momento arcus ex basi demto mom. arcus ex alt.

P r o p. 59. $\lambda D \frown ST = X\lambda \frown ES$. Summa secantium complementi, demta summa sinuum pariter et sinuum complementi = quadrilineo $ABEN$, demta summa sinuum ad basin quadrabili.

Sive figura secantium ad basin, demta summa sinuum, quadrab., pariter et sinuum complementi ad basin = sinubus ad alt. demt. sin compl. ad alt.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a $Y\lambda X$ et EST. nam ang. λXY = angulo TES.

Porro $X\lambda$ habemus. YX est radius demto tangente $BX - BY$. et denique $Y\lambda$ est $A\alpha$ (= KE) $+ \alpha\lambda$ (= $C\delta = EN$) $- AY$ (= AH).

$\dfrac{YX}{ET} = \dfrac{X\lambda}{ES} = \dfrac{Y\lambda}{ST}$.

P r o p. 60. $YX \frown ES = X\lambda \frown ET$. Radius in basin (sinum) demto tangente in basin ([tangente complementi] in altitudinem) (quadrabili) = momento arcus ex basi, demto momento arcus ex altitudine.

P r o p. 61. $YX \frown ST = Y\lambda \frown ET$. Radius in altitudinem, demta summa tangentium (vel contra) = $Y\lambda$ ad arcum, seu momento arcus ex altitudine, addito momento arcus ex basi, demtis secantibus ad arcum (vel contra).

P r o p. 62. $X\lambda \frown ST = Y\lambda \frown ES$. Summa sinuum complementi demta summa sinuum (intellige in talibus semper: vel contra) = sinubus ad basin + sin. compl. ad basin − secant. ad basin.

23 *Über der Klammer:* NB.

17 radio *L ändert Hrsg.* 24–485,1 basin. | $\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a EμY et EST. Nam ang. MEY = angulo TES. Lineae ita habentur: $\underline{\text{ME}}$ = AE − EN. $\underline{\text{EY}}$ = AY (AH) − AE. $\underline{\text{MY}}$ est differentia tangentis et sinus. Ideo iam habuimus in $\bigtriangledown$HPB. *gestr.* | $\dfrac{\xi \text{Y}}{\text{AR} = \text{AD}}$ *L*

$\dfrac{\xi Y}{AR = AD} = \dfrac{\mu N(AE) - EN}{EN}$. seu $\xi Y = \dfrac{AE \frown AD}{EN} - \dfrac{EN \frown AD}{EN}$. seu $\xi Y = \dfrac{AE \frown AD}{EN} - AD$.

aliter: $\dfrac{\xi Y}{AE - HE\ (YX)} = \dfrac{EY\ (HA - AE)}{Y\lambda\ (KE + EN - AH)}$.

$\dfrac{\xi E}{EF} = \dfrac{XG\ (AC - EN)}{GF\ (EN - EF)}$. Ergo $\xi E = \dfrac{AC - EN, \frown EF}{EN - EF}$.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: ξEY et EST. $\dfrac{\xi Y}{TE} = \dfrac{\xi E}{ES} = \dfrac{EY}{ST}$.

Prop. 63. $\xi Y \frown ES = \xi E \frown TE$.

Prop. 64. $\xi Y \frown ST = EY \frown TE$. seu summa omnium AD per radium multiplicata aequatur momentis omnium secantium radiis minutorum, arcubus impositorum.

Prop. 65. $\xi E \frown ST = EY \frown ES$. Summa omnium ξE aequatur secantibus radio minutis in basin, seu pendet ex q. circ., add. prop. 67.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia $\xi\mu E$ et EST. $\dfrac{\xi E}{ET} = \dfrac{\xi\mu}{ES} = \dfrac{E\mu}{ST}$.

Prop. 66. $\xi E \frown ES$ ad basin. $= \xi\mu \frown ET$ ad arcum.

Prop. 67. $\xi E \frown ST = E\mu \frown ET$. ξE summa, aequatur radio sinubus complementi minuto in arcum.

Prop. 68. $\xi\mu \frown ST = E\mu \frown ES$. Summa omnium $\xi\mu =$ radio in basin, demtis sinubus complementi ad basin, seu quadrilineo.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: ξXF et EST. $\dfrac{\xi F}{ET} = \dfrac{\xi X}{ES} = \dfrac{FX\ (AB - EF)}{ST}$.

16 basin *(1)* . Summa ergo horum ξM aequatur trilineo concavo BMC. Quod per se patet. *(2)*, seu L

1 ξ, μ: In seiner Handzeichnung hat Leibniz den Punkt ξ rechts neben den Punkt T gezeichnet; T und ξ müssen aber zusammenfallen. — In seiner Zeichnung verwendet Leibniz die Bezeichnung μ, ebenso in der Variante zu Beginn des Textes; im laufenden Text ist er zur Bezeichnung M gewechselt. Da M bereits in anderer Funktion vorkommt (s. N. 26, prop. 55 und 57), ist vom Herausgeber das ursprüngliche μ beibehalten worden. Die Änderung betrifft Z. 1 sowie Z. 11–16. 7 Prop. 64.: Die Formel ist korrekt, die Ausführungen sind misslungen.

Prop. 69. $\xi F \frown ES = \xi X \frown ET$. Tang. semicompl. ad basin. (segm. circ.) addito ξE ad basin $= \xi X$ ad arcum.

Prop. 70. $\xi F \frown ST = FX \frown ET$. Summa tang. semicompl. (quadrab.) + ξE summa (ex q. circ.) = radio in arcum, demtis tang. semicompl. ad arcum.

Prop. 71. $\xi X \frown ST = FX \frown ES$. seu summa omnium ξX = radio in basin − tang. semicompl. in basin.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: $\theta\varpi E$ et EST. Nam ang. $\varpi\theta E$ = angulo BAE. quia eius dupli ad centrum est angulus ad circumf.
θE autem est parabolica seu chorda supplementi ad semicirculum.
ϖE ita inveniemus: $2b \frown a + f$ seu $2bf + 2ba = \theta E$. quam vocemus $k, \frown \varpi E$. Ergo $\dfrac{2ba + 2bf}{k} = \varpi E$.

$$\frac{\theta E}{ET} = \frac{\theta\varpi}{ES} = \frac{\varpi E}{ST}.$$

Prop. 72. $\theta E \frown ES = \theta\varpi \frown ET$. Applicatae parabolicae inversae, ad basin, aequantur ipsis $\theta\varpi$ ad arcum.

Prop. 73. $\theta E \frown ST = \varpi E \frown ET$. Summa applicatarum parabolicarum inverse sumtorum, aequantur ipsis ϖE ad arcum.
Ergo ϖE ad arcum quadrabilia.

Prop. 74. $\theta\varpi \frown ST = \varpi E \frown ES$. summa omnium $\theta\varpi$ aequalis omnibus ϖE ad basin.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia $\psi\varphi\pi$ et EST. $\psi\varphi = CE$. Punctum π cadit in rectam AB, et si duceretur recta $C\pi\varphi$ ea aequalis rectae $C\pi E$. Ideo $\pi E = \pi\varphi$. et $\psi\pi + \pi\varphi = \psi E$.
Nota si basin AC pro altitudine sumamus, seu aequadivisam intelligamus, $\psi\varphi$ et $\psi\pi + \pi\varphi$ erunt applicatae parabolicae.

$$\frac{\psi\pi}{ET} = \frac{\psi\varphi}{ES} = \frac{\varphi\pi}{ST}.$$

20 similia *(1)* $\psi\varphi$Q et EST. $\psi\varphi$ = CE. Punctum Q cadit in rectam AB sed non est necesse idem esse cum illo Q, quod alias adhibuimus ut AQ = EF. sed ne *(2)* $\psi\varphi\pi$ *L*

---

3 Prop. 70.: Die Aussagen zur Quadrierbarkeit sind nur teilweise richtig. 20 Punctum π: Leibniz' ursprüngliche Intention (s. die zugehörige Variante) war richtig. π und Q fallen in der Tat zusammen.

P r o p. 75. $\psi\pi \frown ES = \psi\varphi \frown ET$. seu $\psi\pi$ ad basin $= \psi\varphi$ chordis ad arcum.

Iam per prop. 42. chordae in arcum pendent ex q. circ. Ergo et $\varphi\pi$ ad basin.

P r o p. 76. $\psi\pi \frown ST = \varphi\pi \frown ET$. seu summa omnium $\psi\pi =$ omnibus $\varphi\pi$ ad arcum.

P r o p. 77. $\psi\varphi \frown ST = \varphi\pi \frown ES$. Chordae ad altitudinem $= \varphi\pi$ ad basin.

[*Teil 2*]

Memorabiles sunt consequentiae quae ex his duci possunt ad arithmeticam infinitorum, reperientur enim summae, quae alias omnem opinor artem humanam eludent. Et certe vulgo non extant summae linearum seu quadraturae figurarum nisi paraboleidum. Sed consideremus exempli causa: summam tangentium complementi.

Esto radius a. tangens complementi l. secans complementi g. sinus b. sinus compl. f. Constat: $g = \dfrac{a^2}{b}$. Constat item $\dfrac{g}{a} = \dfrac{l}{f}$. Ergo $l = \dfrac{gf}{a} = \dfrac{a^2f}{ba} = \dfrac{af}{b}$. Et quia $b = Rq\, a^2 - f^2$. ideo secans complementi $g = \dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - f^2}$. et tangens complementi $l = \dfrac{af}{Rq\, a^2 - f^2}$. Ponantur autem f continue crescere proportione arithmetica, primum seu minimum esse β. post 2β. post 3β. etc.

Summa ista $\dfrac{a\beta}{Rq\, a^2 - \beta^2}$ $\dfrac{2a\beta}{Rq\, a^2 - 4\beta^2}$ $\dfrac{3a\beta}{Rq\, a^2 - 9\beta^2}$ etc. iniri potest. Demonstravi enim quadrari posse summam tangentium complementi.

Et ista tamen summa $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - \beta^2}$ $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - 4\beta^2}$ $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - 9\beta^2}$ quae est secantium complementi, habere non potest, est enim eadem cum tetragonismo sectoris duplicati.

15 *Zu* summa ista:
Imo NB. error, summa ista non habetur, quia tangentes [*bricht ab*]

2 $\varphi\pi$ ad basin: Im Gegensatz zu Leibniz' Aussage ist das Integral von der Kreisquadratur unabhängig. Der Hinweis auf die prop. 42 irreführend.

Porro si summam tangentium complementi a linea maxima incipias, primum erit $\dfrac{a-\beta.\frown a,\ \text{seu}\ a^2-\beta a}{Rq,\ a^2-a^2-\beta^2+2a\beta\ \text{seu}\ Rq\,2a\beta-\beta^2}$, secundum $\dfrac{a^2-2\beta a}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$, tertium $\dfrac{a^2-3\beta a}{Rq\,6\beta a-9\beta^2}$, etc. quadrabilis.

Ergo si quadrabilis esset haec quoque series $\dfrac{\beta a}{Rq\,2\beta a-\beta^2}\quad\dfrac{2\beta a}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$ etc. haberetur quadratura huius $\dfrac{a^2}{Rq\,2\beta a-\beta^2}\quad\dfrac{a^2}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$ etc.

Differentia inter duas series: $\dfrac{a^2-a\beta}{Rq\,a^2-\beta^2}$ etc.

$$\begin{array}{lllll} & & 1a\beta & & 2a\beta \\ \cancel{a}^{\cancel{2}}-a\beta \fint & a & \cancel{a}^{\cancel{2}}-\cancel{2}\cancel{a}\beta \fint a-\dfrac{a\beta}{a-\beta} & & \cancel{a}^{\cancel{2}}-\cancel{3}\cancel{a}\beta \fint a-\dfrac{2a\beta}{a-\beta} \\ \cancel{a}-\beta & & \cancel{a}-\cancel{\beta} & & \cancel{a}-\cancel{\beta} \\ & \overline{Rq\,a^2-\beta^2} & & \overline{Rq\,a^2-4\beta^2} & \overline{Rq\,a^2-9\beta^2} \end{array}$$

Ratio primi ad primum est $\dfrac{a}{\beta}$, 2^{di} ad 2^{dum} $\dfrac{a}{2\beta}$, tertii ad tertium $\dfrac{a}{3\beta}$ etc.

vel $\dfrac{\beta}{a}\qquad\dfrac{2\beta}{a}\qquad\dfrac{3\beta}{a}$

summa harum rationum est $\dfrac{a^2}{a}=a$.

Tota inquisitio in posterum arithmeticae infinitorum in eo verti debet, ut inveniantur regulae, quarum ope, datis rationibus partium singularum unius totius ad singulas partes totius alterius, ratio inveniri possit, totorum inter se. Manifestum enim est, rem esse determinatam, ac datis istis partium rationibus, necessario emergere per synthesin

14–16 Vid. ubi de voluto centro gravitatis.

1–5 Porro ... etc. *erg. L*

13 summa: Leibniz summiert die untere Folge; genauer müsste es $\frac{1}{2}a$ heißen. 18 Vid.: vgl. dazu N. 16_2 Teil 2.

certas ac determinatas totorum rationes, etsi hactenus regrediendo per analysin non deprehendamus.

$$\frac{a}{b} \mathop{+}\limits_{\times} \frac{c}{d} \sqcap \frac{a+c}{b+d} \times \frac{ad+cb}{bd} \qquad \frac{abd+cbd}{b^2d+d^2b} \qquad \frac{adb+ad^2+cb^2+cbd}{b^2d+d^2b}$$

Ergo differentia inter $\dfrac{a+c}{b+d}$ et $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ qua hoc excedit illud, est $\dfrac{ad^2+cb^2}{b^2d+db^2}$.

Si iam addenda: $\dfrac{a+c}{b+d}$ $\dfrac{e}{f}$, fiet $\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$ $\dfrac{af^2+cf^2+[eb^2+ed^2+2bed]}{b^2f+d^2f+2bdf+f^2b+f^2d}$.

[Iam $EN = a - x$. et $KE = y$. et $AC = a$.]

Tang. compl. $\dfrac{CD}{EN} = \dfrac{AC}{AN}$. $CD = \dfrac{AC \frown EN}{AN}$. $\dfrac{a^2-ax}{y}$.

At tang. semicompl. ita. $\dfrac{2CF}{EN} = \dfrac{\psi C = 2a}{\psi N = a+y}$. Ergo $2CF = \dfrac{a \frown EN = a^2 - ax}{a+y}$.

Denique secans complementi $= AD = \dfrac{a^2}{y}$.

Habemus summam omnium tang. compl. $\dfrac{a^2-ax}{y}$. tang. semicompl. $\dfrac{a^2-ax}{a+y}$.

Desideratur summa omnium secant. compl. $\dfrac{a^2}{y}$ vel summa tangentium semiarcus seu

5 eb + ed *L ändert Hrsg.* 6 f. *(1)* NB. Tang. semicompl. | $= \dfrac{a^2 - ax}{2y}$. *erg., nicht gestr.* | *(a)* Imo potius tan *(b)* Tang. compl. = *(c)* Nam $\dfrac{CF}{\overline{\dfrac{EN}{2}}} = \dfrac{AC}{KE}$. ergo $CF = \dfrac{AC \frown \dfrac{EN}{2}}{KE}$. *(aa)* Iam $\dfrac{EN}{2}$ *(bb)* et $\dfrac{AC \frown EN}{2KE}$. Iam EN = a − x. et KE = y. et AC = a. ergo $CF = \dfrac{a^2 - ax}{2y}$. Sed $\dfrac{CD}{EN} = \dfrac{CA}{AN}$. Ergo $CD = \dfrac{CA \frown EN}{AN = EK}$. ergo $CD = \dfrac{a^2 - ax}{y}$. *(2)* | Iam EN ... = a. *erg. Hrsg.* | Tang. compl. *L* 11–490,1 seu figura semicissoeidis *und* applicata asymptoto parallela *erg. L*

3 $\sqcap$: Das Zeichen bedeutet hier fiet, s. Z. 5. 10 Habemus: Die erste Aussage ist richtig (s. o. P r o p. 20 u. 25.), die zweite hingegen falsch (s. o. P r o p. 53.).

figura semicissoeidis: $\dfrac{ax}{y} = z$. applicata asymptoto parallela.

Quadrata secantium complementi sunt: $\dfrac{a^4}{y^2} = \dfrac{a^4}{ax - x^2}$.

Momenta ex vertice: $\dfrac{a^2}{\sqrt{\dfrac{a}{x} - 1}}$.

$z = \dfrac{ax}{\sqrt{ax - x^2}}$. $z^2 = \dfrac{a^2x^2}{\cancel{2}ax - x^2}$. $\cancel{2}z^2ax - x^2z^2 = a^2x^2$. Ergo $\cancel{2}z^2a - xz^2 = a^2x$. Ergo $\cancel{2}z^2a = a^2x + xz^2$. Ergo $\dfrac{\cancel{2}z^2a}{a^2 + z^2} = x$. vel si Cartesii notis pro z substituas x. pro x, y fiet aequatio figurae segmentorum circuli: $\dfrac{\cancel{2}x^2a}{a^2 + x^2} = y$.

Ita habemus applicatas figurae segmento circuli symmetrae, ab irrationalitate liberatas et ad modum cuiusdam quasi hyperboloeidis expressas. Quod hactenus potuit nemo, dimensionem circuli dare infinita serie numerorum rationalium.

Hactenus nihil erratum est.

Est autem magni momenti haec circuli reductio ad rationalitatem, qua nemo quicquam maius ad circuli dimensionem praestitit.

Porro momentum quoque figurae eiusdem, ex altitudine, seu summa quadratorum z vel applicatarum cissoeidis dimidiatae, asymptoto parallelarum ad hyperbolam reduci potest. Nam z asymptoto parallela aequalis est: $\dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Ergo $z^2 = \dfrac{a^2x^2}{2ax - x^2} =$

---

2 $y^2 = ax - x^2$.

5–7 = x. | vel si ... = y. *erg.*; applicatae semicissoeidis, basi, seu diametro circuli generatoris parallelae et *(1)* parallelae *(2)* perpendiculares et asymptotae parallelae *(3)* perpendiculares asymptoto *erg. u. gestr.; darüber, nicht gestr.:* 𝔖 | Ita *L* 14 f. dimidiatae, *(1)* basi parallelarum, seu ad asymptotam perpendicularium, eiusdem pene aequationis est, cuius sunt *(a)* axi | seu asymptoto *erg.* | *(b)* basi parallelae *(2)* asymptoto ... potest *(a)*, nimirum mutato tantum + in − . Nam z basi parallela, aequalis *(b)*. Nam *L*

---

16 $ax - x^2$: stattdessen müsste es genauer $2ax - x^2$ heißen. Die folgende Rechnung führt Leibniz mit diesem Fehler konsequent durch, verbessert dann, streicht aber schließlich sämtliche hinzugefügten Zweien in Z. 4–6 wieder aus.

$\frac{a^2x}{2a-x}$. Ideoque respondet momento figurae secantium ex vertice, seu opposita asymptotae. Nam si x crescere incipiat ab opposita asymptotae, erit hyperbola $\frac{a^2}{a-x}$. Eiusque momentum ex illa opposita: $\frac{a^2x}{a-x}$. Hinc dubitandum non est momentum istud ex quadratura hyperbolae pendere. (Hyperbola est, $\frac{a^2}{a-x} = y$. Ergo $a^2 = ay - xy$. Ergo $a^2 + xy = ay$. Ergo $xy = ay - a^2$. Ergo $x = \frac{ay-a^2}{y}$. vel $x = a - \frac{a^2}{y}$. Ergo y abscissa ex asymptota semper maior a. Hinc apparet aequationem ipsius $x = \frac{2z^2a}{a^2+z^2}$. aequationi ipsius $z^2 = \frac{a^2x^2}{2ax-x^2}$. valde affinem esse, sed illam tamen non aeque reducibilem.[)]

Nota autem summa quadratorum parallelarum asymptotae seu z^2 inventa, inventum utique momentum cissoeidis ex basi seu circuli diametro, cui applicata intelligitur, ac per consequens haberi summam ipsarum x. seu basi parallelarum, ductarum in distantias a basi, quae scilicet his semiquadratis aequatur.

Notandum ante omnia cum dicitur $z = \frac{ax}{\sqrt{ax-x^2}}$. Tunc posito quod x sit initio minimum, ipsam z fore minimam applicatarum asymptotae parallelarum, nam posito x esse infinite parvum, ac proinde negligi velut non ascriptum erit $z = \frac{a}{\sqrt{a}}$. ac proinde linea qualibet assignabili minus. Nam sic $z^2 = \frac{a^2}{a}$. seu $z^2 = a$.

Ergo inspecta figura quam de cissoeide descripsi[:] x erit AD. et z erit DI. At applicatae inversae IK, non sunt x. sed $a-x$. verum x sunt applicatae spatii complementalis. Ergo omnia momenta ipsorum $a-x$ ad altitudinem sunt aequalia semiquadratis omnium z ad basin. Ergo xz ad asymptotam reducta sunt ad quadraturam hyperbolae.

1 Ideoque *(1)* aequatur *(2)* respondet *(3)* aequatur *(4)* respondet momento *(a)* hyperbolae ex *(b)* figurae *L* 3 $\frac{\mathrm{a}^2\mathrm{x}}{\mathrm{a}-\mathrm{x}}$. *(1)* Ergo cissoeis ex asymptota aequiponderat hyperbolae ex opposita asymptotae. Modo idem *(2)* Hinc *L*

16 inspecta figura: s. N. 34, S. 575, Fig. 4.

At semiquadrata omnium x. vel momenta omnium z. ex asymptota aequantur sinuum cylindro, atque ideo zx vel (quia $z = \dfrac{ax}{\sqrt{ax - x^2}}$) $\dfrac{ax^2}{\sqrt{ax - x^2}} = a \frown \sqrt{ax - x^2}$. Ergo $\dfrac{x^2}{\sqrt{ax - x^2}} = \sqrt{ax - x^2}$. Ergo $x^2 = ax - x^2$. Ergo $2x^2 = ax$. Ergo $2x = a$. absurdum. Error ergo alicubi.

Eius ratio haec est[:] primum sumsi semiapplicatam cissoeidis asymptotae parallelam esse hanc $z = \dfrac{ax}{y}$. posito y esse sinum, quoniam scilicet secans compl. erat $\dfrac{az}{y}$. et tang. compl. erat $\dfrac{a^2 - ax}{y}$. at horum differentia est tangens semiarcus. Ergo tangens semiarcus est $\dfrac{ax}{y}$. ducantur in $2a - x$. distantias a basi, fiet: $\dfrac{2a^2x - ax^2}{y} = \dfrac{2a^2x - ax^2}{\sqrt{ax - x^2}} =$ [*bricht ab*]

Sed de his alias exquisitius, sufficit interea certam exquisitamque detexisse rationem exprimendi progressionem elementorum circuli, aut figurae circularibus symmetrae, infinita serie numerorum rationalium. Quod hactenus in hyperbola ac hyperboloeidibus, parabolaque aliisque id genus figuris, in circulo nunquam fieri potuit, novaque methodus detecta arcus, sinus, segmenta supputandi.

Si $\dfrac{z^2a}{a^2 + z^2} = x$. series numerorum rationalium ipsis x respondentium ita exhiberi potest: posito $a = 10$. nam assumi potest quantumcumque, et in continuo, infinitum:

$$\frac{10}{100+1} + \frac{40}{100+4} + \frac{90}{100+9} + \frac{160}{100+16} + \frac{250}{100+25} + \frac{360}{100+36} + \frac{490}{100+49} +$$
$$\quad 101 \qquad 104 \qquad 109 \qquad 116 \qquad 125 \qquad 136 \qquad 149$$

$$\frac{640}{100+64} + \frac{810}{100+81} + \frac{1000}{100+100}$$
$$\quad 164 \qquad 181 \qquad 200$$

17–20 Imo hoc est complementum rectanguli isoparalleli ad segmentum duplicatum, potest a assumi $\dfrac{1}{10}$. et $z = \dfrac{1}{100}\ \dfrac{2}{100}\ \dfrac{3}{100}$.

Asymptota conchoeidis asymptotae hyperbolae aequalis est, differentiis, cum ipsarum utriusque applicatarum incremento decrescentibus.

Spatium hyperbolae asymptoton esse magnitudine infinitum facile demonstrari potest quoniam cylinder eius infinitae magnitudinis. Quod rursus sic probo: Quoniam residuum eius, demto momento ex asymptota vel basi, est momentum ex opposita asymptotae seu ex vertice spatii asymptoti, at hoc momentum necesse est ad alterum illo esse ut infinitum ad finitum, adeo ut si momentum ex basi est finitum, alterum sit infinitum, et si momentum ex basi est infinitum, momentum ex vertice futurum sit plus quam infinitum. Cuius rei manifesta ratio est, quoniam in asymptotam aliasque ei parallelas numero infinitesimarum finito distantes quippe infinitas ducta puncta faciunt plana a^2. Ergo lineae in ea ductae facient solida.
Imo, videndum. Istae enim faciant solida, facient tantum finita, quoniam et plana fuerant finita. Sed de hoc porro videndum.

Credo Collinium summam inire terminorum progressionis harmonicae divisione illa per partes adhibita, qua et Mercator usus est.

$$\frac{z^2}{z^2+a^2}.$$

Iam $\dfrac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$ etc. Ergo $\dfrac{z^2}{z^2+a^2} =$

$$\left\{\begin{array}{rl} z^2 & -a^2 + a^4 - a^6 + a^8 - a^{10} \text{ etc.} \\ 4z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 9z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 16z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 25z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \end{array}\right\}$$

17 NB. si a fractio est, necesse est etiam z esse fractionem fractionis, cum sit portio ipsius a.

18–22 *Links neben dem Schema:* Summa horum omnium linea est.
Darunter, gestrichen: Male non z^2 sed 1.

14 Collinium: vgl. Oldenburg an Leibniz, Sendung vom 20. IV. 1673 (*LSB* III, 1 S. 60).

seu $z^2+4z^2+9z^2$ etc. | $+a^4+a^8+a^{12}$ etc. $-a^2-a^6-a^{10}$ etc. ducta in a. id est infinities sumta.

Seu: $z^2+4z^2+9z^2$ etc. $+a^5+a^9+a^{13}$ etc. $-a^3-a^7-a^{11}$ etc.

Et quia $z^2+4z^2+9z^2$ etc. $=\frac{a^3}{3}$. habebimus: $\frac{a^3}{3}+a^5+a^9+a^{13}$ etc. $-a^3-a^7-a^{11}$ etc. vel $+a^5+a^9+a^{13}$ etc. $-\frac{2a^3}{3}-a^7-a^{11}$ etc.

Unde posita a minore quam 1. v. g. $\frac{1}{2}$. posteriores potestates erunt fractiones tam parvae ut tuto negligi possunt, habebiturque approximatio facillima, quantam volemus. Haec pro quadratura totius, si partis tantum quaeratur multiplicationis per a. multiplicandum per z. seu altitudinem abscissamve ex vertice.

Si a v. g. ponatur 10. posteriores potestates continue crescent, si ponatur esse $\frac{1}{10}$. nec hoc satisfacit. Ergo quemadmodum si 1. sit infinitesima lineae seu punctum, a foret infinitum. Ita si a volumus facere fractionem quantumlibet, et si opus infinite, parvam, ipsum 1. intelligamus $=a^2$. seu quadratum radii. Cuius infinitesima est a. et loco infinitesimae, intelligatur esse $\frac{1}{100,000}$. Imo nec opus est postrema, negligi potest summa eorum enim in infinitum, quia sunt progressionis geometricae. Denique omnia multiplicanda per a. id est 100,000, quaeritur enim non summa omnium $\frac{z^2}{z^2+a^2}$. sed omnium $\frac{z^2a}{z^2+a^2}$.

Ille demum maximus usus est, quod idem fit, etiamsi series sit finita, seu altitudo divisa in partes finitas, eodem modo enim hac tangentium methodo summa eius inveniri potest, ut credo. Videndum tamen, an scilicet sinus in suas ipsorum differentias ducti, producant eorum semiquadrata, in summa. Forte utilius infinitis summa potius omnium DK uti, quia ea non ad basin sed simpliciter. Nam infinitis summa omnium DE ad basin difficilis, quia basis non potest dividi in partes aequales.

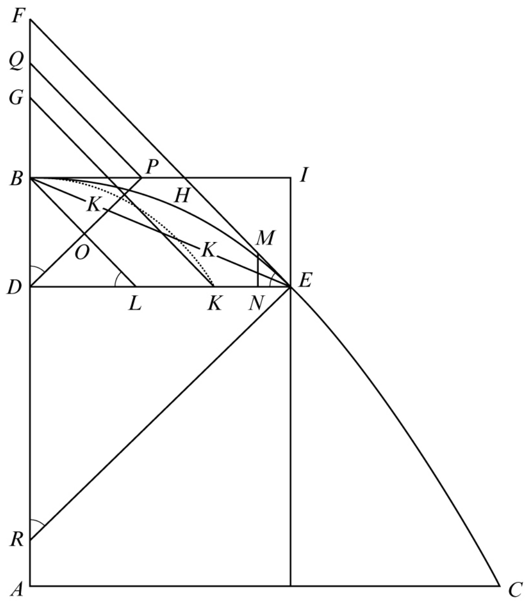
17–22 Ille demum . . . partes aequales. *erg. L*

---

8 per a: von hier geht ein Verbindungsstrich zu ducta in a Z. 1 aus.

[*Teil 3*]

Theorema est in omni figura: secantes ad basin aequant rectangulum abscissae in applicatam, segmento duplicato auctum. Et hoc quidem in circulo facit quadrilineum duplicatum, seu sectorem duplicatum.



[*Fig. 2*]

Esto figura quaelibet ABC. cuius applicata quaelibet DE. tangens [EF]. abscissa trans verticem BF. eius dimidia BG.

2–4 Male fit regula generalis.

2 est | generale *gestr.* | in *L* 2 basin *(1)* aequantur quadrilineo figurae duplicato, sciendum est autem in circulo, quadrilineum *(2)* aequant *L* 6 EF *erg. Hrsg.*

2 Theorema: für eine eingehende Analyse des Theorems vgl. D. MAHNKE, *Neue Einblicke*, 1926, S. 41 f.

Aio summam omnium [DG] ad basin semper esse quadrabilem, aequarique triangulo BIE. quod ita demonstro:

Summa omnium BD ad basin complet trilineum concavum $BIEHB$. Summa autem omnium BG ad basin aequatur segmento BHE (quoniam ut alibi demonstratum est summa omnium $BF = 2BG$, ad basin, aequatur duplicato segmento BHE). Ergo summa omnium $DB + BG = DG$. ad basin = trilineo concavo $BIEHB$ + segm. BHE = triang. BIE.

Hinc habetur methodus geometrica universalis, incomparabilis, admiranda, divina, quadrandi figuram quamlibet datam, quod sic ostendo.

Ducatur recta GK parallela FE. Aio summam omnium DK simpliciter sive ad altitudinem, id est uti iacent, id est figuram altitudine BD. basi DK. et curva per omnia puncta K inter B et K praesens rectae DE, ducta, comprehensam aequari triangulo BIE. Nam ut demonstratu facile est, omnes DK in altitudinem aequantur omnibus DG in basin, id est, ut demonstravimus paulo ante, triangulo BIE.

Quare data quadam figura, quaeramus per analysin aliam figuram, in qua omnes DE seu applicatae figurae datae, faciant officium rectarum DK. Triangulum BIE figurae inventae aequabitur figurae datae $BKKD$.

Oportet autem figuram datam $BKKD$ esse convexam, seu cuius applicatae sint applicatis trianguli aeque alti BDL maiores, uti patet. Quare si figura concava quadranda offeratur, sumenda est convexa, seu complementum eius ad rectangulum.

Sed quid circuitionibus opus est, quid ex figuris datis novas per analysin quaerimus, cum nunc tandem praeter opinionem inciderimus in methodum non tantum generalem, sed et ita expeditam, ut ad figurae cuiuslibet datae quadraturam absolutam, non nisi tangente eius ducto opus sit.

1 DB *L ändert Hrsg.*

4 alibi: s. o. Satz 10.

Data ergo figura quadranda quacunque $DBHE$. ductoque tangente EF. ducatur ei parallela BL. aio triangulum BDL aequari trilineo concavo (si figura data convexa est) seu complemento ($BIEHB$) figurae datae ($DBHE$) ad rectangulum (DI) vel quod idem est triangulum BLE = segmento BHE.
Demonstratio haec est: intelligatur triangulum figurae characteristicum esse MNE. cuius scilicet altitudo MN est infinitesima altitudinis figurae, triangulum hoc simile est trian-

---

496,15–17 *Nebenbetrachtung:*

NB. Data figura geometrica quadratrice figurae angulorum et omnium eius partium, datur sectio angulorum universalis. Ponatur figura ista quadratrix esse decimi gradus v. g. sursolido-surdesolido cubica etc. Ea semel in plano descripta, poterunt problemata omnia geometrice effici etiam quae sunt centesimi et millesimi, et cuiuscunque gradus altioris, et inveniri centum, et ultra si velis, mediae proportionales, cum sectio angulorum inventioni mediarum proportionalium respondeat.
Sed iam videndum si semel fieri possit, ut aequatio quae per analysin centesimi gradus esse ostenditur, reduci potest ad decimum gradum. Videtur eodem pure, quae decimi gradus reduci posse, ad primum ac secundum, et in plano exhiberi. Quo posito absolutum foret mesolabum.

$$\sqrt{}_{10}\ a^{10}+b^{10} \quad \sqrt{}_{20}\ a^{20}+b^{20}+2[a^{10}b^{10}]$$

Reducatur[:] quasi extractione radicis reduci non posset, et ideo quasi esset gradus decimi. Deprimetur ergo, et reducti radix quadrata, cubica. etc. tandem deprimetur infra decimum.

NB. Si v. g. omnes altiores dimensiones reduci possunt ad aliquam certam minorem omnes radices extrahi possunt. Nam si certa illa est sexta, ergo ex aequatione sextae dimensionis extrahi potest radix quadrata. Ex aequatione octavae *(!)* radix cubica etc. Ergo extrahi potest radix cubica, si ex altiore, ergo et ex inferiore exaltando inferius, et postea rursus dividendo, v. g. pro valore $\sqrt{}_c\ a^3+b^3$. dici potest a valere c^4. et b valere d^4 etc. fiet $\sqrt{}_c\ c^{12}+d^{12}$. vel sic: $a^3d^4+b^3d^4, \sqrt{}_c$.

2 Falsa pars eorum quae sequuntur falsum[,] inquam summam omnium DL esse triangulum. Sed haec nihil derogant methodo praecedenti utique infallibili.

14 analysin | non nisi *gestr.* | centesimi *L* 18 $a^{20}b^{20}$ *L ändert Hrsg.*

gulo FDE per constructionem, ergo et triangulo BDL. Ergo

$$\frac{BD}{MN} = \frac{DL}{NE} = \frac{BL}{ME}.$$

Ideo primum $BD \frown NE = DL \frown MN$. id est BD ad basin aequantur summae omnium DL. nempe ad altitudinem, seu triangulo BDL. Nam quia omnes BD faciunt triangulum, seu arithmetice proportionales sunt, ideo etiam omnes DL sunt arithmetice proportionales, ac proinde triangulo BDL continentur. At omnes BD ad basin vel NE implent complementum figurae ad rectangulum $BIEHB$. idem enim est, sive basi DE, sive oppositae BI applicentur. Hinc sequitur triangulum BLE aequari segmento BHE. Nam $\bigtriangledown^{\text{lum}}\, BDE = \bigtriangledown BIE$. item $\bigtriangledown BDL =$ compl. fig. $BIEHB$. Ergo $\bigtriangledown^{\text{lum}}\, BDE - \bigtriangledown BDL$, seu $\bigtriangledown BLE$ erit $= \bigtriangledown^{\text{lo}}\, BIE-$ compl. fig. $BIEHB$, sive segmento BHE.

Figurae illae, quae hac methodo describentur, erunt vere quadratrices, cum quadratrices veterum non sint geometricae, seu describi geometrice non possint.

Experiemur rem in figura cognitae dimensionis, qualis est parabola, ubi $BD = BF$. Ergo et $DL = LE$. ergo $\bigtriangledown^{\text{lum}}\, BDL$ quarta pars figurae, cum debeat esse tertia. Hinc patet errorem aliquem subesse debere. Is vero in eo est, quod summam omnium DL triangulum BDL constituerem re non satis examinata.

Verissimum est summam omnium DL aequari triangulo BIE. sed haec summa non est semper triangulum, etsi summa omnium DB. sed ad altitudinem, non ad basin, triangulum sit.

---

2 $BD \frown ME$ (segmentum, in circulo, duplicatum) = summae omnium $BL \frown MN$ (ea ergo in circulo pendet ab eius quadratura).

$DL \frown ME = BL \frown NE$.

11 f. Figurae ... possint. *erg.* *L*

DL autem sic investigabimus: $\dfrac{DL}{DE} = \dfrac{BD}{DF}$. ergo $DL = \dfrac{BD \frown DE}{DF}$. Et si curva BHE sit circulus erit

$$DL = \cfrac{xy}{\cfrac{a^2}{x} - a + x} = \frac{x^2y}{a^2 - ax + x^2} = z.$$

$$\text{seu } \frac{x \frown \sqrt{2ax - x^2}}{a^2 - ax + x^2} = z. \text{ seu } \frac{2x^5a - x^6}{\square, a^2 - ax + x^2} = z^2 \text{ etc.}$$

Inde facile haberi potest etiam x. sed quia parum credibile est liberatam iri ab irrationalitate, id linquamus. Et ad praeclaram illam methodum superiorem revertamur, eique novam non absimilem, nec minus facilem universalemque adiciemus.

Ducatur recta DO perpendicularis ad BL, aio cuiuscunque tandem generis sit curva BH summam omnium BK ad arcum semper iniri posse. Quia enim triangulum BOD simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ BDL vel $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ MNE, et angulus BDO = angulo DLB vel NEM, ideo

$$\frac{BD}{ME} = \frac{BO}{MN} = \frac{DO}{EN}.$$

Ergo $BD \frown MN$. semiquadratum maximae $BD = BO \frown ME$. seu BO in arcum.
$BD \frown EN$ (trilineum concavum) $= DO \frown ME$. semper ergo summa DO in arcum pendet a quadratura figurae et vicissim.
$BO \frown EN = DO \frown MN$.

Recta DO producatur, dum occurrat rectae BI in P. Aio summam omnium BP ad basin semper quadrari posse. Est enim $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ PBD simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ MNE. et angulus BDP aequalis angulo NEM. Ergo

$$\frac{DP}{ME} = \frac{PB}{MN} = \frac{BD}{EN}.$$

---

1 f. *Anderer Ansatz:*
$$\frac{\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{2x}}{x} = \frac{\frac{a^2}{x}}{z}. \text{ Ergo } z = \frac{a^2}{x} \frown \cfrac{x^2}{\cfrac{a^2}{\cancel{x}} - \cfrac{a^2}{2\cancel{x}}}. \quad z = \frac{a^2}{x} \frown \frac{2x^2}{a^2}. \quad z = 2x.$$

14 f. vicissim. | Innumeras dare possumus figuras quadrabiles, datis ipsis *gestr.* | BO ⌢ EN *L*
15 f. DO ⌢ MN. | Sed hoc obiter, nunc ad methodum novam universalemque | aliam a priore *erg.* | quadrandi omnes figuras accedemus: *gestr.* Recta ... occurrat *gestr. u. wieder gültig gemacht* | rectae *L*

Ergo $DP \frown EN$ seu ad basin $= BD \frown ME$ ad arcum seu momento arcus ex vertice.
$DP \frown MN = PB \frown ME$. seu summa omnium DP simpliciter $=$ summae omnium PB ad arcum.
$PB \frown EN = BD \frown MN$. seu summa PB ad basin $=$ semiquadrato BD.

Sed quia PB ad basin quadrabilis, ergo summa omnium PQ absolute erit quadrabilis, nam $PQ \frown MN = PB \frown EN$.
Ecce ergo aliam methodum universalissimam quadrandi figuram quamlibet datam, si quaeratur alia figura, in qua applicatae omnes figurae datae, faciant functionem rectarum QP.

Intelligi ex hoc exemplo potest, plerumque si quae lineae ad arcum basinve semper quadrentur, alias eius ope reperiri posse, quarum summa simpliciter semper quadretur. Ac totidem habebuntur methodi universales quarum singulis quadrari possunt figurae in universum omnes. Sed ex his tres illae methodi principales, quarum duas hoc loco, primam alibi dedi, ubi ostendi summam omnium DR semper quadrari posse; videntur suffecturae, saltem ut se mutuo examinent vitandi erroris calculi causa. Cum alioquin vel unica earum sit suffectura ad problemata in universum omnia resolvenda.

3 f. arcum. | Sed haec obiter, nunc tandem *gestr.* | PB $\frown$ EN *L*   10–16 Intelligi … resolvenda. *erg.* *L*

---

6 nam $PQ \frown MN = PB \frown EN$.: Diese Begründung ist falsch, anstelle davon müsste es vielmehr $\dfrac{PQ}{ME} = \dfrac{PB}{EN}$ heißen.   14 alibi dedi: s. o. Prop. 6,12; die allgemeine Aussage steht N. 28 S. 503 Z. 24 f.

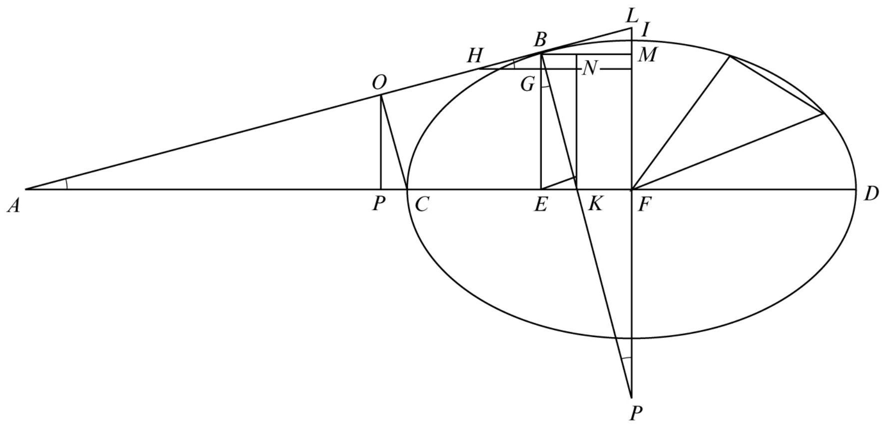
28. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM ELLIPSIS
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 359–360. 1 Bog. 2°. ca 3. S. — Von Bl. 359 ist die obere äußere Ecke abgerissen, hinzu kommen drei kleinere Ausrisse am oberen Rand, dadurch geringfügiger Textverlust. Von Bl. 360 fehlt außen ein Streifen von ca 9 cm Breite, zudem ist ein trapezförmiger Teil von ca 11 x 18 cm herausgerissen. (Möglicherweise sind die zwei Stücke beieinandergeblieben.) — Überschrift ergänzt, verschiedene spätere Zusätze, unter Fig. 1 Fragment einer Bleistiftzeichnung, weitere isolierte Betrachtungen. Textfolge: Bl. 359 r°, Bl. 359 v° oben. Bl. 360 v°, interlineare Zusätze = Teil 1; separate Zusätze in der Mitte der Doppelseite 360 v°/360 r° = Teil 2; Bl. 359 v° Rest und Bl. 360 r° = Teil 3; isolierte Betrachtungen auf Bl. 360v° sowie Bl. 359 v° und 360 r° = Teil 4.)
Cc 2, Nr. 548

Datierungsgründe: In dem vorliegenden Stück wird das ursprünglich am Kreis gefundene charakteristische Dreieck auf die Ellipse angewandt. Die Studie ist demnach etwas später als N. 21 und N. 23 verfasst; sie setzt die Betrachtungen von N. 26 und N. 27 fort. Die beiden nächsten Nummern, N. 29 und N. 30, sind jeweils unmittelbare Folgestücke.

[*Teil 1*]

T r i a n g. c h a r a c t e r i s t i c u m e l l i p s i s



[*Fig. 1*]

Character ellipsis: Si quae⟨libet contin⟩gens product⟨ae ellipseos dia⟩me⟨tro cuicumque occurrat,⟩ atque a puncto contactus B ad eandem diametrum recta B⟨E ordinatim ap⟩plicetur, er⟨it rectangulum sub⟩ diametri portionibus AE. EF a centro F per contingentem AB applicatamque BE abscissis, semidia⟨metri quadrato aequale.⟩

$CF = a$. $EF = b$. Iam $EB = \llcorner Rq\, a^2 - b^2 \lrcorner \frown \beta$. Omnis enim ⟨— —⟩ habet rationem quandam certam ad sinum cuiusdam circuli, quae ratio sit β. et radius illius ⟨— —⟩

P r o p. 1. Iam ⟨— —⟩ ergo $\dfrac{CF\,\square}{EF} = AF$. ergo summa AE. seu $AF - EF$. pendet a spatio hyperbolico quia summa EF quadra⟨— —⟩

Ducatur ⟨trian⟩gulum characteristicum inassignabile BGH. simile ipsi ABE. ita ut HB sit portio inassignabilis curvae, HG portio infinite parva altitudinis, BG portio infinite parva basis. Comparatio haec erit: $\dfrac{AE}{GH} = \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{BE}{BG}$. Hinc propositiones transformatoriae.

P r o p. 2. $AE \frown BH = AB \frown GH$. applicatae spatii hyperbolici translatae ad curvam, aequantur summae tangentium ellipseos.

P r o p. 3. $AE \frown BG = BE \frown GH$. seu applicatae hyperbolicae ad basin, quadrantis elliptici (quarum summa aliunde facile haberi potest, cum haberetur si basis FI esset $= CF$. seu si ellipsis essset circulus, ut alibi ostendimus summam secantium circuli in basin aequari radio in arcum; et ideo sufficit hoc productum

---

7 *Zu* summa AE: Male. Summa omnium AF est spat⟨— —⟩

1–4 *Bezeichnungen erg. L; Textverlust erg. Hrsg. nach de Witt.* 6 et radius illius ⟨— —⟩ *erg. L* 7 $\dfrac{\mathrm{CF}\,\square}{\mathrm{EF}} =$ *(1)* AE. *(2)* AF. *L* 7 summa AE. | seu AF − EF. *erg.* | *(1)* est *(a)* hyperbola *(b)* spatium hyperbolicum *(2)* pendet *L* 8 quia summa EF quadra⟨— —⟩ *erg. L* 10 sit portio *(1)* minima *(2)* inassignabilis *L* 18 circuli *erg. L*

1–4 S. J. de Witt, *Elementa curvarum linearum*, 1659, Buch I Satz 18, *DGS* II, S. 224. 3 portionibus AE. EF: Anstelle von AE müsste es AF heißen. Leibniz hat das Versehen in Z. 7 korrigiert. Er hat die Verbesserung allerdings nur dort vorgenommen. Dadurch werden alle Betrachtungen, in welche diese Beziehung eingeht, falsch. 17 alibi ostendimus: N. 27, prop. 1. 18 sufficit: Diese Aussage ist unzutreffend.

multiplicari per β. rationem applicatae ellipticae ad circularem, idemque haud dubie hic provenit), aequantur portioni ellipticae CBE.

P r o p. 4. $AB \frown BG = BE \frown BH$. seu tangentes ellipticae ad basin, aequantur momento arcus ex altitudine. Si ergo summa inveniri potest tangentium ellipticarum, ad basin, haberi potest superficies sphaeroeidis circa altitudinem, adde prop. 5. (pendet ex q. circ.)

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: BGH et BEK. Ergo: $\dfrac{BK}{BH} = \dfrac{BE}{GH} = \dfrac{EK}{BG}$.

P r o p. 5. $BK \frown GH = BE \frown BH$. Summa perpendicularium ad altitudinem scilicet, aequatur momento arcus ex altitudine.

C o r o l l. Ergo summa perpendicularium ad altitudinem aequatur summae tangentium ad basin, adde prop. 4. et 10. (pendet ex q. circ.).

P r o p. 6. $BK \frown BG = EK \frown BH$. Perpendiculares ad basin aequantur intervallis perpendicularium et applicatarum in altitudine, ad arcum (proportionalibus EF ad arcum seu momento arcus ex basi). Ergo CE ad curvam pendent ex momento arcus ex basi (pendent ex q. hyp.).

P r o p. 7. $BE \frown BG = EK \frown GH$. Sinus seu applicatae ellipticae ad basin (quae figura q u a d r a r i potest, ut in sinubus circuli ad basin ostendi), aequantur intervallis applicatarum et perpendicularium in altitudine ad altitudinem.

C o r o l l. 1. Ergo summa intervallorum applicatarum et perpendicularium in altitudine, q u a d r a r i potest.

C o r o l l. 2. Ergo etiam q u a d r a r i potest summa omnium KF seu intervallum perpendicularis a basi, in altitudine sumtorum.

C o r o l l. 3. Et summa omnium CK.

NB. Sinus ad basin in omni figura sunt quadrabiles. Ergo et semper summa omnium EK. Hinc sequeretur ad quadrandam figuram datam, nihil aliud opus esse, quam aliam

6 (pendet ex q. circ.) *erg. L* 8 f. ad altitudinem scilicet *erg. L* 11 (pendet ex q. circ.) *erg. L* 13–15 (proportionalibus ... q. hyp.) *erg. L* 17 ad basin *erg. L* 18 in altitudine *erg. L* 22 f. sumtorum. *(1)* C o r o l l. 3. Ergo et summa omnium BM *(2)* C o r o l l. 3. *L* 24–504,2 NB. Sinus ... $\dfrac{\mathrm{BE}^2}{2}$. *erg. L*

17 ostendi: N. 27, prop. 12.

quaerere, in qua applicatae figurae datae faciant functionem EK. Summa omnium EK, a C usque ad $E = \dfrac{BE^2}{2}$.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: ABK et BGH. $\dfrac{AK}{BH} = \dfrac{AB}{GH} = \dfrac{BK}{BG}$.

P r o p. 8. $AK \frown GH = AB \frown BH$. Iam $AK = AE + EK$. Et summa omnium AE est spatium hyperbolicum per prop. 1. Summa omnium EK est quadrabilis prop. 7. coroll. 1. Ergo

C o r o l l. Figura omnium tangentium ad arcum, pendet a quadratura hyperbolae.

Restat quaerenda summa omnium EK ad basin. Ea autem pendet a q. ellipseos quia proportionalis summae omnium EF. ad basin, ut alibi ostendam ex iis quae Schoten. ad Cart. p 245. Ergo summa omnium CE ad basin pendet ab eadem.

P r o p. 9. $AK \frown BG = BK \frown BH$. Ergo secantes ex perpendiculari ad basin, aequantur perpendicularibus ad arcum, adde prop. 14.

P r o p. 1 0. $AB \frown BG = BK \frown GH$. habuimus prop. 5. coroll.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: BLM et BGH. $\dfrac{BL}{BH} = \dfrac{BM}{GH} = \dfrac{LM}{BG}$.

P r o p. 1 1. $BL \frown GH = BM \frown BH$. Summa tangentium complementi elliptici ad altitudinem, aequatur figurae sinuum complementi ellipticorum ad arcum, seu momento arcus elliptici ex basi.

C o r o l l. Hac ergo summa opus est, ad inveniendam superficiem sphaeroeidis circa basin voluti.

---

10 *Unter* ostendam: NB.

6 prop. 7. coroll. 1. *erg. L* 9–11 Restat quaerenda ... ab eadem. *erg. L* 13 arcum *(1)* . C o r o l l. 1. Ergo aequantur momento arcus ex altitudine, per prop. 5. *(2)* . C o r o l l. 1. Ergo aequantur summae tangentium ad basin, prop. 5. coroll. 1. *(3)* Corollarium *(4)*, adde prop. 14. *L* 16 f. ad altitudinem *erg. L*

---

10 f. Schoten.: *Commentarii*, *DGS* I S. 245.

P r o p. 1 2. $BL \frown BG = LM \frown BH$. Tangentes complementi elliptici ad basin, aequantur intervallis applicatarum basis, et tangentis in basi assumtis, ad arcum.

P r o p. 1 3. $BM \frown BG = LM \frown GH$. Seu sinus complementi ad basin (= quadrilineo figurae $FCBM$) aequantur summae intervallorum applicatarum basis et tangentis in basi assumtorum, ad altitudinem.

C o r o l l. Horum ergo summa pendet a dimensione figurae.

P r o p. 1 4. Figura perpendicularium ad arcum, aequatur trilineo CBK portione altitudinis CK, maxima perpendiculari BK, et curva CB comprehenso, duplicato, ablata portione CHB, aequatur ergo quadrilineo $KCBN$.

C o r o l l. Ergo figura perpendicularium ad arcum pendet a figurae quadratura.

C o r o l l. Quemadmodum et figura secantium ex perpendiculari, ad basin per prop. 9.

P r o p. 1 5. Si curva in partes notae progressionis (ut aequales, continue crescentes uniformiter etc.) secta, fieri potest, per naturam figurae datae, ut series perpendicularium in ea quoque ratione crescat, quae in progressionem chordarum curvae ducta, sit capax summationis; tunc data dimensione arcus datur area figurae et vicissim.

⟨— —⟩s recta quaedam ⟨— —⟩ ⟨—⟩am ⟨perpendi⟩culariter cuius omnia puncta iacent in eodem plano; et recta quoque in eodem semper plano cum curva maneat, aream zonae productae, ex data curvae area invenire. Problema satis difficile.

---

7 *Zu* P r o p. 1 4. $\mathfrak{H}$. adhuc ab interiecta $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$, videndum an illa nullius considerationis.

9 ablata portione ... KCBN. *erg. L* 12 f. prop. 9. *(1)* Prop. 15. Si *(a)* series *(b)* progressio perpendicularium ad eam speciem redigi potest, in qua ducta basis | seu terminus maximus *erg.* | in certam partem altitudinis | producit summam *gestr.* | seu numeri terminorum, producit summam ut sit in applicatis *(aa)* hyperboloei *(bb)* paraboloeidum, poterit haberi dimensio curvae, data dimensione figurae, et vicissim. C o r o l l. Ergo si qua sit figura eius naturae, ut perpendicularis *(aaa)* ex curva *(bbb)* ad curvam, inde ductae ad altitudinem sint progressionis *(aaaa)* hyper *(bbbb)* paraboloeidum. *(2)* P r o p. 1 5. *L* 13 partes *(1)* aequales secta, perpendiculares sunt in *(2)* notae *L* 16 datur *(1)* di *(2)* series *(3)* area *L* 20–506,1 difficile. *(1)* P r o p. 1 5. [*sic!*] Quotiescunque in figura quadam contingit, ut quocunque assumto curvae puncto E. *(a)* ea sem *(b)* eadem semper ratio sit *(2)* Nota perpendicularis BK = *(3)* Perpendicularis *L*

Perpendicularis $BK\,\square = [CF\,\square - EF\,\square, \beta^2 + EK\,\square.]$
$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: ABE et BLM.

$\dfrac{AB}{BL} = \dfrac{AE}{BM} = \dfrac{BE}{LM}$. $\qquad \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{BE}{EK}$.
$AB \frown BM = AE \frown BL$. $\qquad AB \frown BE = AE \frown BK$.
$AB \frown LM = BE \frown BL$. $\qquad AB \frown EK = BE \frown BK$.
$AE \frown LM = BE \frown BM$, quadrabilia. $\qquad AE \frown EK = BE\,\square$, quadrabilia.

Iam $CF\,\square = AE \frown EF$. Ergo $\dfrac{CF}{AE} = \dfrac{EF}{CF}$. vel $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{AE}{CF}$.

Ex hoc dato iam quaeratur ratio alia triangula similia construendi, quae non ex generali natura omnium figurarum, sed ex speciali ellipseos pendeant. Quod fit inveniendo aliam rationem quae sit $= \dfrac{CF}{EF}$ vel $\dfrac{AE}{CF}$.

Ducatur linea CP parallela AL. manifestum est $\dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AB}{CP} = \dfrac{BE}{[PF]}$. duo triangula rectilinea. Hinc iam $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{AB}{CP} = \dfrac{BE}{[PF]}$. item $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AB}{CP}$. item $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AB}{[PF]}$.

Totidemque construi possunt triangula similia quanquam non sint omnia futura rectilinea. Erunt tamen quaedam rectilinea et videndum quaenam ex illis futura sint similia $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ characteristico.

Quaerendum est quoddam triangulum characteristico simile cuius unum latus sit perpetuum, sive id sit latus rectum, sive transversum etc., sive distantia focorum.

1 CF$\,\square$ + CE$\,\square$, β^2 + CK. *L ändert Hrsg.* 7 f. $\dfrac{\text{AE}}{\text{CF}}$. *(1)* Ergo si super recta CF erigatur $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ cuius altitudo CF quadratum *(2)* Ex *L* 11–13 PM *L ändert Hrsg. dreimal* 11 f. duo triangula rectilinea *erg. L* 14 f. sint | omnia *erg.* | futura *(1)* rectangula *(2)* rectilinea *L* 15 sint *(1)* aequalia *(2)* similia *L* 17 characteristico simile *erg. L*

11 Ducatur: Die Linie CP hat Leibniz in der Figur nicht ausgeführt. Die Punktbezeichnung P tritt in der Figur in anderer Funktion auf.

[*Teil 2*]

⟨— —⟩ ⟨m⟩edia proportionalis inter EK et KA. id est inter EK et E⟨— —⟩
⟨— —⟩ $Rq\,EK\,\square + AE \frown EK$.
⟨— —⟩ ⟨—⟩$EK\,\square + BE\,\square$.

Investigandus est locus omnium BK. altitudini applicatorum, seu locus $Rq\,EK\,\square + BE\,\square$. Videndum ad non BP fieri debeat radius. Pro $BE\,\square = \dfrac{a^2 - EL\,\square}{\gamma}$ fiet $BK = Rq\,EK\,\square + \dfrac{a^2 - EL\,\square}{\gamma}$. ratio autem $EK\,\square$ ad $\dfrac{EL\,\square}{\gamma}$ semper eadem δ. et ideo $EK\,\square = \dfrac{EL\square}{\delta\gamma}$. fiet: $\dfrac{a^2}{\gamma} - \dfrac{EL\,\square}{\delta\gamma - \gamma}$ [*sic!*].

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AE} = \frac{BK}{BE}.$$

$$AK = \frac{AB\,\square}{AE} = \frac{AE\,\square + BE\,\square, \frown EF}{CF\,\square}. \qquad EK = \frac{AE\,\square + BE\,\square, \frown EF}{CF\,\square} - \frac{CF\,\square}{EF}.$$

$$\frac{CF\,\square\square}{EF\,\square} + \beta CF\,\square - AF\beta\,\square = AB\,\square = AK \frown AE.$$

$$AK\,\square - AB\,\square = BK\,\square. \qquad AB \frown BK = AK \frown BE. \qquad BK = \frac{AK \frown BE}{AB}.$$

NB. Haberi potest summa quadratorum omnium EK (quippe pyramis) et omnium EB. ergo et omnium KB.

3 AE $\frown$ EK. | $= \dfrac{\mathrm{CF}\,\square}{\beta}$. Erit ergo ⟨— —⟩ *gestr.* | *L*   4 BE$\square$. | ⟨— —⟩$\dfrac{\mathrm{CF}\,\square}{\mathrm{EK}\beta}$. | Ergo *nicht gestr.* | ⟨— —⟩$\dfrac{⟨—⟩\mathrm{F}}{\mathrm{Rq}\,\beta}$. absurdum ⟨—⟩ enim omnes BE $=^{\text{les}}$. *gestr.* | *L*   5 | Latus transversum q. rectum r. Ergo $\dfrac{\mathrm{EK}}{\mathrm{EF}} = \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{q}}$. Ergo EK $= \dfrac{\mathrm{r} \frown \mathrm{EF}}{\mathrm{q}}$. $\dfrac{\mathrm{EK} \frown \mathrm{q}}{\mathrm{r}} = \mathrm{EF}$. *gestr.* | Investigandus *L*

2–4 Trotz des Textverlustes ist die Rechnung klar: Leibniz berechnet die Größe BK auf zweierlei Weise. Aufgrund der (irrigen) Beziehung $CF\,\square = AE \frown EF$. folgt dann ein absurdes Ergebnis, worauf Leibniz streicht und nur die (richtigen) Ausgangsformeln stehen lässt.   5 Die folgende Betrachtung leidet unter Rechenfehlern und unklarer Bezeichnungsweise; sie wird von Leibniz ergebnislos abgebrochen.   11 Leibniz verwendet hier bei der Quadratbildung keine Klammern; AF ist eine Verschreibung für EF.

NB. BK ad $BP = EK$ ad EF. Ideo porro EK semper ad EF eandem habet rationem, quae est lateris recti ad transversum. Ergo tum summa omnium EK ad summam omnium EF erit ut latus rectum ad transversum, verum etiam momentum curvae ex altitudine ad momentum curvae ex basi, ergo dato uno dabitur alterum, seu data quadratura circuli dabitur q. hyp. et vicissim, imo et sectio angulorum universalis. Imo e r r o r habeo tantum perpendicularium ad basin summam ad altitudinem. Non summam eorum ad basin.

Haberi possunt et omnia AE in EK id est quadrata $\dfrac{CF\,\square}{EF} \frown EK$. id est $CF\,\square$ multiplicata per rationem lateris recti ad transversum. Ergo habemus et $\square^{\text{ta}}$ omnium AB.

Ex prop. 6 hanc consequentiam duco: cum perpendicularis super altitudinem ad basin, sit $= EK$ ad arcum, et EK ad arcum sit ad EF ad arcum, ut latus rectum ad transversum, et EF ad arcum = perp. super basin, ad axem, ergo perpendicularis super axem ad basin, ad perpendicularem super basin ad basin, seu BK ad BP ut latus rectum ad transversum: confirmatio priorum.

Summa omnium BP ad altit. = omnibus MP ad arcum (ob $\bigtriangledown BMP$).

Ad p r o p. 8. Cum autem sit $\dfrac{AE}{BM = EF} = \dfrac{AB}{BL} = \dfrac{BE}{LM} = \dfrac{CF\,\square}{EF\,\square}$. quia $AE = \dfrac{CF\,\square}{EF}$. hinc multae possunt consequentiae duci. Primum $EF\,\square$ ad arcum quadrari pot-

---

1 f. *Zusätzlich daneben in größerer Schrift:* NB.

4 f. *Daneben:* Error

18–509,1 *Darüber:* Dubito; *zusätzlich daneben:* ♃.

6 perpendicularium | hyp. *gestr.* | *(1)* relationem *(2)* ad basin *L* 11 cum *(1)* perpendicularium super altitudinem summa *(2)* perpendicularis *L* 14 super *(1)* axem ad altitudinem, ut *(2)* basin *L* 18–509,1 Primum | EF □ ... spatium hyp. *gestr. und wieder gültig gemacht* | Quod *L*

---

17 Ad p r o p. 8.: Die folgende Betrachtung ist nur teilweise richtig.

est, nam EF ad arcum est, spatium hyp. Quod si ducantur in EF triangularia, quadratur, cum habeatur eius momentum, modo per rationem CF ad FL multiplicetur. $CF\,\square$ autem ad arcum est superficies cylindrica elliptica ducta in CF. Hoc verum constet, si momentum applicatarum spatii hyperbolici sit ex diametro coniugata, quod probabile puto, cum decrescat momentum cum applicata. Sin minus EF in arcum saltem pendebit ex q. hyp. sed credibilior quadrabilitas, quia Hug. pag. 78. iunct. pag. 77. satis explicare videtur EF in arcum pendere ex hyperbola pag. 78. descripta. Eius autem momentum cum applicata decrescens est ex summitate eius E. id est ex diametro coniungata.

$CF\,\square$ ad altitudinem, ut et $EF\,\square$ ad altit. quadrabilia. $CF\,\square$ ad basin quadrabilia, $EF\,\square$ ad basin non sunt quadrabilia, sed pendent ex q. circ.

NB. Cavendum, neque enim ratiocinandum est ad rationum summas.

[*Teil 3*]

Ex prop. 4. et 5. habemus duas methodos universales: cuicunque superficiei curvae ex revolutione genitae, exhibere planam aequalem. Et nunc utilius est tangentes ad basin, nunc perpendiculares ad rectam exhibere, prout scilicet figura quae oritur simplicior aut tractabilior est, apparet autem figuras illas quanquam heterogeneas esse inter se aequales. Hinc cuilibet opinor figurae dari potest heterogenea aequalis. Et vicissim ut arbitror cuilibet planae aequalis superficies curva, investigando scilicet locum eiusmodi applicatarum ad altitudinem transformatarum in perpendiculares, et applicatarum ad basin transformandarum, in tangentes.

7 videtur *(1)* spatium *(2)* momentum *(3)* EF *L* 10 f. circ. *(1)* Hinc summa omnium *(2)* NB. *L* 11 summas. | EK sic exprimi debet, vide Schoten. p. 245 ad Cartes.: EK (*(1)* = LMC *(2)* LM = PM ex fig. Schoten.) *gestr.* | *L* 13 *(1)* Notandum est cum duos invenerim modos *(2)* Ex *L* 18 cuilibet *(1)* rectae *(2)* curvae ae *(3)* planae *L*

6 Hug.: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 77 f. (*HO* XVIII S. 215–221). 10 $EF\,\square$ ad basin: Auch diese Beziehung ist im Sinne von Leibniz quadrierbar. 22 vide: s. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, *DGS* I S. 245, s. a. oben S. 504 Z. 10 f. Leibniz bezieht sich auf folgende Figur:

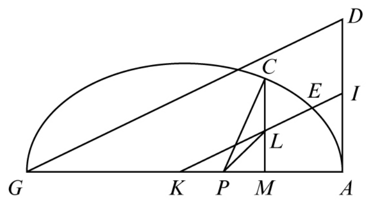
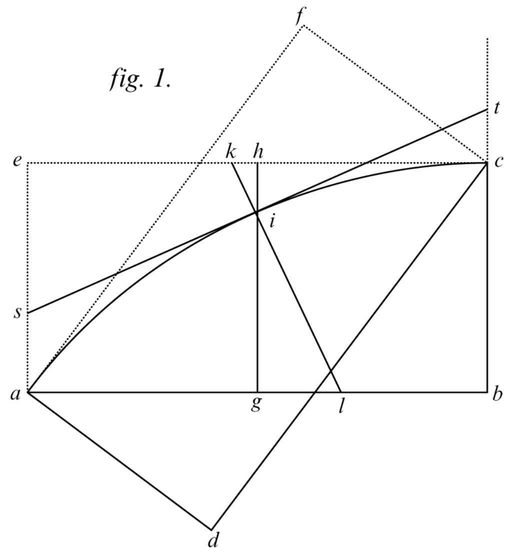


fig. 1.



[*Fig. 2*]

Vicissim cum infiniti assumi possint axes, circa quos aliqua curva data agi intelligatur non est dubitandum, quin ab una qualibet linea curva describi possint, et fortasse complures superficies, in circulos commutabiles, ut curva [*ac*] agi potest circa axem *ab* et *bc*, et *ad* et *cd*. Imo et *ae* et *ec*, et *af* et *cf*.

Nota autem si duo axes paralleli sibi oppositi sint, ita, ut circa unum ut *ab* describatur superficies curva concava, circa alterum ut *ec* superficies curva convexa; momenta sibi mutuo complemento esse ad superficiem curvam cylindricam cuius basis curva *ac*, altitudo, ipsa *ae* distantia parallelorum axium [*ab* et *ce*. Nota].

Cuius rei haec demonstratio est. Quoniam enim cuiuslibet arcus infinite parvi ut *i*, momentum ex *ab* est ipsa recta *ig* seu distantia ab axe librationis, in arcum cuius momentum quaeritur, ducta, vel quod idem est, ei perpendiculariter imposita; et vicissim

3 qualibet | linea *erg.* | curva *(1)* | inf *gestr.* | occurrere *(2)* describi *L* 4 ad *L ändert Hrsg.* 6 paralleli *erg. L* 9 ab, et N. *L ändert Hrsg.* 10 cuiuslibet *(1)* exigui *(2)* arcus *L*

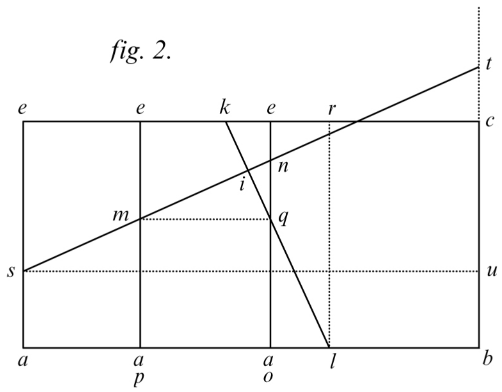
1 [*Fig. 2*]: Zu dieser Figur hat Leibniz eine Vorform gezeichnet. Diese ist gänzlich in der endgültigen Figur enthalten; sie wird deshalb nicht gesondert wiedergegeben.

momentum arcus $\underline{i}$, ex axe librationis $\underline{ec}$ est recta $\underline{ih}$. arcui imposita. Apparet autem ubicunque punctum $\underline{i}$ sumatur semper $\underline{gi} + \underline{ih} = \underline{ae}$. Ergo summa omnium $\underline{gi}+$ $\underline{ih}$ arcui impositorum seu summa utriusque momenti eiusdem arcus tam ex recta $\underline{ab}$ quam ex opposita $\underline{ec}$. erit summa omnium $\underline{ae}$, arcui eidem impositorum, seu superficies cylindrica cuius basis curva $\underline{ac}$. altitudo recta $\underline{ae}$.

Hinc sequitur dato momento curvae ex recta $\underline{ab}$. et data recta curvae aequali, haberi etiam ex recta $\underline{ec}$. Item patet, si summa momentorum ex $\underline{ab}$ et ex $\underline{ec}$ habeatur, habitum iri, quicunque alii axes v. g. $\underline{ad}$. $\underline{df}$ assumantur, semper enim erunt istae summae, ut axes. Ideo innumeras figuras heterogeneas aequales hac methodo rursus habebimus. Hinc etiam methodi innumerae investigandi quantitatem ipsius curvae, sive possunt infinita exhiberi spatia a quorum quadratura curvae ipsius extensio pendeat.

Nec proinde desperandum, ex infinitis methodis occurrere posse unam pluresve in unaquaque curva, quibus incidatur in spatium quadrabile, quo proinde rectae aequalis curva exhibeatur.

Hinc illud quoque apparet summam omnium perpendicularium $\underline{kl}$ ad altitudinem seu axem $\underline{ab}$, aequari ipsi $\underline{ae}$ in totam curvam. Quod aliter quoque ac simplicius sic demonstratur:



[*Fig. 3*]

2 f. ih | arcui impositorum *erg.* | *(1)* erit summa omnium ae, seu *(2)* seu *L* 8 f. ut *(1)* axis ab ad axem *(2)* axes. Ideo *(a)* si quando haberi possit *(b)* innumeras *L* 15 f. altitudinem | seu axem ab *erg.* | , aequari *(1)* omnibus hg *(2)* ipsi ae in | totam *erg.* | curvam. *L*

Ducta ad curvam perpendiculari *kil* per punctum datum *i* inter duos axes parallelos *ab*, *ec* intercepta, et tangenti *mn* producta utcunque, rectangulum sub parte eius *mn* cadens in duas perpendiculares ad axem utrumque, *ep*, *eo*, et distantiam axium, *ea*, aequatur rectangulo sub distantia perpendicularium tangentis partem abscindentium et perpendiculari ad tangentem. Idem nulla facta curvae mentione lemmate pulcherrimo sic enuntiabitur: Si duae rectae (*mn* et [*kl*]) se secent ad angulos rectos; et unaquaeque earum cadere intelligatur inter duas parallelas, (*mn* inter parallelas [*ep*], *eo*, decussatim *kl* inter parallelas *ec*, *ab*), sintque parallelae unius perpendiculares ad parallelas alterius, ductis rectis in distantias parallelarum; altera in distantiam parallelarum alterius, rectangula producta erunt aequalia inter se.

Ostendendum est $EA \frown MN = KL \frown PO$. quod fiet si ostendemus $\dfrac{EA}{PO} = \dfrac{KL}{MN}$. Id vero ita ostendo[:] $\bigtriangledown^{\text{la}}$ NQM et KRL similia sunt, nam angulus LKR $\bigtriangledown^{\text{li}}$ orthogonii KRL idem angulo QKE $\bigtriangledown^{\text{li}}$ orthogonii KEQ, at idem angulus QKE aequalis angulo MNQ vel INQ, quia haec duo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ rectangula NIQ et KEQ habentia unum angulum non rectum communem, KQE, habebunt alteros EKQ et INQ aequales. Ergo anguli INQ vel $MNQ = QKE$ vel LKR. ac proinde in duobus triangulis orthogoniis $MQN.KRL$ duo anguli non recti LKR et MNQ aequales, triangula ergo similia sunt.

1 *(1)* Esto tangens curvae mn, perpendicularis *(a)* inter *(b)* ad tangentem *(aa)* per *(bb)* in ipso contactus puncto, inter duos axes parallelos ducta kl. *(2)* Ducta | ad curvam *erg.* | perpendiculari kil *(a)* inter duos axes ab et ec intercepta, et ex punctis kl ductis | intra duos axes *erg.* | parallelis et aequalibus ipsi ea, nempe ema et ena. *(b)* per *L* 2 utcunque, *(1)* pars eius *(a)* incidet *(b)* incidens *(2)* rectangulum *L* 3 utrumque, | ep, eo, *erg.* | *(1)* ducta in *(2)* et *L* 6 el *L ändert Hrsg.* 7 en *L ändert Hrsg.* 8 alterius, *(1)* rectangula sub recta una et distantia parallelarum alterius | rectae *gestr.* | *(2)* ducta recta *(a)* una in al *(b)* qualibet *(3)* ductis *L* 12 sunt *(1)*, cum sint rectangula, et praeter angulum rectum, habeant alium quoque aequalem. *(2)*. Nam | $\bigtriangledown$ *erg.* | *(a)* QSN simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ *(b)* QMN simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ | et *gestr.* | QSN | simile *gestr.* | et hoc $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ *(aa)* QKN, cum sint $\bigtriangledown$ rectangula, et habeant *(bb)* QKE. et hoc $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ LKR. Sunt enim omnia rectangula angulum *(aaa)* comm *(bbb)* LKR praeter rectum habentia communem. Igitur angulus RLK = angulo *(3)*, nam | in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ rectangulo KEQ *erg.* | angulus KQE = angulo | trianguli rectanguli LKR *erg.* | KLR. ergo angulus *(a)* SNQ *(b)* QKE eiusdem $\bigtriangledown^{\text{li}}$ | QKE *erg.* |= angulo RKL. trianguli rectanguli LKR. *(4)*, nam *L* 14 MNQ *(1)* trianguli orthogonii NQM *(2)* vel *L*

11 Ostendendum: Ab hier wechselt Leibniz die Bezeichnungsweise und geht zu Großbuchstaben über. Gelegentlich vorkommende Kleinbuchstaben werden vom Hrsg. normalisiert.

Ideo ut est KL ad MN, ita $RL = EA$ ad $MQ = PO$. Ergo $\dfrac{EA}{PO} = \dfrac{KL}{MN}$. ac proinde $EA \frown MN = KL \frown PO$. Quod erat demonstrandum.

Est et alterum theorema longe facilius demonstratu[:] nempe tangentem MN productam ST dum duabus parallelis AE. BC occurrat in S et T. ductam in MQ, intervallum duarum parallelarum EP. EO aequari semper intervallo alterarum parallelarum EA, CB, nempe AB in MN. Quod si intervallum PO sit infinite parvum MN, erit portio arcus infinite parva. Ducta enim SU, patet $\bigtriangledown^{\text{la}}$ SUT et MNQ esse similia. Hinc $\dfrac{ST}{MN} = \dfrac{SU}{MQ} = \dfrac{UT}{NQ}$. Ergo $ST \frown MQ = SU \frown MN$. ut habuimus. Item $ST \frown NQ = UT \frown MN$. item $SU \frown NQ[= UT \frown MQ.]$

NB. Omnia UT in arcum quadrari possunt, videndumque quodnam id sit figurae genus.

$\dfrac{KL}{MN} = \dfrac{KR}{NQ} = \dfrac{RL = EA}{MQ}$. Ergo $KL \frown NQ = KR \frown MN$. perpendicularis in basin $= KR$ in arcum. Item $KL \frown MQ = EA \frown MN$. habuimus, denique $EA \frown NQ$ distantia basium in altitudinem $= KR$ in basin. Haec ergo figura curva semper quadrabilis, quae orta ex omnibus KR ad basin. Ex hoc principio licet infinitas figuras curvilineas quadrabiles, quae tamen paraboleides non sunt, comminisci, quemadmodum paulo ante

---

12–14 *Dazu auf der Gegenseite, mit dem Zusatz* minime *versehen und gestrichen:* Si in aliqua figura contingeret, ut perpendicularis ad basin, et ad altitudinem summari posset, posset et summari perpendicularis ad arcum, quia adiuncta recta quadam, summaretur perpendicularis in rectam illam ducta, ad basin + perpendicularis in rectam illam ducta, ad altitudinem. Ergo perpendicularis in rectam illam, in quadratum basis, item, in quadratum, altitudinis. Ergo in quadratum arcus. Productum dividatur per illam rectam. Erat quotiens perpendicularis in arcum. Hinc duco regulam generalem memorabilem. Si ex his tribus parte (inassignabili) basis, altitudinis, arcus summari possunt rectae quaedam assignabiles in duas horum, summari poterunt et in tertium.

4 ductam in *(1)* MN, portionem tangentis a duabus parallelis EP. EO abscissam *(2)* MQ *L* 5 alterarum *erg. L* 6 EA, CB, nempe *erg. L* 8 Hinc *(1)* intervalla parallelarum *(2)* portio tangentis inter parallelas in *(3)* $\dfrac{\text{ST}}{\text{MN}}$ *L* 9 f. NQ. | Ergo NB. *ändert Hrsg.* | NB. Omnia *L* 19 posset, *(1)* daretur quadratura circuli *(2)* posset *L*

infinitas superficies curvilineas truncatas quadrabiles. Ergo methodus ex qualibet figura curvilinea data exhibere aliam quadrabilem.

Ex his patet etiam semper quadrata omnium [KL] summari posse, quia semper summari possunt puto $\square^{\text{ta}}$ omnium KR. et omnium RL. quae semper eadem. Ergo eorum momenta habentur seu cylindri eorum revolutione circa CB facti. Quod satis memorabile. Imo puto esse falsum.

Nota si momenta summentur ex duobus diversis axibus in uno puncto concurrentibus haberi potest linea recta in quam cadat centrum gravitatis, si hoc adhuc alia vice, habebitur in linearum intersectione centrum gravitatis, quo reperto habebitur dato momento curva quaesita.

Nota porro: lineam illam haberi posse etsi non quadratura, modo ratio tantum haberetur, v. g. si duae essent ellipses.

Quando quadratum arcus consideratur omnia redduntur facillima, quia illud quadratum, componitur ex quadratis basis et altitudinis minimae. Ideo quorum quadrata applicantur ad arcum, idem est ac si eorum quadrata applicarentur ad quadrata basium minimarum separatim, et ad quadrata altitudinum minorum separatim. Idem est de omnibus ductibus, ad arcum applicatis, componuntur enim ex iisdem ductibus ad arcum, et iisdem ductibus ad basin. Ideo v. g. sinus ad arcum, ducti in radium ad arcum, aequantur radio in sinum ad altitudinem, auctam radio in sinum ad basin.

---

1 f. *Daneben in größerer Schrift:* NB. NB.

18 f. *Dazu am oberen Rande, gestrichen:* Dubito: nam sinus summantur in basin et in arcum, sed non in altitudinem nisi per tetragonismum. Eodem argumento, data dimensione hyperbolae et conchoeidis daretur dimensio circuli; quia secans ad altitudinem ex hyp. secans ad basin ex conchoeide secans ad arcum ex circ. pendet. Eodem argumento modus haberetur reperiendi momentum ellipseos, seu eius perpendiculares ad altitudinem. Nam eius perpendiculares ad basin [*bricht ab*]

3 KR *L ändert Hrsg.* 7–12 Nota si . . . essent ellipses. *erg. L* 10 curva *(1)* parabolica *(2)* quaesita *L* 13 facillima | componitur *streicht Hrsg.* | , quia *L*

Generaliter inquirendum est in ductus in partes minimas, proportionales magnis.

Methodus data linea curva inveniendi figuram, a cuius quadratura quantitas curvae pendeat. Hoc facillimum est. Et calculi res est postea invenire figuras quadrabiles, et ideo curvas quoque in rectam reducibiles. Haberi potest iam curva v. g. cuius dimensio pendet a quadratura v. g. alterius cuiusdam hyperboloeidis, etc., aut figurae alterius etc. Ita ut data figura haberi possit curva cuius dimensio pendet ab ista quadratura, contra data quacunque curva quadrabili in rectam dudum commutabili, invenire spatium quadrabile ex ista commutatione. Ideo quot nobis Hugenius dedit curvas in rectam commutabiles, tot ergo spatia quadrabilia dabo.

Habeo et aliam methodum determinandi spatia quae pendent a curvarum rectificatione, et contra; et videndum an non coincidat priori. Si non coincidit sic dici potest: Data qualibet curva geometrica rectificabili, dare duas figuras geometricas diversas unamquamque ex illis quadrabilem. Et dato quolibet spatio quadrabili exhibere duas curvas diversas quamlibet in rectam commutabilem.

[*Teil 4*]

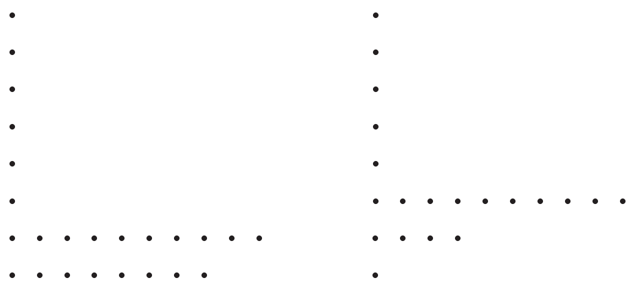
In Höhe von S. 506 Z. 2 (Bl. 360 v°):

h	h	h	h	h	h	h	h
g	g	g	g	g	g	g	
f	f	f	f	f	f		
e	e	e	e	e			
d	d	d	d				
c	c	c					
b	b						
a							

1 est in *(1)* proportio *(2)* ductus *(a)* radiorum pro *(b)* pari *(c)* in partes *L* 1 proportionales *(1)* maximis *(2)* magnis *L* 2 data *(1)* figura curva inveniendi rectam *(2)* linea *L* 3 est. *(1)* Sed difficile invenire figuras *(2)* Et *L* 4 iam *(1)* figura cuius *(2)* curva *L* 7 quadrabili *erg. L* 7 dudum *erg. L* 10 determinandi *(1)* curvas infinitas, q *(2)* spatia *L* 12 curva | geometrica *erg.* | *(1)* quadrabili *(2)* rectificabili *L*

8 Hugenius dedit: s. v. a. *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil III Satz XI, S. 81–90 (*HO* XVIII S. 224–241) — s. a. N. 2.

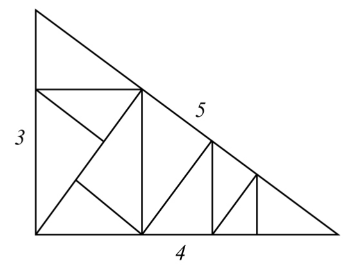
Unter S. 506 Z. 18 (Bl. 360 v°):



1	
3	4
6	10
10	20

$$\frac{a^2}{\underline{\underline{1}}}\quad \frac{a^2}{2}\quad \frac{a^2}{3}\quad \frac{a^2}{3 \frown 3}\quad \frac{a^2}{9}.\qquad \text{Ergo}\ \ \frac{x}{3}\left\{\frac{\frac{a^2}{3}}{3}\right. = \frac{a^2}{9}.$$

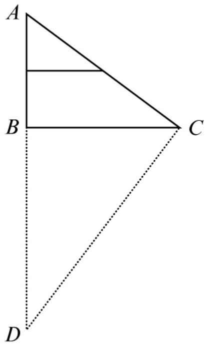
Neben S. 510 Z. 4 – S. 511 Z. 7 (Bl. 359 v°):



[*Fig. 4*]

$10 \frown 4 = 40$	$10 \frown 5 \frown 4 \frown 4 = 800$	$ab25 - ab16 = x.$
$10 \frown 5 = 50$	$10 \frown 5 \frown 5 \frown 5 = 1250$	Ergo $25 - 16 = \dfrac{x}{ab}.$
$\underline{10 \frown 3 = 30}$	$10 \frown 5 \frown 3 \frown 3 = \cancel{4}\cancel{5}0\ \cancel{/}\ 30$	Ergo $25b - 16b = \dfrac{x}{a}$
	$\cancel{1}\cancel{5}\cancel{5}$	$ab25 - ab16 = ab9.$
	$\cancel{1}$	Ergo [*bricht ab*]

Über S. 514 Z. 13 (Bl. 360 r°):



[*Fig. 5*]

$AC \frown \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AC \frown BC}{2}$.

Iam $\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{AC}{AB}$.

ergo $CD = \dfrac{AC \frown BC}{AB}$.

ducta in AB dat(!)

$\dfrac{AC \frown BC}{2}$ seu AC

ductum in distantias ab AB.

7 AB. | sed huius dimidium *gestr.* | *L*

29. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM SPECIATIM DE TROCHOIDIBUS ET CYCLOIDE

[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 353–354. 1 Bog. 2°. 4 S. Unterer Rand des Bogens bestoßen mit kleineren Ausrissen, starke Abschabung bis hin zu Fehlstellen auf Bl. 353 r° links unten, dadurch geringfügiger Textverlust S. 522 Z. 3 f. und S. 527 Z. 7. Überschrift und Bezeichnung der Figuren ergänzt. Bl. 354 v° = Teil 4 insgesamt gestrichen.
Cc 2, Nr. 549

Datierungsgründe: s. N. 28.

Triangulum characteristicum, speciatim de trochoidibus et cycloide.

[*Teil 1*]

Universalium de lineis curvis specimen, vide in iis quae de ellipsi dixi. — Regula generalis est, ut tot constituantur trianguli similes characteristico, quot fieri utiliter possunt. Utiliter inquam, id est ut latera facilius et alia quam hac trianguli similis via haberi possint.

Utile est etiam figuras quaerere, quarum eaedem sunt perpendiculares vel tangentes cum data, vel in quibus tangens datae est perpendicularis, vel perpendicularis datae est tangens; vel si non eaedem saltem parallelae sibi aut quod cum prioribus eodem redit, perpendiculares.

In his figuris in quibus tangens unius est perpendicularis alterius, similia sunt quidem triangula characteristica sed ita ut altitudines et bases earum sint reciproce proportionales seu

$$\frac{\text{altitudo } A}{\text{basis } A} = \frac{\text{basis } B}{\text{altitudo } B}.$$

12 et cycloide *gestr. u. wieder erg. L*

14 vide: s. N. 28.

Idque contingit quando curva unius, evolutione alterius describitur. Et quando curva evoluta rursus evolutione alterius describitur, haec ultima evoluta est directe proportionalis primae illi evolutione descriptae.
Omnes autem figurae directe proportionales sunt similes quodammodo, vel homogeneae. Hinc data qualibet curva, invenire possumus genus eius curvae quae evolutione ipsius describeretur, erit enim homogenea ei cuius evolutione descripta est data.
Hinc iam quaestio est, an non per analysin possimus ex infinitis curvis eiusdem speciei eligere eam, in qua tangens unius sit perpendicularis alterius, ita enim curvae datae aequalem invenissemus rectam.

Dato momento curvae ex axe quodam, et distantia centri gravitatis curvae ex eodem axe, datur ipsa curva. Datur et aliter centrum gravitatis curvae, ex pluribus momentis. Ergo ex pluribus momentis inter se collatis datur ipsa curva.

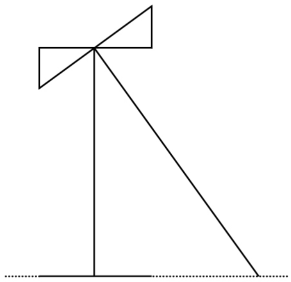
Sunt quaedam curvae in quibus rectae quaedam, quas cum Mydorgio parametros vocare possis, vel cum veteribus latera recta, intelligi queunt. Sunt et quae focos habent.

Danda opera est, ut regula detur generalis, inveniendi ordinatim applicatas ad basin, ex ordinatim applicatis ad axem.
Imo hoc facile est. Ex communi methodo geometriae locorum.
Regula generalis dimetiendi areas omnium trochoeidum, sive rota sit circularis, sive elliptica, sive etiam hyperbolica, aut parabolica. Regula autem generalis est: Summam triangularem arcuum aequari summae perpendicularium ad basin illam a qua incipitur. Ideo videndum an tota trochoeis parabolica possit quadrari, quia potest quadrari tum summa arcuum, tum ipsa parabola. Imo poterunt et omnes huius trochoeidis parabolicae portiones quadrari. Et videndum an non hoc pacto trochoeis ista tota sit figura ex genere paraboleidum, quo posito haberetur eius basis, data altitudine et summa. Imo fortasse portiones abscissae trochoeidis parabolicae non poterunt quadrari.

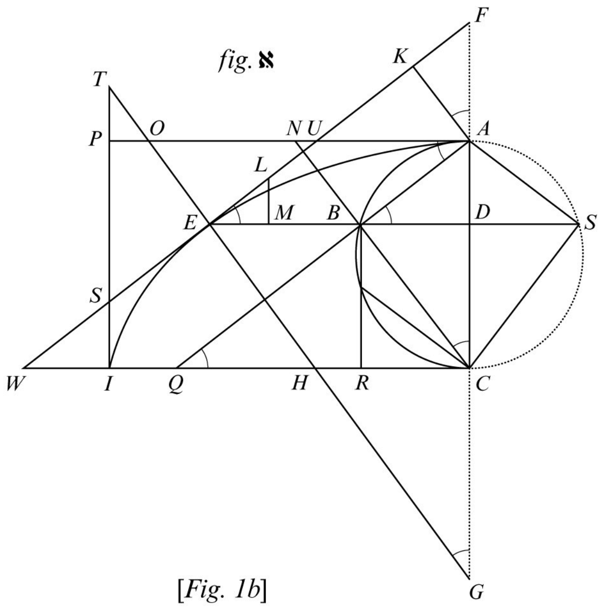
Doctrina de intervallis tangentium, quibus curvae applicatis, segmenta figurae cuiuslibet metior, tum maxime usum habere potest, cum curva ipsa area tractabilior est, ut exempli causa in iis lineis curvis quarum conversionem in rectas Hugenius docuit.

13 quibus *(1)* lineae *(2)* rectae *L* 15 generalis, *(1)* comparandi inter se *(2)* inveniendi *L* 20 triangularem *erg. L* 23 pacto *(1)* veniatur ad prog *(2)* trochoeidis *(3)* trochoeis *L*

13 cum Mydorgio: Mydorge, C., *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum . . . libri*, 1631, S. 3. 28 Hugenius docuit: *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil III Satz XI, S. 81–90 (*HO* XVIII S. 229–241).



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

In cycloeide notabile est triangulum eius characteristicum simile non triangulo characteristico circuli, sed triangulo chordarum in circulo. Esto semicirculus, applicata eius BD producatur dum occurrat cycloeidi in E. ex E demittatur perpendicularis EHG. ea est parallela ipsi BC. ideo BA parallela ipsi EF tangenti cycloeidis in E. ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ABD et FED: characteristicum cycloeidis similia. Hinc materies multarum mirabiliumque propositionum. Porro patet $EB = HC$. uti $EH = BC$. Ergo $EH = HG$. Hinc statim habetur momentum curvae cycloeidis AIC ex axe AC. perpendicularis enim EG ex puncto assumto E ducta in axem AG productum si opus est, est dupla chordae BC. Summa autem omnium chordarum est parabola, cuius basis et altitudo diameter, po-

1 *Neben fig.* ℵ: Summa omnium FA ad basin semper aequatur duplo segmento EA.

7 *Unter* Ergo $EH = HG$: Male HG non est $= EH$.

8 f. EG ex puncto assumto E *erg.* *L*

sita AC secta in partes aequales infinitas, et eius parabolae dupla est momentum curvae AEI ex axe AC. Hac ergo quadrata habetur momentum curvae, et eo habito, statim superficies eius curva.

DB et BE datae intelliguntur ut et $AB.AD$. hinc facile FE. Nam: $\dfrac{FE}{AB} = \dfrac{ED}{BD}$. Ergo $FE = \dfrac{ED \frown AB}{BD}$.

Triangulum characteristicum cycloeidis est EML. Et EL arcus, LM altitudo, EM basis, huic simile $\bigtriangledown ABC$. et ang. LEM idem cum angulo BCA. Ergo: $\dfrac{AC}{EL} = \dfrac{BC}{EM} = \dfrac{AB}{LM}$.

(1) Ergo $AC \frown EM = BC \frown EL$. Applicatae parabolae inversae ad arcum cycloeidis aequantur diametro in cycloeidis basin. Ergo pendent ex q. circ. adde 15. et 17. Hinc earum quadrata ad arcum haberi possunt, si enim in arcus cycloeidis ducantur, aut si in se ipsas per diametrum divisas idem est. Ergo si chordae istae in arcus cycloeidis, multiplicentur per diametrum, fient earum quadrata ad arcum.

(2) $AC \frown LM = EL \frown AB$. Applicatae parabolae recta ad arcum cycloeidis, aequantur diametro in altitudinem. Ergo quadrabiles, adde prop. 7.

(3) $BC \frown LM = AB \frown EM$. Applicatae parabolicae ad altitudinem recta, ad basin cycloeidis inverse sumtis aequantur. Ergo posteriores illae etiam quadrabiles. Quadrabiles ergo chordae ad arcum circuli, eae aequantur momento curvae cycloeidis ex basi. Hinc dimensio curvae cycloeidis nova methodo, sunt enim chordae eius indivisibiles ut perpendiculares eius, seu ut chordae supplementales circuli. Ergo ut est

---

3 *Hinter* curva: Male

9 inversae *erg. L* 10–13 Ergo pendent ... ad arcum. *erg. L* 15 Ergo ... prop. 7. *erg. L* 17–522,5 Quadrabiles ergo ... ad altitudinem. *erg. L* 19 f. enim *(1)* appli *(2)* chordae eius | indivisibiles *erg.* | ut *(a)* chordae, *(b)* perpendiculares *L*

9–523,16 Im Folgenden wendet Leibniz das charakteristische Dreieck zugleich auf die Zykloide und ihren erzeugenden Kreis an. Seine Kernaussagen sind korrekt, lediglich einige Schlussfolgerungen sind — nicht zuletzt aufgrund einer noch unpräzisen Terminologie — unrichtig.

maxima chordarum supplementalium, seu diameter in arcum semicirculi, ad parabolas ad arcum quadrabiles, ita est arcus semicirculi seu basis cycloeidis in chordam indivisibilem maximam ducta ad curvam cycloeidis. Si dim⟨— —⟩ curvae cycloeidis datur ⟨qua— —⟩ omnium OH ad arc. circ. et omnium FES ad arc. ⟨circ.⟩ aut omnium TG. seu omnium WU vel AQ ad altitudinem.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ s i m i l i a CAN et EML. CN secans falsa, AN tangens falsa, AC diam. $\dfrac{CN}{EL} = \dfrac{AC}{EM} = \dfrac{AN}{LM}$.

(4) $CN \frown EM = AC \frown EL$. Secantes falsae in basin cycloeidis = diametro in arcum eius, et ideo quadrabiles.

(5) $CN \frown LM = AN \frown EL$. Secantes falsae in altitudinem cycloeidis, seu earum summa = tangentibus falsis in eius arcum.

(6) $AC \frown LM = AN \frown EM$. Diameter in altitudinem cycloeidis = tangentibus falsis in eius basin, quadrabile, adde 7.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ s i m i l i a NBA et EML. $\dfrac{AN}{EL} = \dfrac{AB}{EM} = \dfrac{NB}{LM}$.

(7) $AN \frown EM$ = tangentes falsae in basin (quadrabiles num. 6) = $AB \frown EL$. Ergo $AB \frown EL$ quadrabiles per p. 2.

(8) $AN \frown LM = NB \frown EL$. Summa omnium AN seu tang. fals. (= segm.) = istis NB (differentiis secantis falsae a chorda suppl.). Porro ista NB vel OE spatium concavum IPA complent.

(9) $AB \frown LM = NB \frown EM$. Ergo NB ad EM. seu momentum arcus ex AP (ergo et momentum arcus ex IC), quadrabile.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ s i m i l i a : CDB et EML. $\dfrac{BC}{EL} = \dfrac{CD}{EM} = \dfrac{BD}{LM}$.

(10) $BC \frown EM = CD \frown EL$. Seu BC (chordae suppl. vel appl. invers. parabol.) ad basin cycloeidis, aequantur momento arcus ex cycloeidis basi. (Ergo q u a d r a b i l e s).

(11) $BC \frown LM = BD \frown EL$. Ergo sinus ad arcum cycloeidis (q u a d r a b i l e s).

(12) $CD \frown LM = BD \frown EM$. Iam $CD \frown LM$ quadrabiles. Ergo et $BD \frown EM$.

9 eius *erg. L* 10 seu earum summa *erg. L* 13 adde 7. *erg. L* 15 AB ⌒ EL. *(1)* quadrabiles. NB: hinc datur quadratura | seu dimensio *erg.* | a r c u s c y c l o e i d a l i s , si aliunde non daretur, ex prop. 6. + 7. *(2)* Ergo *L*

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a : ACQ et EML. $\dfrac{AQ}{EL} = \dfrac{QC}{EM} = \dfrac{AC}{LM}$. AQ secans supplementi, QC tangens supplementi.

(13) $AQ \frown EM = QC \frown EL$. [Secantes] supplementi in basin = tangentibus supplementi in arcum seu momento arcus cycl. ex altit.

(14) $AQ \frown LM$ summa secantium supplementi = $AC \frown EL$ diametro in arcum cycloeidis. (Ergo q u a d r a b i l i s).

(15) $QC \frown LM = AC \frown EM$. (dimensio cycloeidis). Summa tangentium supplementi, cycloeidis portio NB. = diametro in basin cycloeid. adde 1. et 17.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a : CBQ et EML. $\dfrac{CQ}{EL} = \dfrac{BQ}{EM} = \dfrac{CB}{LM}$. $QC = ED$.

(16) $CQ \frown EM = BQ \frown EL$. Applicatae altitudinis in cycloeid. translatae in basin = tangentibus usque ad basin productis in arcum.

(17) $CQ \frown LM = CB \frown EL$. Summa tangentium supplementi, adde 1. et 15.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a : BRQ et LME. $\dfrac{BQ}{EL} = \dfrac{QR}{EM} = \dfrac{BR}{LM}$.

(18) $BQ \frown EM = QR \frown EL$.

(19) $BQ \frown LM = BR \frown EL$.

([20]) $QR \frown LM = BR \frown EM$.

Sed hoc iam in nostra cycloeide memorabilissimum est, quod omnia theoremata inverti possunt et pro basi substitui potest altitudo, pro altitudine basis, quandoquidem hoc peculiare habet cycloeis ut a cycloeide evoluta describatur. In genere utile est evolutas considerationi adicere, inversionis eiusmodi causa, etsi in plerisque lineae rectae nonnihil turbent.

Ex prop. 19. patet curvam cycloeidis, pendere ex quadratura secantium falsarum, quarum dimidiae sunt secantes semiarcuum ut BI dimid. CG in f i g. 3. NB. ubi $\gamma\delta =$

3 QC $\frown$ EL. *(1)* Secans *(2)* Secantium supplementi summa *(3)* Secantium ... in basin *L ändert Hrsg.* 4 in *(1)* basin (| ideo *erg.* | q u a d r a b i l i b u s) *(2)* arcum *L* 5 supplementi | in basin *gestr.* | = *L* 7 (dimensio cycloeidis) *erg. L* 8 cycloeidis portio NB. *erg. L* 8 adde 1. et 17. *erg. L* 16 18 *L ändert Hrsg.* 16 BR $\frown$ EM. | (19) $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: BAS (isosceles) *gestr.* | *L* 17–21 Sed hoc ... nonnihil turbent *erg. L*

9 $QC = ED$.: Dies gilt nur in einem speziellen Fall. Leibniz wurde zu der Annahme durch eine Ungenauigkeit in der Zeichnung veranlasst. 23 f i g. 3.: s. N. 23.

$B\gamma = BI$. ubi patet ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}\ AZG$, esse GZ (sec. fals. dimidiata)$\frown$ AD. chorda $= AG \frown ZI$. ergo quadrab. vel ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}\ AIB$. $AI \frown AB = BI \frown AN$. Atqui $AN = AK = AE$. habemus ergo momentum BI secantis falsae ex vertice. Atqui prop. 6 *De ductibus* num. 4. ostensum est ex momento secantis falsae ex vertice, pendere eius quadraturam. Habemus ergo quadraturam secantium falsarum. Habemus ergo quadraturam quoque omnium differentiarum inter chordas supplement. et secantes falsas.

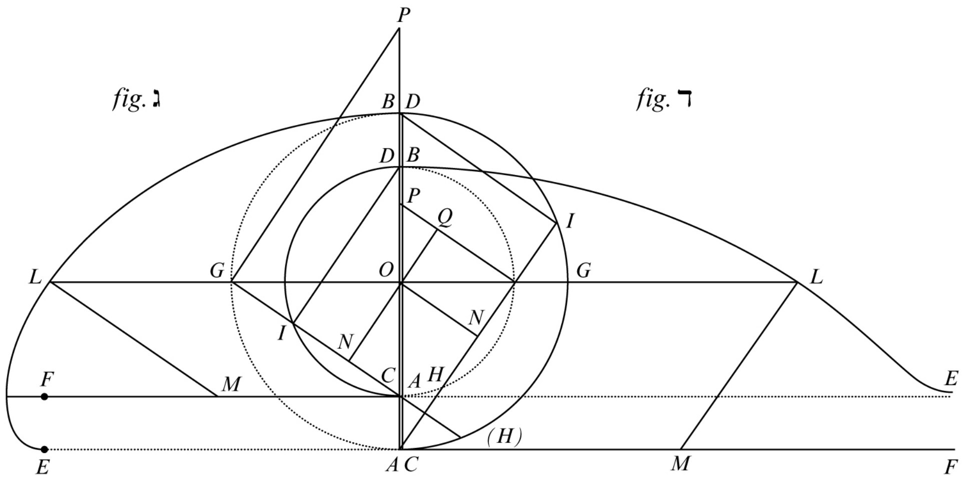
Falsum est quod $AN = AK$ vel $= AE$. Ideo potius quadratura secantium falsarum ex dimensione curvae cycloeidis accersenda, quam contra.

In cycloeide, similibusque trochoeidibus ita iniri potest ratio dimensionis curvae, si perpendicularibus ad curvam, productis [usque ad basin] ut EH, iisque infinitis, intelligantur infinita haberi triangula, quorum alia sursum alia deorsum apicem vertunt, quaeque sursum vertunt basin suam habeant in basi figurae, quae deorsum, in curva. Iam si summa habeatur primum totius figurae, uti datur certe dimensio areae cycloeidis, deinde triangulorum basin in basi habentium, residuum erit summa triangulorum ad curvam, seu (per prop. 2. hic) si duplicetur, curva ad diametrum.

10 curvam, *(1)* ad basin usque productis *(2)* productis | basin usque productis *ändert Hrsg.* | ut *L* 13 certe *erg. L* 14 deinde *(1)* curvarum basin habentium *(2)* triangulorum *L*

3 f. prop. 6 num. 4.: s. N. 26 S. 428.

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

Ad fig. ג et ד:

Iam ut data CI, investigemus CG sic agendum est: ducatur ON (dimidia DI) perpendicularis ad CI erit CN dimidia CI. restat investigemus NG (nam $NG + \dfrac{CI}{2} = CG$) quod facile est, nam $Rq\, OG^2 - ON^2 = NG$. Cumque summam CN ad curvam circularem dudum habeamus; summam NG separatim inire sufficit. Est autem $OG^2 = \dfrac{a^2}{\beta^2}$. erit ergo

$$NG = \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{2}} \quad : \quad \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{2\gamma^2}{2}} \quad : \quad \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{3\gamma^2}{2}} \quad \text{etc.}$$

Ergo locus omnium NG terminationum est curva parabolica, summa autem omnium CG ad arcum circuli aequatur summae omnium GP ad altitudinem.

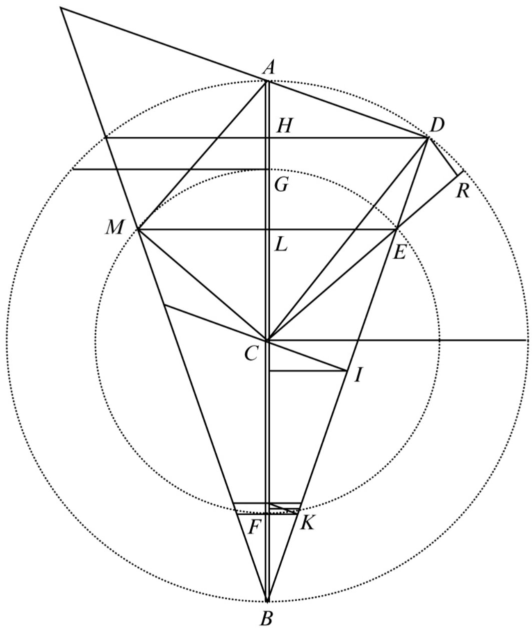
Sunt autem $\dfrac{GP}{DI} = \dfrac{CG}{CI}$. Ergo $GP = \dfrac{CG \frown DI}{CI}$.

Iam $DI \frown CI =$ diam.$\frown$ sin. $\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin.}}{DI} = CI$. $\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin.}}{CI} = DI$. Ergo

3–526,4 Die Betrachtungen dieses Abschnitts sind teilweise fehlerhaft; sie werden in N. 30 S. 541 Z. 2–11 wiederholt.

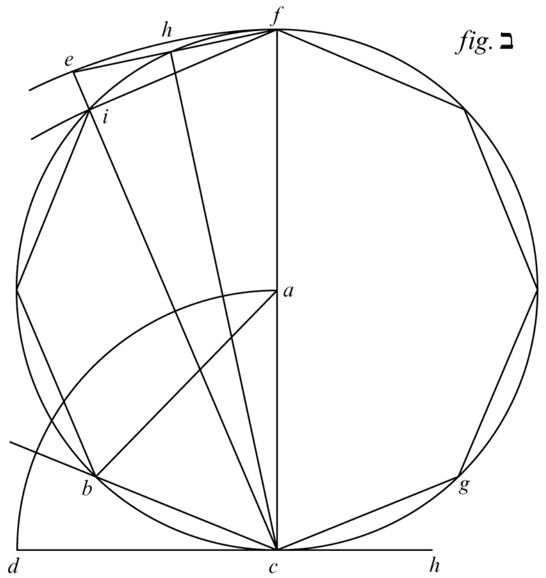
$$CG \frown \frac{DI}{CI} = CG \frown \frac{\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin.}}{CI}}{\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin}}{DI}} \text{. vel } CG \frown \frac{DI}{\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin.}}{DI}} = CG \frown \frac{DI^2}{\text{diam.} \frown \text{sin.}}.$$

Vel aliter cum detur summa ON. investigetur differentia inter PG et ON sive $Rq\,GN^2 - PO^2$. id est Rq. ex quadratis arithmetice crescentibus demtis quadratis, quadratice crescentibus, ut faciunt sinus.



[*Fig. 3, gestr.*]

5 *Zu* [*Fig. 3*], *gestrichen:*
AB nota est a. $AC = CD$. $\frac{a}{2}$. CE nota $\frac{b}{2}$. $GF = b$. $AG = FB = \frac{a-b}{2}$. $AH = c$. $BD = d$. $AD = e$. $CI = f$. parallela AD. Manifestum est $\bigtriangledown^{\text{la}}$ CIB et ADB esse similia. Ideo $CI = \frac{AD}{2}$. et $IB = \frac{DB}{2}$. quia $CB = \frac{AB}{2}$. $\bigtriangledown BFK$ simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ [*bricht ab*] In $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ orthogonio AMC cuius omnia latera dantur, quaerenda est altitudo. Sed falsum est omnia latera dari, AM non datur, quia nec punctum M datur calculo.



[*Fig. 4, teilw. Blindzeichnung*]

ang. $bac + 2abc (= 2bca) = 180$. Item ang. $bca + dcb = 90$. $acg = bca$. $dcb = gch$.

$$dcb + \underbrace{bca + \underset{bca}{acg}}_{2bca} + gch = 180.$$

Ergo $dcb + 2bca (= 2abc) + gch = bac + 2abc \, (= 2bca)$. Ergo $dcb + gch = 2dcb = [bac]$. $\langle$— —$\rangle$ cef = ang. $[dcf]$ = ang. fbc.
Ex his patet ef nihil differe in indivisibilibus a $[cb]$ vel fi. Ergo idem est basis semicycloeidis in ef, vel basis semicycloeidis simpliciter, quia ef est unitas constructionis. Ergo ut est diameter in arcum circuli, ad parabolas ad arcum (quadrabiles, ex toto vel parte semicirculi) ita est basis cycloeidis (ex toto vel parte), vel arcus circuli ad arcum

6 abc *L ändert Hrsg.* 7 dcb *L ändert Hrsg.* 8 cd *L ändert Hrsg.* 8 vel fi *erg. L*
8 est *(1)* basis *(2)* chorda inassignabil *(3)* chorda *(4)* basis *L* 10 circuli *erg. L*

1 [*Fig. 4*]: Der Buchstabe h kommt in der Figur doppelt vor.

curvae cycloeidis. Ergo semper quae est ratio quadrupli sectoris ad portionem parabolae, ea est arcus circuli ad curvam cycloeidalem. Id est portio parabolae divisa per diametrum dabit curvam cycloeidalem.

Obicitur: ef non est $= fi$. Respondeo[:] sed est tamen $\dfrac{ef}{if} = \dfrac{fc}{ch}$. sive $ec(fc) \frown fi = ef \frown ch$. (fig. ב) et quia $\underline{fi}$ est unitas constructionis, ergo $ch \frown ef = fc \frown fi$ seu $= fc$. item. Ergo $ef = \dfrac{fc \frown if}{ch}$. vel quia $\underline{if}$ unitas quae omitti potest, erit $ef = \dfrac{fc}{ch} = \dfrac{fc}{fc} = 1$. Porro omnes chordae inassignabiles, sunt ad suas perpendiculares ut $\dfrac{ef}{fc}$ seu ut $\dfrac{if \text{ unitas}}{ci}$. Ergo semper ratio $\dfrac{fc}{ef}$ est $= \dfrac{ci}{1}$ vel $\dfrac{fc}{1}$. Ergo obiecto se ipsam solvit.

Ideo si summa quarundam linearum, ut f i g. p r a e c e d. omnium AB. in arcum cycloeidis multiplicetur per diametrum, fiet summa omnium AB in omnes CI. Habetur ergo quadratura, rectangulorum parabolico-parabolicorum inversorum, ad arcum. At hoc iam aliunde habetur, est enim nil nisi sinus ad arcum, in diametrum ducti. Hinc ergo rursus alia methodus investigandi curvam cycloeidis.

[*Teil 3*]

Porro ex his patet quadraturam eorum quos hic prop. 19. nominavi secantium haberi, at istos secantes BQ calculo ita indagabimus: Manifestum est $\dfrac{BQ}{BR} = \dfrac{AC}{AB}$. (quia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia QBC et ABC.) ideo $BQ = \dfrac{AC \frown BR}{AB}$. ideo infinita series radiorum per distantiam a basi aut potius extremitate diametri multiplicatorum, per applicatas parabolae basi parallelas divisorum quadrari potest

1 quadrupli *erg. L* 3 f. cycloeidalem. *(1)* Imo id falsum, nam ef non est = fi. sed est $\frac{\text{ef}}{\text{if}} = \frac{\text{fc}}{\text{ch}}$. *(2)* Obicitur *L* 15 quos *(1)* alibi *(2)* hic *L* 15 f. secantium | quadraturam *streicht Hrsg.* | haberi *L* 18 aut potius extremitate diametri *erg. L*

$$\frac{a^2-a\beta}{Rq_\llcorner a^2-\delta^2{}_\lrcorner} \quad \frac{a^2-2a\beta}{Rq_\llcorner a^2-2\delta^2{}_\lrcorner} \quad \frac{a^2-3a\beta}{Rq_\llcorner a^2-3\delta^2{}_\lrcorner} \quad \text{etc.}$$

Nam cum hyperbolam habeo

$$\frac{a^2}{a-\beta} \quad \frac{a^2}{a-2\beta} \quad \frac{a^2}{a-3\beta} \quad \text{etc.}$$

quod spatium efficit, utique divisis omnibus per a. ipsum

$$\frac{a}{a-\beta}+\frac{a}{a-2\beta}+\frac{a}{a-3\beta} \quad \text{etc.}$$

linea erit, quae scilicet ex spatio hyperbolico per a. diviso oritur. Atque ideo summa curvae, cuius ita procedent tangentes seu chordae, ex quadratura hyperbolae patebit. Et talis est forsan curva parabolica. Quaerenda autem est methodus istam curvam describendi:

$$\frac{a^2}{1} \quad \frac{a^2}{3} \quad \frac{a^2}{6} \quad \frac{a^2}{10} \quad \text{etc.}$$

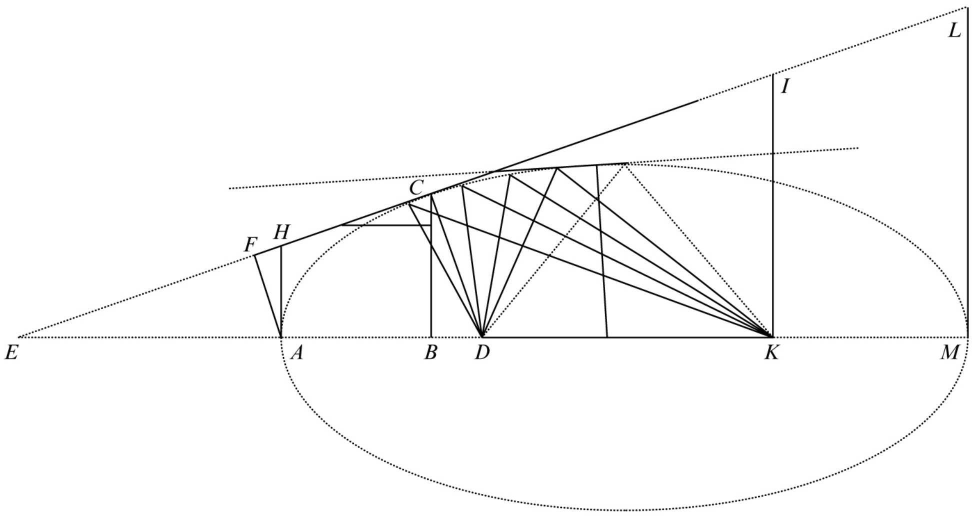
Nescio an hoc faciat infinita a^2.

NB. Si eousque ars analyseos produci posset, ut data series si possibile est reducatur ad statum tractabilem, ingrediaturque aliquod triangulum characteristicum; optata eius perfectio haberetur.

1 *Daneben:* Quare et si omnia dividas per a loco superficiei linea ex summa omnium fiet.

7 seu chordae *erg. L*

1 Vgl. dazu N. 27 S. 488 Z. 4–6.



[*Fig. 5*]

Supponam cognitas tantum lineas duas, altitudinem AB et applicatam BC, quas appellabo, altit. (a) applic. (b.) ergo habetur et $AC = a^2 + b^2$, *Rq.* $\dfrac{(CB)}{AH} = \dfrac{EA + (AB)}{EA}$.

Omnes curvae quarum trochoeides sunt aliae curvae datae, possunt in rectas converti, quemadmodum Hugenius curvas, quarum volutae sunt curvae datae, in rectas extendit. Nimirum nulla curva est (demta opinor circulari), quae non intelligi possit per modum cycloeidis describi, atque ideo basis eius curvae generatrici aequalis est.

A n a l y s i s i n d i v i s i b i l i u m (quatenus ab arithmetica infinitorum separatur) in eo consistit maxime, ut data qualibet linea curva, aut superficie curva, eam ad spatium quoddam unum plurave reducamus, a quorum quadratura eius mensura pendeat. Quod per varias methodos hic praescriptas facile fiet. Porro ut spatium datum quadremus, examinanda primum ratio progressionis, an sit summae capax ex arithme-

4–7 *Daneben großes*

1 [*Fig. 5*]: Der Schnittpunkt D der Normalen CD zur Tangente ECL mit der Achse wird von Leibniz kurzerhand mit dem Brennpunkt identifiziert, in Wirklichkeit liegen D und K weiter außen.
5 Hugenius: s. o. S. 519 Z. 28.

tica infinitorum. Si hanc methodum respuit, ad analysin indivisibilium veniendum est, id est constituendum triangulum characteristicum figurae, eique quotcunque fieri potest triangula similia, quod fieri potest tum ductibus rectarum in figura, tum calculo. Calculo quidem sic: sumamus pro triangulo characteristico ECB ut in ellipsi praecedente vel ECD. utrum scilicet simplicius videbitur, vel etiam EIK, vel ELM aliudve, nobis iam notum simplicissimum, et cuique linearum valores simplicissimos ex natura figurae assignemus. Inde quotcunque haberi possunt ex natura figurae aequationes comminiscamur, duarum rationum, quarum una sit duarum trianguli characteristici linearum, altitudinis EB et basis BC. vel altitudinis EB et tangentis EC. Semper enim hic altitudo ingredi debet, quoniam summam ordinatim applicatarum, seu dimensionem figurae quaerimus; altera ratio sit lineae datae, et cuiusdam lineae quaesitae, cuius quadratura ad basin vel arcum, dudum habetur.

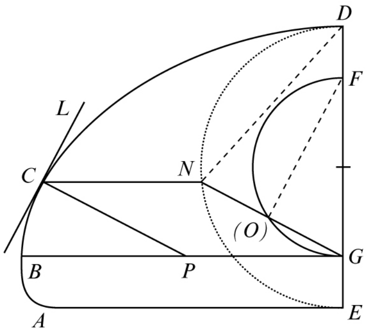
$$\frac{\text{basis (arcus)}}{\text{altitudo}} \times \frac{\text{linea data}}{\text{quaesita}}.$$

Ita duae habebuntur quaesitae, altera cuius quadratura ad arcum, altera cuius quadratura, vel saltem dimensio ad basin quaeritur. Et quidem si est ad basin, basi divisa in partes aequales, examinetur an calculus infinitorum iuvet. Caeterum in omni isto examine videndum, invenirine possit triangulum simile vel aequatio eiusmodi rationum, quas ingrediatur linea quaedam permanens. Ea enim si basi comparari possit, vel arcui vel altitudini, habebitur earum dimensio, quae cum ipsa congrediuntur in eandem rationem, qualis ex natura rei esse potest. Sin minus videndum saltem, lineasne comminisci liceat, in constructione, quae quolibet demum modo assumtae sint quadrabiles, ut sint paraboleides non tantum, sed et aliae infinitae.

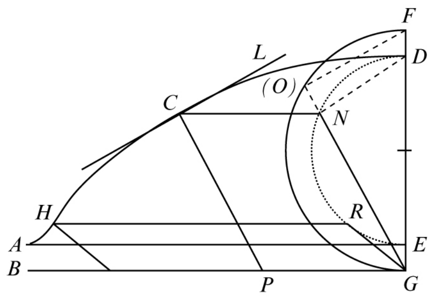
Sed ut ad priora redeamus si nulla lux affulget ex aequationibus rationum trianguli characteristici dati aliud triangulum characteristicum alterius figurae quaerendum est, quae sit tractabilior, cuius rationes lineae nobis datae summandae, ingredi possint.

6 f. assignemus. *(1)* Inde *(a)* data linea cuius summ *(b)* datis *(c)* sumtis lineis quibusdam, et quidem *(aa)* simplicissimis *(bb)* satis simplicibus, quaeramus an in illis *(2)* Inde *L* 16 iuvet *(1)* , sin minus, rursus simili aequatione, persequenda est, *(a)* constituen *(b)* videndumque an nova aequatione cum a *(2)* . Caeterum *L* 17 simile *erg. L*

[*Teil 4, gestrichen*]



[*Fig. 6a*]



[*Fig. 6b*]

Quod attinet dimensionem curvae trochoeidis protractae vel contractae, inspice quae Schotenius habet ad lib. 2. *Geom.* Cartes. pag. 268. 269. ubi figuras eius inspice, quibus ego haec addo[:] In fig. pag. 269 ducatur recta ND. et recta GN producatur usque ad arcum circuli maioris FG. cui occurrat in O. litera a me ascripta, ducaturque recta OF. Manifestum est $\bigtriangledown^{\text{la}}$ GOF et GND esse similia, ideoque esse GN ad GO, ut GD ad GF. Cumque idem fiat, quodcunque sit punctum N in circulo minore, vel punctum C in cycloeide apparet perpendiculares descriptrices (quas in trochoeidibus et volutis radios appellare possis) trochoeidis contractae ad perpendiculares descriptrices trochoeidis ordinariae, habere eandem semper rationem. Nempe quae est diametri circuli minoris semidifferentia diametrorum aucti ad diametrum circuli maioris, seu quae est GD ad GF. Hinc summa omnium GF unitate posita arcu inassignabili circuli GF facile haberi

8 *Nach GF. interlinear:* (falsum)

13 inassignabili *erg. L*

2 [*Fig. 6*]: Im Folgenden behandelt Leibniz zwei Figuren aus Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, *DGS* I S. 268 f. Die Figuren fehlen im Text; sie sind vom Hrsg. nach den Schooten'schen Originalen beigefügt worden. Die von Leibniz hinzugefügten Strecken sind mittels Strichelung gekennzeichnet. Punkt O ist ebenfalls durch Leibniz ergänzt. — Diese Eintragungen fehlen in dem hannoverschen Handexemplar der *Geometria*-Ausgabe!

potest, cum enim summa omnium GO habeatur per superiora (quadrabilis prop. 10. hic), multiplicetur illa per GD, dividatur per GF. Hinc iam ad dimensionem curvae trochoeidis contractae struitur gradus. Est enim summa chordarum inassignabilium trochoeidis contractae (seu quantitas curvae) ad summam chordarum illarum seu perpendicularium descriptricium ut est maxima chorda inassignabilis trochoeidis contractae, ad maximam descriptricem DG. Sed ut est maxima descriptrix contractae GD ad suam chordam seu arcum inassignabilem, ita est GF. seu diameter circuli maioris vel maxima descriptrix trochoeidis communis, ad maximam suam descriptricem. At GF diameter est ad arcum a se descriptum, ut descriptrix proxime minor (differentiae inassignabilis), in eadem trochoeide communi ad unitatem constructionis seu ut diameter circuli maioris ad unitatem constructionis. Ergo dimensio curvae trochoeidis contractae ita habebitur. Summa omnium GF. seu descriptricium trochoeidis contractae dividatur per diametrum circuli maioris [generatoris] trochoeidis communis, quotiens erit curva trochoeidis contractae.

Eadem prorsus methodo invenietur curva trochoeidis protractae. Nam in figura paginae 268. duc rectam ND. et ex puncto O. quo recta GD secat circumferentiam circuli minoris GF. rectam OF[,] erunt ND et OF parallelae, $\bigtriangledown^{\text{la}}$que GOF et GND similia. Ideoque ut GF. diameter circuli minoris ad GD. diametrum circuli minoris semidifferentia diametrorum (DE, et GF) auctum: ita GO. d e s c r i p t r i x trochoeidis communis ad GN. d e s c r i p t r i c e m protractae. Cumque eadem semper ratio sit, summa descriptricium protractae ita habebitur, si summa descriptricium communis multiplicetur [per] GD. diametrum minoris differentia diametrorum auctum, dividaturque per diametrum minoris. Habita summa descriptricium trochoeidis protractae (quae quadrabilis est) curvae trochoeidis protractae eadem qua contractae methodo reperietur. Nam cum semper sibi sint proportionales curvae descriptrices et chordae inassignabiles descriptae, ob eundem semper angulum descriptionis, erit ut maxima chorda inassignabilis trochoeidis protractae, ad maximam descriptricem GD. ita summa chordarum inassignabilium seu curva trochoeidis protractae, ad summam descriptricium inventam. Iam maxima

---

16 *Nach* parallelae *und* similia *jeweils interlinear:* (falsum)

1 f. (quadrabilis | prop. 10. hic *erg.* |) multiplicetur *L* 8 f. ad *(1)* chordam suam, *(2)* arcum ... ut *(a)* chorda *(b)* descriptrix *L* 10 maioris *erg. L* 12 diametrum *(1)* seu maximam descriptricem *(2)* circuli *L* 13 generatorem *L ändert Hrsg.* 20 protractae *erg. L* 21 per *erg. Hrsg.* 24 inassignabiles *erg. L*

chorda inassignabilis trochoeidis protractae, est ad suam descriptricem, GD, ut est maxima chorda inassignabilis trochoeidis communis, ad maximam suam descriptricem, GF, seu ut unitas constructionis ad diametrum circuli minoris GF. quia idem angulus est descriptionis, nec nisi differentia radiorum, quare arcus radiis proportionales. Ergo si summa descriptricium trochoeidis protractae (quadrabilis), dividatur per diametrum circuli minoris, nempe generatoris trochoeidis communis, quotiens erit curva trochoeidis protractae.

At vero Pascalius ostendit in scripto sub Dettonvillaei nomine publicato; trochoeidum protractarum contractarumque curvas esse curvis ellipticis aequales; habebuntur ergo curvis ellipticis aequales rectae geometrice demonstratae.

Imo gravissimus error in demonstratione mea, quam tamen facile emendo salva curvae dimensione. Operae pretium est figura propria rem complecti, vid. pag. praeced. fig ג et ד. Falsum enim in figura Schotenii OF et ND. vel in nostra fig. ג HD et GB (quas ne inutilibus lineis figuram confunderem ducere nolui) esse parallelas, ut inter festinandum posueram. Aliter ergo re de integro assumta ratiocinandum est. Inspice fig. ד. Cum circuli BGA, DIC sint concentrici, erunt chordae HG, et CI, diametris proportionales, item HC erit aequale IG. Ergo summam CG inibimus, si summae omnium HG addemus summam omnium CH vel GI. seu semidifferentiam inter summam omnium CI, et summam omnium [HG]. Cumque summa omnium CI, detur per prop. 10. hic, restat tantum ad summam omnium CG habendam, invenire summam omnium HG. At haec facilis est, quia enim semper $\dfrac{CI}{AG} = \dfrac{CD}{BA}$. seu ut diametri circulorum, eadem quoque ratio summarum erit. Ideo si summa omnium CI inventa per prop. 10. (quadrabilis) multiplicetur per

---

20–22 Error rursus, quia AG. AI non sunt circulis proportionalia.

22–535,5 *Daneben großes* NB.

6 minoris, nempe *erg. L* 8 vero *(1)* Hugeni *(2)* Pascalius *L* 14 parallelas, *(1)* quod manifeste falsum est *(2)* ut *L* 18 vel GI *erg. L* 19 CI *L ändert Hrsg.*

---

8 Pascalius: *Lettre de A. Dettonville à Mr. Hugguens de Zulichem*, 1659 (*PO* IX S. 187–201).

20–22 Leibniz verwechselt die Bezeichnungen. Die Proportion müsste nach seinem Ansatz $\dfrac{CI}{HG} = \dfrac{CD}{BA}$ heißen. — Ebenso müsste in der Anmerkung HG bzw. CI stehen.

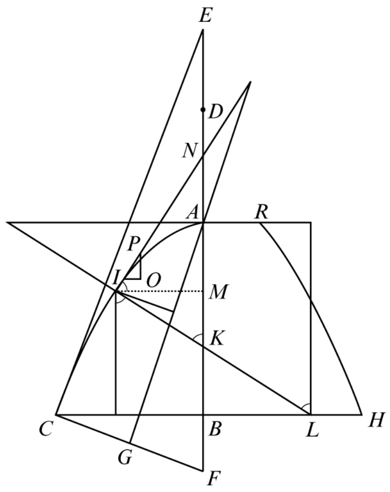
diametrum BA circuli minoris seu generatoris trochoeidis contractae, ac productum dividatur per DC diametrum circuli maioris seu generatoris trochoeidis communis, quotiens erit summa omnium GA, cui si addatur semidifferentia ipsiusmet summae GA a summa omnium CI. descriptricium trochoeidis communis, habebitur summa omnium CG descriptricium trochoeidis contractae. Eodem modo inveniemus summam omnium CG in fig. ג trochoeidis protractae. Si inventam summam omnium CI per prop. 10. fiat ut DC diameter circuli minoris, trochoeidis communis generatoris, ad BA diametrum circuli maioris trochoeidis protractae generatoris, ita, summa omnium CI, ad aliud, quod erit summa omnium $G(H)$ cui si addatur summa omnium GI, semidifferentia inter summam omnium CI, et omnium $G(H)$ habebitur summa omnium CH descriptricium trochoeidis protractae. Posita autem summa omnium descriptricium trochoeidis sive protractae sive contractae, facile habetur summa omnium chordarum assignabilium vel arcuum minimorum ad ipsis descriptorum, vel curvae trochoeidis protractae vel contractae. Cum enim idem semper sit angulus descriptionis, eadem semper ratio erit arcuum vel chordarum, et descriptricium seu radiorum. Ergo quae est ratio descriptricis maximae ad chordam maximam, ea erit summa descriptricium CG ad arcum trochoeidis descriptae. Est autem ob eundem rursus descriptionis angulum, eadem ratio CB descriptricis maximae trochoeidis contractae vel protractae ad suam chordam maximam, quae est CD. diametri circuli generatoris trochoeidis communis, ad suam chordam maximam, seu ad unitatem (ut ostensum est ad fig. ב ubi quae est ratio CH. descriptricis trochoeidis communis maximae ad ef. chordam maximam descriptam, ea est ratio cf diametri a descriptrice maxima CH quantitate qualibet data minore differentis; seu ipsius descriptricis, ad fi. unitatem). Ergo ut est in trochoeide communi summa descriptricium ad curvam, ita et in trochoeide protracta vel contracta, ac proinde summa descriptricium trochoeidis contractae vel protractae, vel communis, divisa per diametrum circuli generatoris trochoeidis communis, dabit curvam trochoeidis descriptae sive ea protracta sit, sive contracta, sive communis.

1 minoris seu *erg.* *L* 1 trochoeidis *(1)* exorbitantis (sive ea contracta sive protracta ut in fig. ד exhibitum, sive ut in fig. ג protracta sit). *(2)* contractae *L* 2 maioris seu *erg.* *L* 7 circuli *(1)* maioris *(2)* minoris *L* 17–20 Est autem ... ad unitatem *erg.* *L* 20 f. descriptricis | *(1)* a diametro circuli generatoris *(2)* trochoeidis communis *erg.* | maximae *L* 25 f. circuli generatoris *erg.* *L*

30. DIVERSA DE QUADRATURIS
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 266–267. 1 Bog. 2° 3 S. — Bl. 267 v° leer.
Cc 2, Nr. 641

Datierungsgründe: s. N. 28.



[*Fig. 1*]

Esto semiparabola ABC. cuius latus rectum AD. abscissa AB. applicata CB. constat esse $AD \frown AB = CB\square$.

Producatur diameter vel altitudo BA, ultra verticem, in E. sumaturque $AE = AB$. et recta ducta EC. tanget curvam parabolae in C.

Item in producta AB. ultra basin sumatur BF. dimidia lateris recti AD. recta FC. erit perpendicularis ad curvam, sive tangentem CE.

6 [*Fig. 1*]: In der Leibniz'schen Handzeichnung ist die Linie AC nicht eingezeichnet. Das infinitesimale Dreieck zum Punkt I ist etwas nach oben geschoben und mit INO bezeichnet. Da N doppelt vorkommt, hat Hrsg. in IPO abgeändert. Der Parabelbogen RH (R vom Hrsg. erg.) geht in der Handzeichnung irrtümlich von A aus.

Denique ducatur AG. perpendicularis ad CF. quae bisecabit CF. in G. quemadmodum ipsa AG. ipsius CE. dimidia est.

Manifestum est $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ECF. et EBC. et CBF. et AGF. et CBE. similia esse, ideo $\dfrac{BF}{CF} = \dfrac{CF}{EF}$. Ergo $BF \frown EF = CF^2$. seu $CF = \sqrt{BF \frown EF}$.
Est autem BF. semper eadem. EF. autem continuo crescit uniformiter, constat enim ex BF. quae perpetuo eadem est, et AB. uniformiter crescente, duplicata. Ergo rectangula $BF \frown EF$, vel quadrata, CF^2. sunt arithmeticae progressionis, ipsaeque radices CF. sunt applicatae parabolae ad axem seu basi parallelae. Unde: si omnes CF. applicentur altitudini AB. in punctis B. donec evanescant in A. (ubi CF. ad nihilum recidit) figura ex iis conflata ABH. utique semiparabola erit, ac proinde quadrabilis $= \dfrac{2CF \frown AB}{3}$.
Datur ergo momentum curvae AC. ex axe AB, $= \dfrac{2CF \frown AB}{3}$. et circulus radio $\dfrac{\sqrt{CF \frown AB}}{3}$ descriptus erit superficiei conoeidis parabolici circa axem, aequalis.
Parabolae ABH. latus rectum erit $\dfrac{BF \frown EF.}{AB}$. diameter idem qui prioris AB.

Nunc inquirere operae pretium est, an eadem semper ratio sit $\dfrac{CF}{CB}$. cum sint applicatae correspondentes duarum parabolarum eiusdem altitudinis. Sunt autem omnes parabolae figurae homogeneae inter se, ac proinde applicatae respondentes, erunt proportionales. Sed hoc accuratius excutiendum est, ne in re tanti momenti, ut mox dicemus, coniectura labamur.
Dictum est CB esse $= Rq\, AD \frown AB$. et CF esse $Rq\, BF \frown EF$. $BF = \dfrac{AD}{2}$. $EF = 2AB + BF$. ergo ratio $\dfrac{CB}{CF}$ erit $= Rq \dfrac{AD \frown AB}{\dfrac{AD}{2} \frown 2AB + \dfrac{AD^2}{4}} = Rq \dfrac{AB}{AB + \dfrac{AD}{4}}$. Unde

3 et AGF. et CBE. *erg.* *L* 4 f. $\sqrt{\text{BF} \frown \text{EF}}$. *(1)* Ergo *(2)* Unde manifeste intelligitur, si omnes | rectae *erg. u. gestr.* | CF. applicatae intelligantur ad axem in punctis B. figuram ABH. inde conflatam fore aliam semiparabolam cuius latus rectum est dimidium, at diameter | seu abscissa *erg.* | duplum parabolae prioris *(2)* Est *L* 8 ad axem seu *erg.* *L*

9 donec evanescant: dies ist unzutreffend. — Der Fehler beeinflusst alle davon abhängigen Aussagen.

apparet falsum esse, quod prima specie in mentem poterat venire, neque eandem semper rationem esse $\frac{CB}{CF}$.

Sumatur aliud punctum I. in curva AC. unde perpendicularis ad curvam IK. producatur usque ad basin CH. cui occurret in L. demittatur applicata ex puncto assumto I. axi perpendicularis IM. erit, per superiora, recta $MK = BF$ vel $\frac{AD}{2}$.
Porro alibi demonstratum est summam ad basin omnium IK. perpendicularium curvae ad altitudinem productarum aequari MK. intervallo, perpendicularis et applicatae, in altitudine, hoc loco dimidio lateri recto, ad curvam. Quae si haberi posset summa omnium IK. ad basin, daretur curvae parabolicae aequalis recta. Ipsa autem IK. varie determinari potest: est enim $\sqrt{\llcorner \frac{AD\square}{4} + 2AM \frown \frac{AD}{2} \lrcorner}$ est etiam $IM\square + MK\square$. (nam $MK\square = \frac{AD^2}{4}$. et $IM\square = AM \frown AD$.)
Manifestum est porro haberi summam omnium MB. ad basin, cum constituat figuram, quadrabilem, semiparabolam; et summam omnium MK. quia semper idem; ergo et omnium KB.

$$\frac{BL}{IM} = \frac{MK = \frac{AD}{2}}{MB - \frac{AD}{2}}. \quad \text{Ergo } BL = \frac{\frac{AD}{2} \frown IM}{MB - \frac{AD}{2}}.$$

$$\frac{IL}{IK} = \frac{MB}{MK}. \quad \text{Ergo } IL = \frac{MB \frown IK}{MK}.$$

In omni figura curvilinea duo diversa haberi possunt triangula characteristica, ut pro ACB, habes CGA. idque aliter pro varie assumto puncto C. Idem non quidem in toto quadrante ellipseos, attamen in eius parte. Sed pro puncto C. eligendum est aliquod omnium commodissimum.

6 ad basin *erg. L*   19 f. Sed ... commodissimum. *erg. L*

---

6 alibi demonstratum: s. N. 28 S. 503 Prop. 6.   15 $\frac{BL}{IM}$: Es müsste umgekehrt $\frac{IM}{BL}$ heißen. — Leibniz rechnet konsequent weiter.

$IK.$ etiam sic determinari potest:

$$Rq\llcorner \underbrace{NK\Box}_{\frac{AD\Box}{4}+4AM^2+2\llcorner\frac{AD}{\cancel{2}}\frown\cancel{2}AM} \quad -IM\Box \quad -\underbrace{NM\Box}_{4AM^2}$$

fiet $$Rq\llcorner \frac{AD^2}{4}+2AD\frown AM-\underbrace{IM^2}_{AM\frown AD}=Rq\llcorner\frac{AD^2}{4}+AD\frown AM\lrcorner$$

sed res redit eodem.

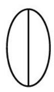
Summa omnium $IK.$ ad basin est hyperbola, ideoque curva parabolica pendet a quadratura hyperbolae, quoniam summa omnium $IK.$ ad basin = ipsi $MK.$ perpetuo eidem ad arcum.

Sunt tamen NB. figurae curvilineae, in quibus non possunt duo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ characteristica haberi, qualia sunt figurae finitae, seu quadrantes, ut circularis, ellipticus, ovalis, in quibus duo latera, unumquodque perpendiculare est curvae.

Omnis curva alterius curvae trochoeis esse potest, ac nescio an non et cycloeis. Hoc si analytice inveniri potest, habemus totidem curvis aequales rectas. Praeclarum est analyseos per indivisibilia specimen quod ab Hugenio datum est, in curvis evolutis indagandis.

Fingi possunt modis innumerabilibus descriptrices summabiles ad curvam, iisque casibus etiam curvae descriptae erunt rectificabiles. Nota diversa describetur curva, trochoeis ab ellipsi eadem revoluta, si scilicet aliud atque aliud punctum in ea signatum intelligatur. Idem est in aliis curvis. Videndum an eadem curva diversarum aliarum trochoeis esse possit, non puto.

17–21 *Daneben Merkfigur:*



6 sed ... eodem. *erg. L* 7 ad basin *erg. L* 13 et *(1)* circularis *(2)* cycloeis *L in anderer Tinte* 17 descriptrices *(1)* assignabiles *(2)* summabiles *L*

15 ab Hugenio datum: s. v. a. *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil III, Satz XI, S. 81–90 (*HO* XVIII S. 224–241). — s. a. N. 2.

$$Rq\;\dfrac{\dfrac{3a^2}{4}}{a^2-b^2} \quad \dfrac{\cancel{a^2}-\cancel{b^2}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{\cancel{a^2}}{\cancel{4}}} \qquad \dfrac{\dfrac{3a^2}{4}-b^2}{a} \;\sqcap\; \dfrac{3a}{4}-\dfrac{b^2}{a}$$

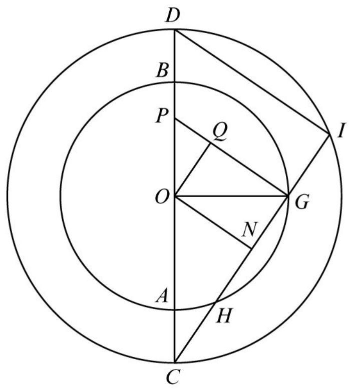
$$\begin{array}{llllll} \overset{4}{\cancel{2}\cancel{0}}-4 & Rq\,9-0. & Rq\,9-1. & Rq\,9-4. & Rq\,9-9. & \\ \underline{\;4\;} & & 1 & 3 & 5 & \\ \cancel{1}6 & Rq\;\;9 & Rq\;\;8 & Rq\;\;5 & \;\;0 & \\ \cancel{2}\cancel{5}-9 & Rq\,16-0. & Rq\,16-1. & Rq\,16-4. & Rq\,16-9. & Rq\,16-16. \\ \underline{\;4\;} & & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \cancel{1}\cancel{6} & Rq\;\;16 & Rq\;\;15 & Rq\;\;12 & Rq\;\;7 & \;\;0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2[\textit{bricht } ab] \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+\;Rq\,ba-b \\ \underline{a+\;Rq\,ba-b} \\ -\,ba\;-b\;Rq\,ba+b^2 \\ +a\,Rq\,ba+ba\;-b\;Rq\,ba\qquad\quad \\ +a^2\;+a\,Rq\,ba-ba\qquad\qquad\qquad\quad \end{array}$$

Auferenda:	$[-]\;2b^2-2aRq\,ba-\cancel{ba}$
Adicienda:	$+\;\cancel{2}ba-2b\,Rq\,ba$
Comparanda iam:	$+\;2b^2+2a\,Rq\,ba \infty +ba+2b\,Rq\,ba.$

Haec si sibi invicem deducantur fiet: $\llcorner 2a-b \frown Rq\,ba \lrcorner - \llcorner b \frown a-b \lrcorner$ sed hoc tamen multum abest a 0. Ideo eligenda eiusmodi quae si iis auferas addasve expressa in quantitate data, ut b^2, et deinde quae in ipsis auferri addive iubentur, quam proxime accedant ad 0. et quidem regula universali.

5 *(1)* Rq, 9 − 0. Rq, 9 − 1. | Rq, 9 − 4. 0. *streicht Hrsg.* | *(2)* Rq 9 − 0. *L* 16 *Vorzeichen erg. Hrsg.*



[*Fig. 2*]

De cycloeide contracta fig. ג et ד. sed quia ibi pleraque peccata deletaque sunt, hic breviter corrigemus: Ut data CI. investigemus CG. sic agendum est: ducatur ON. (dimidia DI.) perpendicularis ad CI. erit CN. dimidia CI. restat [ut] investigemus NG. (nam $NG + \overset{CN}{\frac{CI}{2}} = CG$.) quod facile est, nam $Rq\,OG^2 - ON^2 = NG$. Cumque summam CN. vel $\frac{CI}{2}$. ad curvam circularem dudum habeamus, summam NG. separatim inire sufficit. Est autem $OG^2 = \frac{a^2}{\beta^2}$. erit ergo

$$NG = \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{\gamma a}{2}} \quad \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{2\gamma a}{2}} \quad \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{[3]\gamma a}{2}} \quad \text{etc.}$$

Ergo locus omnium NG. altitudini BC. applicatorum est curva parabolica. Debet autem inveniri summa omnium GN. ad arcum circuli, ut habeatur summa omnium arcuum curvae cycloeidis contractae. Summa autem omnium GN. ad arcum circuli aequatur summae omnium PG. ad altitudinem[,] uti summa omnium DI. ad altitudinem, aequi-

1 [*Fig. 2*] *erg. Hrsg. nach Text und N.* 29. 4 ut *erg. Hrsg.* 8 2 *L ändert Hrsg.*

3 corrigemus: Leibniz greift hier die Gedanken von N. 29 S. 526 Z. 7–10 wieder auf. Auch dieser zweite Versuch ist nicht fehlerfrei und führt zu keinem befriedigenden Ergebnis.

valet summae omnium CI. ad arcum. Ut autem habeamus PG. ducatur OQ. aequalis et parallela NG. patet $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ OQP. esse simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ CNO. Ergo $\dfrac{PQ}{ON} = \dfrac{QO}{CN}$. Ergo $PQ = \dfrac{QO \frown ON}{CN}$ vel $\dfrac{NG \frown DI}{CI}$. Videamus an constans sit ratio $\dfrac{NG}{CI}$. Dictum est qualis sit NG. nimirum Rq. differentiae inter OG^2 et ON^2. At CI est Rq. differentiae inter $\beta^2\,OG^2$ et $4\,ON^2$. erit ergo ratio $\dfrac{\sqrt{OG^2 - ON^2}}{\sqrt{\beta^2 OG^2 - 4ON^2}} = \sqrt{\dfrac{OG^2 - ON^2}{\beta^2 OG^2 - 4ON^2}}$. Ergo $PQ = \sqrt{4ON^2} \frown \sqrt{\dfrac{OG^2 - ON^2}{\beta^2 OG^2 - 4ON^2}}$. Quando autem $\beta^2 = 4$. seu quando $OG = OC$. tunc summa omnium PQ. quadrabilis, sive curva cycloeidis haberi potest, tunc enim non est protracta vel contracta.

Etiam atque etiam considerandum est, an non sint aliqui casus methodi per inscripta et circumscripta, quia per communem methodum indivisibilium suppleri nequeant — qualis videtur esse quadratura lunulae Hippocraticae.

Nimirum non video quid prohibeat excogitari figuras, in quibus summa laterum inscriptorum crescat, circumscriptorum decrescat in tali ratione, ut concursus eorum definiri possit, vel per problema planum vel per solidum. Fingendo scilicet summam laterum semper extendi; hic locus erit utendi illis seriebus infinitis summabilibus, quarum summae finitae, seu cum summa infinitarum linearum non it in planum: aut potius hic locus est inveniendi terminum alicuius seriei eiusmodi dupliciter affectae, id est partim crescentis partim descrescentis, donec incrementorum decrementorumque differentia evanescat. Ita non opus est serie convergente, sufficit simplex vel inscriptorum solum, vel circumscriptorum solum.

Caeterum inscripta fiunt per chordas, circumscripta per tangentes, concurrentes. Hae autem incidunt in nostrum triangulum characteristicum, et ideo utiliores. Porro utile foret tentare possitne fieri, ut chordae laterave inscripta pariter ac circumscripta semper sint aequalia, quod fieri posset, faciendo ea semper aequalia, et residuo ultimi, quod succedere non vult, seu iusto minus est, faciendo partes reliquorum subdividendorum aequales, etsi qua pars rursus superest, ita denuo procedendo, ita in infinitum semper habebuntur latera aequalia. Quodsi iam hac laterum in aequalia divisione aliae quaedam lineae quoque aequales aut apte crescentes orirentur, v. g. omnes perpendiculares ad illa latera, aut applicatae crescentes certa quadam progressione, eaque constanti, id est apparitura, subdivisa licet figura in infinitum; tunc applicatae istae lineae ad curvam summari poterunt.

Si persequamur applicatae datae figurae ut hyperbolae, in quas figuras alia forma ingredi possint, v. g. ut intervalla perpendicularium, tangentium etc., tunc eo ipso nova de ipsa theoremata habebimus, eiusque applicata curvae altitudini, basi alterius applicabimus, easque hoc modo cum aliis figurae novae lineis comparabimus.

Loci distantiarum inter focos in ellipsi et hyperbola perpetuarum, possunt esse quasi ellipses et quasi hyperbolae in quibus distantiae illae decrescant crescantve certa ratione.

Non tantum inscripta et circumscripta latera, sed et polygona ipsa, quorum latera sunt eorumque quantitas continue crescens decrescensve considerari potest ad habendam figurae quantitatem, ut prius curvae.

Alia est methodus pro summis curvarum, ut scilicet dividatur altitudo eum in modum, in partes forsan inaequales, ut latera quoque seu arcus trianguli characteristici, seu chordae inassignabiles certa proportione summabili crescant decrescantve.

Ellipsis $2ax - \frac{a}{t}x^2 = y^2$, unde $\cancel{2}ap - \frac{\cancel{2}a}{t}xp = \cancel{2}y^2$, seu $p = \frac{y^2}{a - \frac{a}{t}x} = \frac{2ax - \frac{a}{t}x^2}{a - \frac{a}{t}x}$, hoc dividatur y, hoc inquam dividatur $y = \sqrt{2ax - \frac{a}{t}x}$, seu $\frac{y}{\frac{y^2}{a - \frac{a}{t}x}} = \frac{y \frown a - \frac{a}{t}x}{y^2}$, fiet $\frac{a - \frac{a}{t}x}{y} = \frac{a - \frac{a}{t}x}{\sqrt{2ax - \frac{a}{t}x^2}}$, differentia ordinatae ellipsis, eius $\square^{\text{to}}$ $\frac{a^2 + \frac{a^2}{t^2}x^2 - \frac{2a^2}{t}x}{2ax - \frac{a}{t}x^2}$,

3 ut hyperbolae *erg. L*

15–544,2 Dieser Abschnitt steht auf Bl. 267 r° oben und ist zusammen mit der Zahlenrechnung durch einen Trennstrich von dem übrigen Text abgesetzt. Er dürfte zuerst auf den Bogen geschrieben worden sein.

additoque $1 = \dfrac{2ax - \dfrac{a}{t}x^2}{2ax - \dfrac{a}{t}x^2}$, fiet: $\sqrt{\dfrac{a^2 + \begin{matrix}\dfrac{a^2}{t^2}\\ -\dfrac{a}{t}\end{matrix} x^2 - \begin{matrix}\dfrac{2a^2}{t}\\ -2a\end{matrix} x}{2ax - \dfrac{a}{t}x^2}}$ latus curvae ellipticae.

$$\sqrt{\frac{a^{\not 2}t^2 + a^{\not 2}x^2 - \not a tx^2 - 2a^{\not 2}tx + 2\not a t^2x}{2\not a t^2x - \not a tx^2}} = \sqrt{\frac{at^2 + ax^2 - tx^2 - 2atx + 2t^2x}{2t^2x - tx^2}}.$$

$\dfrac{a^2}{a \mp \sqrt{ax},} = y$, $a^2 = ay \mp y\sqrt{ax}$, vel $a^2 - ay = \mp\, y\sqrt{ax}$, vel $a^4 - 2a^3y + a^2y^2 = y^2ax$. Ergo $\dfrac{a^3}{y^2} - \dfrac{2a^2}{y} + a = x$.

$\dfrac{a}{a+\sqrt{ax}} = \dfrac{a}{\sqrt{ax}} - \dfrac{a^2}{ax} + \dfrac{a^4}{a^2x^2}$ etc. Iam $\dfrac{a^2}{\sqrt{ax}} = y$, dabit: $\dfrac{a^4}{ax} = y^2 = \dfrac{a^3}{x} = y^2$. Ergo $x = \dfrac{a^3}{y^2}$. Ergo reliqua $-\dfrac{2a}{y} + a$, aequant: $-\dfrac{a}{x} + \dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{a^4}{x^4}$ etc. Quo posito differentia inter $\dfrac{2a}{y}$ et $\dfrac{a}{x}$ in illa hypothesi $+a$, summa erit horum $\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{a^4}{x^4}$ etc. Videndum an inde aliqua lux ad summam eiusmodi indagandam. Imo differentia ista nihil aliud est quam spatium quoddam hyperbolicum. Inprimis consideratione dignum, quod eadem oritur figuram quomodocunque explicetur $\mp$ sive per $+$ sive per $-$ unde etiam differentia

---

2 *Darunter in anderem Duktus:*

$$\begin{array}{r} 1673 \\ \underline{96} \\ 10038 \\ \underline{15057\ } \\ 160608 \end{array}$$

---

5 $\dfrac{a}{a+\sqrt{ax}}$: in der Reihenentwicklung überspringt Leibniz das dritte Glied, dies wirkt sich bis zum Ende des Abschnitts aus.

inter haec duo $\frac{a}{\sqrt{ax}} - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}$ etc. alternantem, et simplicem $\frac{a}{\sqrt{ax}} + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}$ etc. deberet haberi.

Adhibeat $\frac{\sqrt{ax}}{a \mp \sqrt{ax}}$. Unde fiet: $\frac{\sqrt{ax}}{a} - \frac{ax}{a^2} + \frac{\sqrt{a^3x^3}}{a^3}$ etc. vel etiam $\frac{\sqrt{ax}}{a+\sqrt{ax}} = \frac{\sqrt{ax}}{a} - \frac{\cancel{a}x}{a^{\cancel{2}} + \cancel{a}\sqrt{ax}}$. Iam si $\frac{xa}{a+\sqrt{ax}} = y$. erit $xa - ay = y\sqrt{ax}$. et $x^2a^2 - 2a^2xy + a^2y^2 = axy^2$. Ergo $a^2y^2 = -x^2a^2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{2a^2y}{ay^2}\, x$. $\frac{a^2y^2}{a^2} - \frac{\Box\overline{\llcorner a^2y + \frac{ay^2}{2} \lrcorner}}{a^4} = -\frac{x^2a^2}{a^2} + \frac{\overset{+2a^2y\quad x}{ay^2}}{a^2} - \frac{\Box\overline{\llcorner a^2y + \frac{ay^2}{2} \lrcorner}}{a^4}$. Ergo [$\sqrt{a^2y^2 - \frac{\Box\overline{\llcorner a^2y + \frac{ay^2}{2} \lrcorner}}{a^2}} = \mp ax \mp \frac{a^2y + \frac{ay^2}{2}}{a}$.]

Alia figura $\frac{a^2}{a+\sqrt{ax}+x} = y$. Ergo $a^2 = ay + y\sqrt{ax} + xy$, vel $a^2 - ay - xy = y\sqrt{ax}$. vel $a^4 - 2a^3y - 2a^2xy + a^2y^2 - \overset{3}{\cancel{2}}ay^2x + x^2y^2 = \cancel{y^2ax} = 0$. vel $a^4 - 2a^3y + a^2y^2 = 3ay^2x - \underset{2a^2y}{x^2y}$.

Unde ad extractionem radicis a latere x veniri potest.

$$\text{Iam } \frac{a}{a+\sqrt{ax}+x} = \frac{a}{\sqrt{ax}+x} - \frac{a^2}{ax+\sqrt{ax^3}+x^2}$$
$$+ \frac{a^3}{\sqrt{a^3x^3} \underset{(ax^2)}{-} \sqrt{a^2x^4} + \sqrt{ax^5} + ax^2 + \sqrt{ax^5} + x^4} \quad \text{etc. et summa}$$

tamen horum omnium facilius ita iniri potest:

---

7 *Daneben:* Haec ergo figura licet tam implicata ex hyperbolae quadratura pendet.

3–6 Adhibeat ... Ergo $\sqrt{\mathrm{a^2y^2} - \llcorner\Box, \mathrm{a^2y} + \frac{\mathrm{ay^2}}{2}\lrcorner} = \mp \mathrm{x} \mp \mathrm{a^2y}$ [*bricht ab*] *am Rande erg. L, ändert Hrsg.* 3 etc. *(1)* vel etiam $\frac{\sqrt{\mathrm{ax}}}{\mathrm{a}} - \frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{a^3} \mp \sqrt{\mathrm{a^5x}}}$. *(a)* Unde *(b)* Hoc transformetur *(2)* vel *L*

---

7 Alia: In den Rechnungen der beiden folgenden Abschnitte unterlaufen Leibniz verschiedene Flüchtigkeiten, eine davon — S. 546 Z. 1, wo es a^2 anstelle von xa heißen müsste — führt zu dem trügerischen Endergebnis.

$\frac{a}{x} - \frac{a\sqrt{ax+xa}}{x^2} +$ etc. ita ut iam haec summa, ubi numeratores tantum sunt compositi, priori licet implicatissimae ubi nominatores compositi erant aequetur. Iam $\frac{a\sqrt{ax+xa}}{x^2}$ ita resolvi potest in partes[:] $\frac{xa}{x^2} = \frac{a}{x}$. unde priori $\frac{a}{x}$ rursus $\frac{a}{x}$ adimitur, et $\frac{a^2\sqrt{ax}}{x^2} = y$. unde $\frac{a^3x}{x^4} = y^2 = \frac{a^3}{x^3}$. cuius datur quadratura. Eodem modo si pergatur ad $\frac{a\sqrt{ax+xa}, \frown \sqrt{ax+x}}{x^2}$ fiet $\frac{a^2x + ax\sqrt{ax+xa}\sqrt{ax+x^2a}}{x^3}$ sive $\frac{a^2}{x^2} + 2\frac{\sqrt{a^2x}}{x^3}$ (unde $= y$, et $\frac{a^2x}{x^6} = y^2$, $\square^{\text{bile}}$) $+\frac{a}{x}$. Unde iterum $\frac{a}{x}$, quod rursus per sequens destruetur.

Si inveniri posset ars inveniendi figuram ex data tangentium proprietate, eadem opera credo arithmetica summarum perficeretur; possumus enim semper opinor ope divisionum istarum excogitare figuram ex cuius quadratura pendeat seriei alicuius geometricae finitae infinitaeve summa. Et quoniam credo ostendi posse omnium figurarum dari quadraturam ope logarithmorum iam superest rem illam maximam ostendere, quomodo scilicet datae cuilibet seriei arithmeticae adhiberi possit arithmetico-sygnotos saltem quando aliter id fieri non potest per approximationem. Duo igitur maxima puto praestari posse[:] r e s o l u t i o n e m omnium aequationum, per tabulam sinuum, sive cyclicam, et c o m p o s i t i o n e m omnium aequationum per hyperbolicam.

T a b u l a L e i b n i t i a n a: ad quam opus instrumento meo. Grandis calculus maximorum calculorum cui libro apparatus tabulae Leibnitianae servabitur, unde excerpetur exigua ad usum qualis sinuum et logarithmorum communis. Ab altero latere tabulae repraesentabitur eius sinus si ipse pro arcu sumatur; eius logarithmus si pro naturali; eius potestates si pro radice.

Tabula condenda inversa: in qua cuilibet numero naturali e regione ponatur arcus qui ei respondet si pro sinu sumatur, et numerus naturalis qui ei respondet si sumatur pro logarithmo; item radix quae ei respondet quadratica, cubica etc. Huic tabulae fundamentum est sinuum et logarithmorum calculus ad summam vastitatem extensus. Ita

3 rursus *(1)* aliquid additur *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$ adimitur *L* 16–547,4 T a b u l a ... radicum. *erg. L*

et logarithmus exhiberi possit, qui rationem habeat datam ad logarithmum denarii, et sinus qui ad eundem rationem habeat datam.

Ante omnia condenda tam vasta logarithmorum tabula, inde enim facile habentur sinus et extractiones radicum.

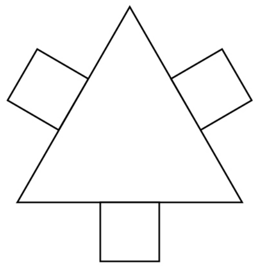
1 f. ad logarithmum denarii *und* ad eundem *erg. L*

31. NOTAE MAXIME AD CIRCULI QUADRATURAM RELATAE
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 II 1 Bl. 254–255. 1 Bog. 2°. 4/5 S. auf Bl. 254 v°. Bl. 254 r° leer. — Auf dem übrigen Bogen N. 32.
Cc 2, Nr. 883 tlw.

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist als erstes auf den Bogen geschrieben worden. Es ist daher zeitlich kurz vor N. 32 (vgl. dort) anzusetzen.

Fortification nouvelle de Honoré Meusnier presentée au Roy.
Modum proponit triangula ac quadrangula, ac pentagona aeque bene fortificandi, ac ea in quibus numerus laterum maior. Idque non *par bastions flanquez, mais par des autres especes d'ouvrages, qu'il appelle avantgardes*. Variasque alias adhibet formas non communes.



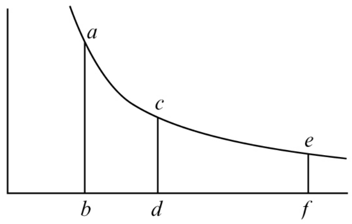
[*Fig. 1*]

Est in fol. 1626 circiter Parisiis editus.

P. Gregorius a S. Vincentio demonstravit ni fallor si ea sit ratio ab ad cd, quae est cd ad ef, spatia ad et cf esse aequalia[;] si inaequalia sint etc. ostendit, id unde deduxit P. Sarrasa usum ad logarithmos.

---

8 *Fortification*: Honorat de Meynier, *Les nouvelles inventions de fortifier les places*, 1626.
15–17 Vgl. dazu: G. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, S. 586 (Satz 109) und S. 594–597 (Satz 125–130) sowie A. A. de Sarasa, *Solutio*, 1649, S. 7 f.



[*Fig. 2*]

Georgius Aloysius de Löwenthurn defensionem problematis Austriaci suscepit.

Domin. de Nonantcourt *Euclides Logisticus*. Is primus compositionem rationum demonstravit, teste Fr. Ainscomb. in defensione quadraturae P. Gregorii.

Quadrasse ait Ainskom, P. Gregorium duarum hyperbolarum similium et aequalium certo modo positarum lineis curvis comprehensum spatium.

P. Mersennum voluisse reducere problematum Gregorianorum solutionem ad solutionem huius problematis: exhibere lineas quae sunt ut logarithmi duorum terminorum rationem datam habentium. Eamque resolutionem esse ultimam solutionem P. Gregorii non obscure innuit, hanc esse sententiam Robervallii.

P. Ainskom refert epistolam Cartesii ex Svecia scriptam ad amicum, qui de Robervallio ita iudicat: *Si M. Roberval n'a pas l'esprit de refuter le P. Gregoire, et si le dit pere ne trouve point d'autre adversaire que celui cy il ne luy sera pas difficile de se defendre.*

2 suscepit: Gottfried Aloys Kinner von Löwenthurn, *Elucidatio geometrica*, 1653. 4 teste: François Xavier Aynscom, *Expositio ac deductio*, 1656, S. 72. Aynscom bezieht sich auf François de Nonancourt, *Euclides logisticus*, 1652. — In Hannover, *Niedersächs. Landesbibl.* befindet sich ein Handexemplar des *Euclides logisticus* (Ms IV 380a) mit zahlreichen Eintragungen von Leibniz' Hand aus früh-hannoverscher Zeit. 5 Quadrasse: s. Aynscom, *a. a. O.*, S. 101 f. Aynscom bezieht sich hier auf das *Opus geometricum* S. 603 (Satz 139). 7–10 Vgl. dazu M. Mersenne, *Novarum observationum*, 1647, S. 71 f. bzw. A. A. de Sarasa, *Solutio*, 1649, S. 4 sowie Aynscom, *a. a. O.*, S. 105. 11 refert: Aynscom, *a. a. O.*, S. 108; s. a. *DO* V, S. 464 f.

Video P. Gregorium invenisse primum, cylindrum aequalem esse parabolae in seipsam inverse ductae. Cum ego putarem me id invenisse.

Postea conatur hunc ductum cubare. Sed hoc ego successurum vix crediderim.

Quadraturam quae ex mesolabo dependeret, ineptam fore ait P. Ainskom, ego id minime arbitror, haberemus enim certe exactam exhibendae rectae circulo aequalis rationem, etsi conicam.

$$\begin{array}{llll} Rq\ \beta a & Rq\ 2\beta a & Rq\ 3\beta a & Rq\ 4\beta a \\ \underline{Rq,\ a^2-\beta a.} & \underline{Rq, a^2-2\beta a.} & \underline{Rq,\ a^2-3\beta a.} & \underline{Rq, a^2-4\beta a.} \\ \sqrt{,}\,\beta a^3-\beta^2 a^2. & \sqrt{,}\,2\beta a^3-4\beta^2 a^2. & \sqrt{,}\,3\beta a^3-9\beta^2 a^2. & \sqrt{,}\,4\beta a^3-16\beta^2 a^2. \quad \text{etc.} \end{array}$$

solidum cui cylinder aequalis.

Dividantur omnia per a, vel $Rq\ a^2$. fiet:

$$\sqrt{,}\,\beta a-\beta^2. \qquad \sqrt{,}\,2\beta a-4\beta^2. \qquad \sqrt{,}\,3\beta a-9\beta^2 \qquad \sqrt{,}\,4\beta a-16\beta^2. \qquad \text{etc.}$$

spatium aequale imo idem portioni circulari.

Et aequatio talis est huius figurae istae applicatae: $y^2 = xa - x^2$. Ergo $\dfrac{y^2}{x} = a - x$. vel $\dfrac{y^2}{x} + x = a$.

NB. non potest x exhiberi pure.

$y^2+x^2 = xa$. Ergo quad. sinus additum quad° altitudinis = quad. applicatae parabolicae, ergo locus omnium y, est ad circuli circumferentiam. Ergo nihil hinc lucis.

13 imo idem *erg. L* 16 f. pure. *(1)* Hinc nata figuras, quarum applicatae non possunt exhiberi p u r e g e o m e t r i c e . *(2)* Apparet autem manifeste locum ipsius y. esse *(a)* hyper *(b)* parabolam, *(3)* $\mathrm{y}^2+\mathrm{x}^2$ *L* 18 circumferentiam. *(1)* Ergo $\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{xa}-\mathrm{x}^2}$. idem $\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2}$. Ergo $\mathrm{xa}-\mathrm{x}^2 = \mathrm{a}^2-\mathrm{x}^2$. Ergo $\mathrm{xa} = \mathrm{a}^2$. *(a)* ut constat *(b)* quod absurdum. *(2)* Ergo *L*

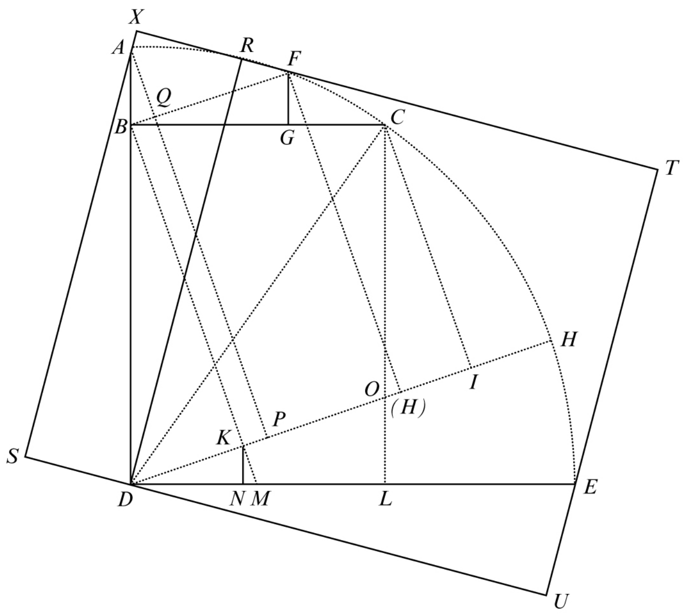
---

1 Video: *Opus geometricum*, S. 794 (Satz 136); das Ergebnis wird auch S. 840 angeführt. — Vgl. dazu J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 108 f. (Satz 136) = *WO* I, S. 426 f. 3 conatur: *Opus geometricum* S. 840; sein Vorhaben führt Saint-Vincent im 1. Teil des 9. Buches (S. 957–975) aus.
4 ait: AYNSCOM, *a. a. O.*, S. 117.

32. MOMENTA SEGMENTI CIRCULARIS
[Sommer 1673]

Überlieferung: L (tlw. verworfenes) Konzept: LH 35 II 1 Bl. 254–255. 1 Bog. 2°. 2 $\frac{1}{5}$ S. auf Bl. 254 v° unten sowie Bl. 255 r° u. v°. Bl. 254 r° leer. — Auf dem übrigen Bogen N. 31. Cc 2, Nr. 883 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück ist offenbar unter dem Eindruck von Leibniz' ersten gründlichen mathematischen Studien in Frühjahr 1673 entstanden und stellt einen Versuch dar, der Kreisquadratur mittels Momentenbetrachtungen näherzukommen. Das Auftreten der 1. Form des Doppelvorzeichens sowie das Wasserzeichen des Papiers deuten auf eine Abfassung in zeitlicher Nähe zu N. 40 vom August 1673 hin.



[*Fig. 1*]

11 [*Fig. 1*]: Die Elemente I, (H), DC, QP fehlen in der Leibniz'schen Handzeichnung, kommen aber im Text vor; sie sind deshalb vom Hrsg. ergänzt worden.

[*Teil 1, gültig*]

Esto segmentum circuli, ABC. Habetur eius momentum ex axe AB. habetur enim summa quadratorum applicatarum basi BC parallelarum, cuius dimidium est momentum figurae ex AB. Sed si haberetur momentum ex basi BC. haberetur area figurae. Ponamus enim haberi momentum ex AB esto b^3. ex BC esto c^3. Ergo area figurae ABC esto x^2. Distantia centri gravitatis ab AB erit $\frac{b^3}{x^2}$. et ab BC erit $\frac{c^3}{x^2}$. Datur ergo ratio harum distantiarum $= \frac{b^3}{c^3}$. ergo et recta, in quam cadit punctum seu centrum BF, si scilicet $\frac{BG}{FG} = \frac{b^3}{c^3}$.

Iam ex centro D ducatur rectae BF parallela DH. rectaeque ad eam perpendiculares: CI et BK. et ABC agatur circa axem HK. Patet momentum eius aequari cylindrico, cuius basis ABC. altitudo BK. quoniam distantia centri gravitatis, id est lineae BF ab axe HK. ducta in figuram dat eius momentum. Atqui totum momentum $ABKICA$ ex axe IK quadrabile est, item momentum et $CBKI$ trapezii, ergo et residui ABC. Posset ergo quadrari cylinder. Quod est absurdum.

2–14 *Dazu am Rande später ergänzt:*

Aliter[:] si habito momento ex AB. quaeras momentum ex DE. dicti semisegmenti ABC quod inveniri potest. Ergo potest duci recta DR. in quam cadit centrum gravitatis ipsius ABC semisegmenti. Hinc si semisegmentum volveretur circa XS vel TU. ipsi DR. axi aequilibrii parallelam, annulus productus aequabitur cylindrico cuius basis figura ABC. altitudo distantia ipsius DR. axis aequilibrii, ab axe revolutionis.

Hinc et p r o b l e m a , quamlibet circuli portionem statice bisecare.

Si quis alicuius portionis circularis momentum ex aliqua recta quae intra circulum ⟨producta⟩ in centrum non cadit, seu diametri portio non est, invenire posset, is quadraturam invenisset.

4 Sed *(1)* et habetur momentum ex basi BC. habetur enim momentum quadrantis ADE ex basi *(2)* si *L*

---

19 annulus: genauer müsste der von Leibniz angegebene Wert noch mit 2π multipliziert werden.

Sed ut ista clariora ⟨fiant⟩ ad calculos reducere operae pretium est.

Patet quadratum $\overset{\square}{BC}{}^2 = \overset{\square}{CD}{}^2 - \overset{\square}{BD}{}^2$. Ergo ut habeatur summa quadratorum omnium parallelarum basi BC, ipsi AB applicatarum, inveniatur primum summa omnium quadratorum ipsius radii, CD. ad AB applicatorum, demta summa omnium BD^2.
Summa omnium radii quadratorum, ad AB applicatorum, posito $AB = b$. et $CD = a$. erit $a^2 b$.
Summa omnium BD^2 ad AB applicatorum est[:]

$$\begin{array}{cccccl} a & + & a-\beta. & + & a-2\beta. & \text{etc.} \\ \underline{a} & & \underline{a-\beta.} & & \underline{a-2\beta} & \\ a^2 & + & a^2+\beta^2-2\beta a & + & a^2+4\beta^2-4\beta a & \text{etc.} \end{array}$$

vel $a^2 + a^2 + a^2$ etc. $+\ \beta^2 + 4\beta^2$ etc. — $2\beta a + 4\beta a + 6\beta a$ etc. $= a^2 b + \frac{1}{3}b^3 - ab^2$.
Ergo summa omnium $BC^2 = a^2 b - a^2 b - \frac{1}{3}b^3 + ab^2$. vel summa omnium $BC^2 = ab^2 - \frac{1}{3}b^3$.
Hanc summam dimidiatam, seu momentum ne repetere necesse sit, appellemus (c^3).

Iam ut quadrata omnium AB ad BC applicatarum, habeamus, ita procedendum est[:]

Dantur quadrata omnium parallelarum AD ad DE applicatarum, seu omnium applicatarum totius quadrantis, nempe $a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$.
Dantur et quadrata omnium applicatarum portionis ELC. ipsi CL. parallelarum, nempe $a\ EL^2 - \frac{1}{3}EL^3$.
Ergo $\frac{2}{3}a^3 - a\ EL^2 + \frac{1}{3}EL^3$ = summae omnium $\square^{\text{torum}}$, applicatarum quadrilinei $CLDAFC$. ipsi AD parallelarum.

Quaeritur iam summa omnium quadratorum, applicatarum semisegmenti CBA, ipsi AB parallelarum.

13 dimidiatam, seu momentum *erg. L*

---

11 Leibniz verwendet hier verschieden große Vorzeichen, die größeren haben zugleich Klammerfunktion.

Et manifestum est $AB^2 + BD^2 + AB \frown BD = AD^2$. itemque est in omnibus parallelis. Ideo

$$AB^2 = AD^2 - BD^2 - AB \frown BD.$$

vel quadratum parallelae ipsius AB aequatur quadrato parallelae ipsius AD. demtis: quadrato ipsius BD perpetuo eiusdem, et rectangulo ex parallela ipsius AB in perpetuam BD.

Quare et summa quadratorum omnium parallelarum ipsius BD ad BC applicatarum aequatur summae $\square^{\text{torum}}$, omnium parallelarum AD. demto quadrato BD ducto in BC. seu demto $BD^2 \frown BC$. demtaque praeterea summa omnium AB parallelarum, id est spatio vel semisegmento ABC in BD. seu cylindrico cuius basis ABC. altitudo BD.

Fiet summa quadratorum parallelarum $AB =$

$$\frac{2}{3}a^3 - a\ EL^2 + \frac{1}{3}EL^3 - BD^2 \frown BC - ABC \frown BD.$$

Est autem $BC = a - EL$. fiet:

$$\frac{2}{3}a^3 - a\ EL^2 + \frac{1}{3}EL^3 - a\ BD^2 - BD^2 \frown EL - ABC \frown BD.$$

$$\begin{array}{llcl} \text{vel quia} & EL & = & a - BC. \\ & EL^2 & = & a^2 + BC^2 - 2a\ \ BC. \\ & EL^3 & = & a^3 + a\ BC^2 - 2a^2BC^2 - a^2BC - BC^3 + 2a\ BC^2.\ \text{vel} \\ & & & a^3 - 3a^2BC + 3a\ BC^2 - BC^3. \end{array}$$

fiet:

$$\frac{2}{3}a^3 \underbrace{- a^3 - a\ BC^2 + 2a\ BC}_{-a\ EL^2} + \llcorner \underbrace{a^3 - 3a^2BC + 3a\ BC^2 - BC^3}_{= EL^3} \lrcorner \smile 3$$

$$-BD^2 \frown BC, -ABC \frown BD.$$

7 ad BC applicatarum *erg. L*

1 manifestum est: Hier wird die Rechnung fehlerhaft. In der Folgegleichung vergisst Leibniz den Faktor 2. Zu diesem Versehen kommen im Laufe der Untersuchung weitere hinzu (S. 555 Z. 6, S. 555 Z. 13, S. 555 Z. 17, S. 556 Z. 5, S. 556 Z. 7). Die Fehler wirken sich bis zum Ende von Teil 1 aus und werden auch in den Teil 2 hinübergenommen.

Totum autem istud

$$\underbrace{\frac{2}{3}a^3 - a\ EL^2 + \frac{1}{3}\ EL^3 - BD^2 \frown BC}_{(d^3)}\ -ABC \frown BD.$$

appellabimus (d^3) $-ABC \frown BD$.

Et quia sector circuli, $AFCD$. est curva AFC in radium [dimidiatum] $\frac{a}{2}$. ideo curvam appellabimus x, erit sector $\frac{ax}{2}$. A quo auferatur $\triangledown^{\text{lum}}\ DBC = \frac{BD \frown BC}{2} = (e^2)$. erit segmentum $ABC = \frac{ax}{2} - e^2$. et $ABC \frown BD = \frac{a^2x}{2} - e^2a$.

Ac summa quadratorum omnium ipsi AB parallelarum ad BC applicatarum erit $d^2 - \frac{ax}{2} + e^2a$. et momentum semisegmenti ABC ex basi vel semichorda aut sinu recto BC erit:

$$\frac{d^3}{2} - \frac{a^2x}{4} + \frac{e^2a}{2}.$$

Ergo
$$\frac{FG}{BG} = \frac{d^3 - \frac{a^2x}{2} + e^2a}{2c^3}.$$

Ducatur parallela ipsi BF ex centro D. nempe DH. Actoque spatio ABC circa axem DH. momentum eius erit: $\frac{ax}{2} \frown BK$.

Investiganda ergo BK ex datis, quod ita facile fiet: Triangulum BKD est simile triangulo BGF (est enim simile $\triangledown^{\text{lo}}\ DKM$. et hoc $\triangledown^{\text{lo}}\ DNK$. et hoc $\triangledown^{\text{lo}}\ DLO$. et hoc $\triangledown^{\text{lo}}\ BGF$) ergo

$$\frac{BK}{BG\ \text{cognita}} = \frac{FB}{BD\ \text{cognita}} \qquad \text{ideo } BK = \frac{FB \frown BG}{BD}.$$

4 dimidiatum *erg. Hrsg.* 8 vel ... recto *erg. L* 12 DH. | Intelligatur iam ducta, et ad eam perpendicularis BK. *gestr.* | Actoque *L*

Posito $BG = (f)$. et $BD = (g)$. et $FB = (y)$. fiet: $BK = \dfrac{yf}{g}$.

Patet hinc:

$$\frac{ax}{2} \frown \frac{yf}{g} = \left(\frac{axyf}{2g}\right) = \text{momento semisegmenti } ABC \text{ ex axe } KI.$$

Cum autem $y = FB$. sit $\sqrt{BG^2 + FG^2}$. et $FG = \dfrac{d^3 - \frac{a^2x}{2} + e^2a, \frown f}{2c^3}$. vel pro $\dfrac{d^3 + e^2a, \frown f}{2c^3}$ ponendo (i), fiet $(FG) = i - \dfrac{a^2fx}{2c^3}$, et $FG^2 = i^2 + \dfrac{a^4f^2x^2}{4c^6} - \dfrac{\cancel{2}ia^2fx}{\cancel{2}c^3}$. et ponendo (ξ) pro $\dfrac{a^4f^2}{4c^6}$. et (k) pro $\dfrac{ia^2f}{c^3}$, fiet $FG^2 = i^2 + \xi x^2 - kx$. Iam $BG^2 = f^2$.

Ergo $$(FB) = \sqrt{f^2 - i^2 - \xi x + kx} = (y).$$

in quae ducta $\dfrac{axf}{2g}$ dant momentum semisegmenti $\dfrac{axyf}{2g}$. Pro $\dfrac{af}{2g}$ substituatur (l) fiet momentum semisegmenti $= \sqrt{\llcorner f^2l^2x - i^2l^2x^2 - \xi x^4l^2 + kx^3l^2 \lrcorner}$.

[*Teil 2, verworfen*]

Idem vero momentum aliter investigabimus.

Ante omnia quaeremus momentum trapezii $KBAP$ sive rectanguli KQ. et $\triangledown^{\text{li}}$ AQB. Ac primum rectanguli KQ momentum investigare facile est, data recta KP. Est enim $\dfrac{KB^2}{2} \frown KP$. Investiganda est ergo ante omnia ipsa KP. quod ita fiet:

$$DP \text{ est} = FB.$$

ergo $FB - DK = KP$. investiganda ergo recta DK.

---

15 *Darüber:* Error NB.

1 f. $\frac{\mathrm{yf}}{\mathrm{g}}$. *(1)* Item aliter, quia $\triangledown^{\text{lum}}$ BDM simile $\triangledown^{\text{lo}}$ BGF. etiam $\triangledown^{\text{lum}}$ MGB simile erit $\triangledown^{\text{lo}}$ BGF, ideo quia angulus MBF rectus recta FG producta incidet in M | *darüber separat gestr.:* falsum | ergo DM = BG. et DP = BF. seu $\triangledown^{\text{lum}}$ DMP = et simile $\triangledown^{\text{lo}}$ BGF. Iam et sic dici potest: $\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BM}}$. ideo $\mathrm{BK} = \frac{\mathrm{BD = g \frown BD = g}}{\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{g}^2}{\mathrm{z}}$. posito BM = (z). falsum ergo $\mathrm{BK} = \frac{\mathrm{yf}}{\mathrm{g}}$. et proinde | ut et *erg.* | id unde deduxeramus rectam FG productam cadere in M. NB. falsum rectam DM = BG. ideo falsum et rectam BM esse cognitam. Sed haec mittamus, *(2)* Patet *L*

Et quia $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ BKD et BGF similia erit $\dfrac{DK}{FG} = \dfrac{BK}{BG}$. Ergo $DK = \dfrac{BK \frown FG}{BG}$. vel quia BK rursus resolvenda in FB. brevius erit $\dfrac{DK}{FG} = \dfrac{BD}{BF}$. Ergo

$$DK = \frac{\overset{g}{BD} \frown FG}{FB}.\ \text{seu}\ (DK) = \frac{ig - \dfrac{a^2fgx}{2c^3}}{FB}.$$

a FB detractum relinquit KP. in quam rectam KP. ducendum quadratum dimidium rectae KB.

Est autem recta KB $\dfrac{yf}{g}$. ergo $KB^2 = \dfrac{y^2f^2}{g^2}$ sive

$$\frac{f^4}{g^2} - \frac{i^2f^2}{g^2} - \frac{\xi x^2f^2}{g^2} + \frac{kxf^2}{g^2}.$$

et pro $\dfrac{f^4}{g^2} - \dfrac{i^2f^2}{g^2}$ ponendo (m^2), pro $\dfrac{\xi f^2}{g^2}$ ponendo (ω), pro $\dfrac{Kf^2}{g^2}$ ponendo (n) fiet

$$(KB^2) = m^2 - \omega x^2 + nx.$$

ducendum in $\dfrac{KP}{2}$. quod cum sit radix surda, ipsum KB^2 rursus quadrandum est, fiet

$$\left.\begin{array}{rrrr}
 & m^2 & -\,\omega x^2 & +\,nx \\
 & \underline{m^2} & \underline{-\,\omega x^2} & \underline{+\,nx} \\
 & +\,m^2nx & -\,\omega nx^3 & +\,n^2x^2 \\
-\,\omega x^2m^2 & & -\,\omega nx^3 & +\,\omega^2x^4 \\
\underline{-\,\omega x^2m^2} & \underline{+\,m^2nx} & \underline{-\qquad} & \underline{+\,m^4}
\end{array}\right\}\ \text{sive}$$

$$\overline{+m^4 + 2m^2nx - 2\omega m^2x^2 + n^2x^2 - 2\omega nx^3 + \omega^2x^4} = KB^4.$$

ducendum primum in y^2. et a producti radice quadrata; adimenda est radix quadrata eiusdem KB^4, ducti in DK^2. Residui dimidium erit momentum quaesitum.

Porro quia in caeteris omnibus componentibus implicitum est x. demto m^4. ideo reliquis sequestratis, cogitemus tantum m^4 duci in y^2. seu in $f^2 - i^2$ *etc.* fiet $m^4f^2 - m^4i^2 = (o^6)$. Cumque reliquis omnibus terminis, sane quam plurimis implicetur x. ea omnia simul appellabimus z^6. Eritque

$$KB^4 \text{ in } FB^2 = o^6 \mp z^6.$$

Et quia idem KB^2 ducendum in DK. manifestum est, nihil hic oriturum quod non incognito affectum sit, ob divisorem FB incognito affectum, etsi enim ex parte tantum, non potest tamen dividi per partes divisoris. Fieri tamen potest ut ab eo liberetur, dum scilicet oppositum aequationis per divisorem illum multiplicatur. Ideo se-

questratis caeteris ipsius KB^2 terminis in DK ductis, quae simul ponamus facere: ω^3, quia ipsa scilicet ab incognito liberari non possunt, cogitemus nunc m^2 in $\dfrac{ig - \dfrac{a^2fgx}{2c^3}}{FB}$, fiet:
$$\frac{m^2ig}{FB} - \frac{a^2fgxm^2}{2\ FB\ c^3}.$$
Sed quia posterius $\dfrac{a^2fgxm^2}{2\ FB\ c^3}$ ab incognito illiberabile est, ideo nominemus ipsum v^3 fietque
$$\sqrt{q}\ \ o^6 \mp z^6, -\frac{m^2ig}{FB} + v^3 \mp \omega^3 = \text{m o m e n t o\ \ r e c t a n g u l i}\ \ [K\,P.]$$

Sed possum et simpliciter momentum totius rectanguli $[BK(H)F]$ inire multiplicando KB^2 in $FB = \sqrt{q}\ \ o^6 \mp z^6$. ergo m o m e n t u m .

Nunc et momentum $\bigtriangledown^{\text{li}}$ AQB. est semitriangulum ductum in KB. et praeterea applicatarum $\bigtriangledown^{\text{li}}$ ipsi AQ parallelarum quadrata dimidia.

Iam $\dfrac{AQ}{BK} = \dfrac{a - g\ (AD - BD)}{g}$. Ergo $AQ = \dfrac{a\ BK - g\ BK}{g}$.

Iam $BK = \dfrac{FB\ f}{g}$. Ergo $AQ = \dfrac{afFB - gfFB}{g^2}$.

Huius $\square$, AQ^2 erit $\dfrac{a^2f^2FB^2 - f^2g^2FB^2}{g^4}$.

Et quia FB^2 est $= f^2 - i^2 - \xi x^2 + kx$. sumamus tantum $f^2 - i^2$, ea per $\dfrac{a^2f^2}{g^4}$, vocemus (p^2) reliqua per eadem, vocemus: (φ^2) habemus: $p^2 \mp \varphi^2$. Eodem modo cum $\dfrac{f^2g^2}{g^4}$, $\frown$ $f^2 - i^2$, vocemus (q^2) et reliquum (ψ^2) fiet $q^2 \mp \psi^2$. ergo
$$AQ^2 = p^2 \mp \varphi^2 - q^2 \mp \psi^2.$$
Hoc ducamus in $\dfrac{KP}{3}$. seu in $\dfrac{FB}{3} - \dfrac{ig - \dfrac{a^2fgx}{2c^3}}{3FB}$ fiet $\square$ ipsius AQ^2. nempe AQ^4. seu $p^4 + q^4 - 2p^2q^2$ etc. $\mp$ etc.

6 f. r e c t a n g u l i | K G *ändert Hrsg.* |. *(1)* Poteramus hoc labore supersedere, et simpliciter momentum *(2)* Sed *L* 7 BKHF *L ändert Hrsg.* 9 est *(1)* triangulum *(2)* semitriangulum *L* 14 + kx. | Ac *streicht Hrsg.* | sumamus *L*

Hoc ducatur in $\frac{FB^2}{9}$. ducatur ergo tantum in $\frac{f^2-i^2}{9}$ etc. sed hoc appellemus α^6, reliqua neglecta omnia, ex ductu isto oriunda: (ϖ^6) habemus:

$$AQ^4 \frown \frac{FB^2}{9} = \alpha^6 \mp \varpi^6. \quad \text{et} \quad AQ^2 \text{ in } \frac{FB}{3} = \sqrt{_q}\ \alpha^6 \mp \varpi^6.$$

Idem AQ^2 in $\frac{ig}{3FB}$, multiplicetur in ea tantum p^2-q^2, fietque $\left(\frac{\beta^4}{3FB}\right)$. reliqua in idem $\frac{ig}{3FB} = (\varsigma^3)$. denique AQ^2 in $\frac{a^2fgx}{3FB \frown 2c^3} = (\rho^3)$. fiet: $\frac{\beta^4}{3FB} \mp \varsigma^3 - \rho^3 = AQ^2$ in DK.

Ergo AQ^2 in $\frac{KP}{3} = \frac{\sqrt{_q}\ \alpha^6 \mp \varpi^6, -\frac{\beta^4}{3FB} - \mp \varsigma^3 + \rho^3}{2} =$ m o m e n t o trianguli AQB.

Momentum iam quadrilinei $QPHFQ$ quaerendum est.

Ac primum momentum totius $HFAP$ semisegmenti, id est $\square AP$ ductum in a demto cubo, HP^3.

Ac primum $\square AP$ est $BK + AQ, \square$. seu $BK^2 + AQ^2 - 2AQ \frown BK$.

Et quidem $AQ = \frac{afFB - gfFB}{g^2}$, et $BK = \frac{FB \frown f}{g}$. Ergo

$$AQ \frown BK = FB^2 \frown \frac{af-gf}{g^2} \frown \frac{f}{g}.$$

Iam $FB^2 = f^2 - i^2 - \xi x^2 + kx$. Sumamus tantum $f^2 - i^2, \frown \frac{af-gf}{g^2}, \frown \frac{f}{g} = (\gamma^2)$ et reliqua omnia erunt (π^2) ergo $AQ \frown BK = \gamma^2 \mp \pi^2$.

Iam $\square AP = BK^2 + AQ^2 - 2\gamma^2 - \mp \pi^2$

$$= m^2 - \omega x^2 + nx + p^2 \mp \varphi^2 - q^2 - \mp \psi^2$$

seu: $$\underbrace{m^2 + p^2 - q^2}_{(\delta^2)} + \underbrace{nx - \omega x^2 \mp \varphi^2 - \psi^2}_{(\varpi)}.$$

Ergo $\square AP = \delta^2 - \varpi^2$ in a erit $a\delta^2 - a\varpi^2$.

Nunc opus ut investigemus cubum ipsius HP.

Iam $HP = a(= HD) - DP(= FB)$. ergo $HP = a - FB$.

Cubus de $a - FB$. est $a^3 - 2a^2FB + 2aFB^2 - FB^3$. seu

$$a^3 - \llcorner\sqrt{q}\llcorner\ \theta^6 \mp \nu^6 \lrcorner\lrcorner + \text{א}^3 \mp \text{ת}^3 - \text{ב}^3 - \mp \text{ס}^3.$$

Ergo $a\delta^2 - a\varpi - \dfrac{a^3 + \llcorner\sqrt{q}\ \ \theta^6 \mp \nu^6 \lrcorner - \text{א}^3 - \mp \text{ת}^3 + \text{ב}^3 \mp \text{ס}^3}{3}$.

m o m e n t u m e s t s e m i s e g m e n t i.

Imo aliter potius, quadratum HP ducatur in $\langle a \rangle$ erit $a^3 + a\,FB^2 - \langle 2a^2FB \rangle$. Sed falsa determinatio ipsius HP, nempe $a - FB$. et hunc errorem iam supra [commisi], nec satis patientiae est, ad ista retexenda.

1

$$\begin{array}{rrrr}
 & a - b & & \\
 & \underline{a - b} & & \\
 & a^2 - \ ab & + b^2 \ \textit{(!)} & \\
 & & a \ - b & \\
a^3 - 2a^2b & + 2ab^2 & - b^3 &
\end{array}$$

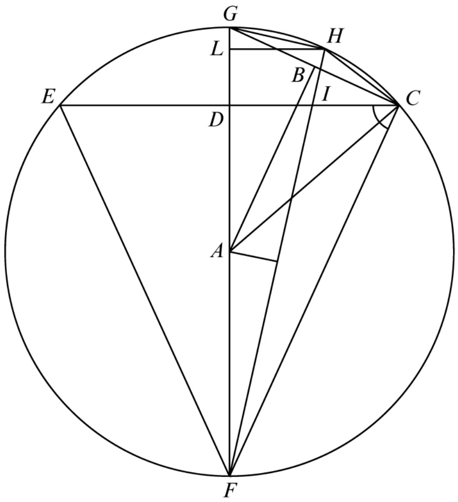
4 f. s e m i s e g m e n t i. | seu $\frac{1}{3}$ in $3a\delta^2 - a\varpi^2 - a^3$ *gestr.* | *(1)* Investigemus et momentum semisegmenti CIH. ac primum $\square$FI $=$ IK^2. *(2)* Imo *L* 6 erravi *L ändert Hrsg.*

33. VARIA AD CIRCULUM QUADRANDUM PERTINENTIA
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 194. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 194 r° sowie 6 Z. nebst Fig. 3 auf Bl. 194 v° oben (= Teil 3). Fig. 1 und Teil 1 bis S. 564 Z. 6 vom übrigen Text mittels Trennstrich abgesetzt.
Cc 2, Nr. 620

Datierungsgründe: Wegen des Verweises von S. 565 Z. 3 ist das vorliegende Stück nach N. 21 und nach N. 26 entstanden. Wegen des Wasserzeichens des Papiers ist es vor N. 40 vom August 1673 anzusetzen.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

11 [*Fig. 1*]: Zunächst hat Leibniz in Fig. 1 und im Text (bis S. 562 Z. 11) kleine Buchstaben zur Benennung verwendet; dann ist er zu Großbuchstaben übergegangen. In der Handzeichnung selbst hat Leibniz den Schnittpunkt von FH und EC mit I bezeichnet, gleichzeitig dient I aber auch zur Bezeichnung für den Fußpunkt des Lotes von C auf FH. Da Leibniz GL als infinitesimale Größe ansieht (vgl. S. 564 Z. 11), ist dies in 1. Näherung gerechtfertigt.

In circulo ACF ducta chorda EC. et ab extremis diametri F. G. iunctis rectis GC. FC. et ex centro A recta AB ducta, perpendiculari ad GC. aio triangula rectangula: ABC et FDC (vel DGC) esse similia.
Nam ang. $EFC =$ ang. GAC. ergo et ang. FEC vel FCE angulo AGC vel ACG aequalis. Triangula ergo EFC. GAC similia, ergo et FDC. ABC. Q. E. D.
Ergo $\bigtriangledown ABC$ simile triangulo characteristico cycloeidis. Sed hoc per se patet.
$\bigtriangledown^{\text{la}}$ HFC et IFC similia sunt seu $\dfrac{HF}{CF} = \dfrac{CF}{IF} = \dfrac{HC}{IC}$. Ergo

$$HF \frown IF = CF\square. \qquad HF \frown IC = CF \frown HC. \qquad CF \frown IC = IF \frown HC.$$

Porro ex his colligi posse puto FI, quod quaerimus.

Esto $FH = (a)$. $FC = (b)$. $FI = (x)$. erit $ax = b^2$. Ergo $\dfrac{b^2}{a} = x$.
Porro $FH = Rq \llcorner FL^2 - LH^2 \lrcorner$. et $LH^2 = \text{Rad.}^2. - LA^2$.
ergo $FH = Rq \llcorner FL^2 - \text{Rad.}^2 + LA^2 \lrcorner$ sed $FL^2 = \text{Rad.}^2 + LA^2 - 2FA \frown LA$.
Ergo $FH = Rq, 2LA^2 - 2FA \frown LA$.

$$\left.\begin{array}{c} GH^2 = GL^2 + LH^2 \\ \wedge \\ GL \frown LF \\ \underbrace{GL + LF}_{GF} \frown GL \\ GF \frown GL \end{array}\right\} \text{ergo } GH^2 = GF \frown GL.$$

Ergo $FH^2 = GF^2 - GF \frown GL = \underbrace{GF - GL, \frown GF}_{FH^2}$.

8 f. IF $\frown$ HC. | Ergo si FH sit diameter FG. et HC sit GC. et IC sit DC. erit diameter in *gestr.* | Porro *L*

11–13 Die Rechnungen dieses Abschnittes sind nicht fehlerfrei. Bei korrekter Rechnung ergäbe sich $FH = Rq, 2\text{Rad.}^2 + 2FA \frown LA$.

$FH = Rq\ GF^2 - GF \frown GL$. $FC = Rq\ GF^2 - GF \frown GD$.

Ergo $\dfrac{GF^2 - GF \frown GD}{Rq\ GF^2 - GF \frown GL} = FI$.

$$\frac{GF^4 + GF^2 \frown GD^2 - 2\ GF^3, GD}{GF^2 - GF \frown GL} = \boxed{FI^2 = \frac{GF^3 + GF \frown GD^2 - 2GF^2, GD}{GF - GL}}.$$

Ergo $\dfrac{FI^2}{GF} = \dfrac{GF^2 + GD^2 - 2GF, GD}{GF - GL}$. Ergo $\dfrac{FI}{\sqrt{[GF]}} = \dfrac{GF - GD}{\sqrt{GF - GL}}$. vel $\dfrac{FI^2}{GF^2} = \dfrac{GF^2 + GD^2 - 2GF, GD}{GF^2 - GL \frown GF}$. Ergo $\dfrac{FI}{GF} = \dfrac{GF - GD = FD}{Rq\ GF^2 - GF \frown GL, = FH}$.

$\dfrac{FI}{\sqrt{[GF]}} = \dfrac{GF - GD}{\sqrt{GF - GL}}$. Ergo $FI = \dfrac{GF - GD}{\sqrt{\dfrac{GF - GL}{[GF]}}}$.

$$FI \frown FH = \underbrace{GF - GD}_{FD}, \frown GF = CF^2.$$

562,18 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} GL \frown GL + GL \frown LF = GL + LF \frown GL \\ \quad aa \quad + \quad ab \quad = a + b, \frown a \\ \quad \underline{ab} \end{array}$$

4+6 GD *L ändert Hrsg. dreimal* 5 Ergo *(1)* $\dfrac{\mathrm{FI}}{\mathrm{GF}} \times \dfrac{\mathrm{GF - GD = FD}}{\mathrm{Rq\ GF^2 - GF \frown GL, = FH}}$. cylinder ergo parabolicus = cylindro omnium FI, demto ductu omnium GD in FI *(2)* $\dfrac{\mathrm{FI}}{\mathrm{GF}}$ *L*

Ergo summa quadratorum CF^2 pendet a summa quadratorum diametri, et summa omnium GD ducta in diametrum.

$\dfrac{FD}{FL} = \dfrac{FI}{FH}$. seu $\dfrac{FD}{FL} = \dfrac{FD \frown GF}{FH^2}$. Ergo $FL = \dfrac{FH^2}{GF}$. Ergo $\dfrac{FD}{FL} = \dfrac{FD \frown GF}{FH^2} = \dfrac{FI}{FH}$.

Ergo $\dfrac{FD \frown GF}{FH} = FI$.

$\dfrac{DI}{LH} = \dfrac{FI}{FH} = \dfrac{FD \frown GF}{FH^2}$. $DI = \dfrac{FD \frown GF \frown LH}{FH^2}$. $CI = \dfrac{CF \frown HC}{HF}$.

Ergo $\dfrac{FD \frown GF \frown HL}{FH^2} + \dfrac{CF \frown HC}{FH} = DC$.

In circulo LH sinus est $Rq, a^2 - \llcorner a - \beta \lrcorner\, \square$

$$\bigvee$$

$$a^2 + \beta^2 - 2a\beta = Rq, 2a\beta - \beta^2$$

ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ rectangulum ALH.

Idem LH sinus $= \llcorner GL \frown LF \lrcorner\ Rq, = Rq, \beta, \frown 2a - \beta, = Rq, 2a\beta - \beta^2,$. Multiplicetur per $a - \beta$. vel $Rq\ a^2 + \beta^2 - 2a\beta$. fiet:

$$\begin{array}{rrr}
+\ a^2\ + & \beta^2\ - & 2a\beta \\
- & \beta^2\ + & 2a\beta \\ \hline
- & \beta^4\ - & 4a^2\beta^2 \\
+\ 2a\beta^3\ + & & 2a\beta^3 \\
- & \beta^2 a^2\ + & 2a^3\beta \\ \hline
\end{array}$$

$$\sqrt{\llcorner} - \beta^4 + 4a\beta^3 + 2a^3\beta - [5]a^2\beta^2 \lrcorner$$

et horum quidem summa quadrari potest; puto etiam radicem extrahi posse. Imo dubito de radice.

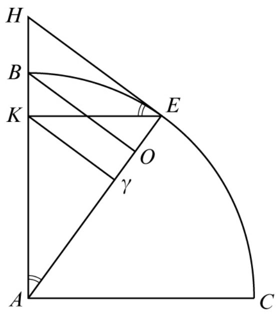
Si iam differentiae sinuum sumantur:

$Rq, 2a\beta - \beta^2,, \quad - \quad Rq, 4a\beta - 4\beta^2,, \quad - \quad Rq, 6a\beta - 9\beta^2,,$

$Rq, 4a\beta - 4\beta^2,, - Rq, 2a\beta - \beta^2,,$ summa pendet a q. c.

4 f. FI. | AI $= \dfrac{\mathrm{GF}}{2\beta}$. DI $= \dfrac{\mathrm{GF}}{2} - $ CI. *streicht Hrsg.* | $\dfrac{\mathrm{DI}}{\mathrm{LH}}$ *L* 18 3 *L ändert Hrsg.* 23 *Unter* $\mathrm{Rq}, 2\mathrm{a}\beta - \beta^2,,$: $\sqrt{\llcorner} + \mathrm{a}^2 + \beta^2 - 2\mathrm{a}\beta \lrcorner$ *L streicht Hrsg.*

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

Inspiciatur figura 2[da] *De ductibus*. In ea demittatur ex K. puncto extremo rectae AK. sinus complementi perpendicularis in radium AE. esto $K\gamma$. ne literas multiplicemus. Manifestum $\dfrac{K\gamma}{BO \text{ sinus}} = \dfrac{AO \text{ [sin. compl.]}}{AE \text{ [rad.]}}$. Ergo $K\gamma = \dfrac{AO \frown BO}{AE}$. Datur autem quadratura omnium $K\gamma$, quia $K\gamma \frown$ rad. $=$ momentum sinus. Ergo cylinder omnium $K\gamma$ aequalis momento sinuum et ideo quadrabilis.

Aliter[:] $\dfrac{K\gamma}{HE \text{ tang.}} = \dfrac{AK \text{ sin. compl.}}{AH \text{ sec.}} = \dfrac{AK\ \square}{AE \text{ rad. } \square}$.

Ergo $K\gamma = \dfrac{AK \text{ sin. compl. } \square \frown \text{tang.}}{AE \text{ rad. } \square}$. vel $K\gamma \frown AE$ rad. $= \dfrac{\text{sin. compl. } \square\ \frown \text{tang.}}{\text{rad.}}$.

Ergo $K\gamma \frown AE\ \square$ (quadrab.) $=$ sin. compl. $\square \frown$ tang. Ergo $\dfrac{K\gamma \frown AE\ \square}{\text{sin. compl.}} =$ mom. tang. seu ductus hyperbolae in $K\gamma$ $=$ momento tangentium, is ergo ductus ex quadratura circuli pendet.

2 [*Fig. 2*] *erg. Hrsg. nach Text u. N. 17.* 5 $\dfrac{\mathrm{K}\gamma}{\mathrm{BO\ sinus}} =$ *(1)* $\dfrac{\mathrm{AE\ rad.}}{\mathrm{AO\ sin.\ compl.}}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AE}}$ *L ändert Hrsg.* 5 f. quadratura | summae *streicht Hrsg.* | omnium *L*

3 *De ductibus*: vgl. N. 26 S. 433; die Figur befindet sich aber nicht dort, sondern N. 21 S. 388.

Substituamus pro $K\gamma$ eius aequationem, erit:

$$\frac{\dfrac{\text{sin.}\frown\cancel{\text{sin. compl.}}}{\cancel{\text{rad.}}}\frown\text{rad.}\,\cancel{\square}}{\cancel{\text{sin. compl.}}} = \text{mom. tang.}$$

seu $\dfrac{\dfrac{\text{sin.}\frown\cancel{\text{sin. compl.}}}{\cancel{\text{rad.}}}\frown\text{rad.}\,\cancel{\square}}{\text{sin. compl.}} = \text{tang.}\frown\cancel{\text{sin. compl.}}$ fiet $\dfrac{\text{sin.}\frown\text{rad.}}{\text{sin. compl.}} = \text{tang.}$

$\dfrac{\text{rad.}\frown\text{rad.}}{\text{sin. compl.}} - \dfrac{\text{sin.}\frown\text{rad.}}{\text{sin. compl.}}$ horum id est differentiarum inter sec. et tang. summa quadrabilis, seu horum $\dfrac{\text{rad.}\,\square - \text{sin.}\frown\text{rad.}}{\text{sin. compl.}}$.

[*Teil 3*]

Operae pretium est examinare, an sinuum summa seu quadratura circuli exhiberi possit per infinitam seriem numerorum rationalium nulla surdorum mixtura ad exemplum hyperbolae.

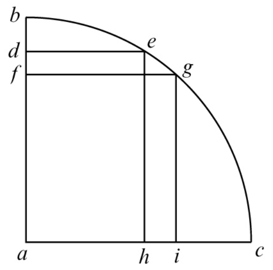
7–567,6 *Dazu oben am Rande:* Imo id non procedit.

1 f. erit: *(1)* $\dfrac{\dfrac{\text{AE rad.}\frown\text{BO sin.}}{\text{sin. compl.}}\frown\text{rad.}\,\square}{\text{sin. compl.}} = \text{mom. tang. seu } \dfrac{\text{radii cubus in sinum}}{\text{sin. compl.}\,\square} = \dfrac{\text{mom. tang.}}{1}$. seu radii cubus in tangentem, aequatur sinus complementi cubo in sinum. *(2)* $\dfrac{\dfrac{\text{sin.}\frown\cancel{\text{sin. compl.}}}{\cancel{\text{rad.}}}\frown\text{rad.}\,\cancel{\square}}{\cancel{\text{sin. compl.}}}$ *L*

5 $\dfrac{\text{rad.}\,\square - \text{sin.}\frown\text{rad.}}{\text{sin. compl.}}$. | Ergo si quadrari possent $\dfrac{\text{sin.}\frown\text{rad.}}{\cancel{\text{sin. compl.}}}\frown\cancel{\text{sin. compl.}}$ *gestr.* | *L*

---

5 quadrabilis: Dies ist nicht zutreffend.



[*Fig. 3*]

Esto quadrans circuli *abc*. sinusque duo *de*. *fg*. et sinus complementi *eh*. *gi*. ita tamen ut distantiae *df* vel *hi* intelligantur linea quavis assignabili minores. Quaeramus momenta portionum abscissarum *bde*, et *bfg*, ex axe librationis *ac*. quadrabilia. Differentia momentorum per sinum complementi divisa, dabit differentiam spatiorum, ipsum scilicet spatium *dfge* quod sinui coincidit, [*Text bricht ab*]

4 quadrabilia *erg. L* 5 per sinum ... spatiorum, *erg. L*

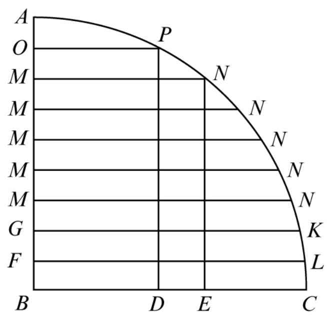
34. ANNOTATIONES AD HONORATUM FABRI ET WALLISIUM. DE HYPERBOLA

[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 263–264. 1 Bog. 2°. 4 S. Cc 2, Nr. 612

Datierungsgründe: Wie die gegenseitigen Bezüge zeigen, steht das Stück in engem Zusammenhang mit N. 26 und N. 27, ist also in deren zeitlicher Nähe anzusetzen.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1, Blindzeichnung*]

Esto quadrans circuli ABC cuius altitudo AB divisa in partes infinitas aequales BF. FG. etc. Ex punctis divisionis ductae intelligantur applicatae basi BC parallelae GK. FL. etc. quibus comprehendentur quadrilinea infinita $GKLF$. $FLCB$. etc.

Momentum cuiuslibet applicatae ut FL, vel quod aequipollet, quadrilinei latitudinis infinite parvae ut $FLBC$ ex basi BC, est factum ex ductu distantiae a b⟨asi hoc⟩ loco FB in dictam FL.

Ideo	momentum	FL	est	$1\,FL$.	
	momentum	GK	est	$2\,GK$.	
	momentum	MN	est	$3\,MN$.	etc.
	momentum	OP	est	$8\,OP$.	posito FB esse $=1$

Momentum totius quadrantis ex basi BC est $\frac{2}{3}a^3$. posita $a = AB$.

Momentum quadrilinei truncati $BOPNC$ ex basi BC est compositum ex momento rectanguli BP, et momento semisegmenti $PNCD$.

Momentum rectanguli est: $\frac{OB^2}{2} \frown \genfrac{}{}{0pt}{}{OP}{BD}$.

Momentum segmenti $PNCD$ est $a\,CD^2 - \frac{CD^3}{3}$.

Iam $\dfrac{\frac{2}{3}a^3 - \frac{OB^2}{2} \frown OP, -a\,CD^2 + \frac{CD^3}{3}}{OB} = OP.$

Ita momentum quadrilinei truncati, est $\frac{MB^2}{2} \frown MN - a\,CE^2 + \frac{CE^3}{3}$.

Et: $\dfrac{\frac{OB^2 \frown OP}{2} + a\,CD^2 - \frac{CD^3}{3}, -\frac{MB^2 \frown MN}{2} - \frac{CE^3}{3} + a\,CE^2}{MB} = MN.$

Ecce novam exprimendarum circuli applicatarum seu Cartesiano more ipsius y (posito $MB = x$) rationem, sed ex indivisibilium sive quadratricis geometriae calculo petitam, et quodammodo hyperboloeiforme, dum fractionum more quarum continue decrescunt uniformiter nominatores, exprimuntur.

Iam aequationem istam polire conabimur:

$$\frac{OB^2 \frown OP}{2} + a\,CD^2 - \frac{CD^3}{3} - \frac{MB^2 \frown MN}{2} - \frac{CE^3}{3} + a\,CE^2 = MN \frown MB \frown (FB).$$

Quia autem ablatis a se invicem solidis, non nisi planum relinqui est solida illa aequalia esse, hinc sequitur:

$$\frac{OB^2 \frown OP}{2} + a\,CD^2 + a\,CE^2 = \frac{CD^3}{3} + \frac{MB^2 \frown MN}{2} + \frac{CE^3}{3}.$$

$$a\,CD^2 + a\,CE^2 - \frac{CD^3}{3} - \frac{CE^3}{3} = \frac{MB^2 \frown MN - OB^2 \frown OP}{2}.$$

---

8 Hinc apparet nunquam radices in serie sinuum exprimenda eliminari posse.

1–570,5 Zum Rechengang: die Werte für die Momente des Viertelkreises und des Segments müssten noch halbiert werden. Diese Flüchtigkeitsfehler haben keinen Einfluss auf die Ergebnisse, wohl aber der Vorzeichenfehler in Z. 7, der schließlich auf den von Leibniz selbst bemerkten Widerspruch führt.

et quia FB infinite parva, ideo $CD = CE$. et $MB = OB$. et $OP = MN$.

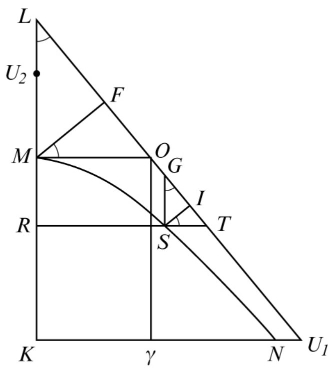
Ideo iam $a\,CD^2 + a\,CD^2 - \dfrac{CD^3}{3} - \dfrac{CD^3}{3} = \dfrac{MB^2 \frown MN - MB^2 \frown MN}{2} = 0$.

Ergo $\cancel{2}a\,CD^2 = \cancel{2}CD^3$ *(!)*. Quod est absurdum, necesse est alicubi lapsum in calculo latere.

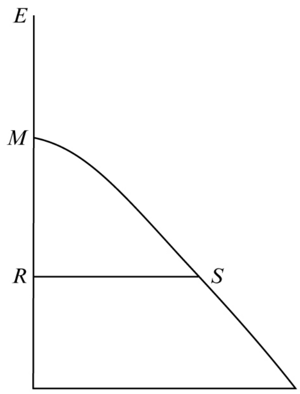
Caeterum satis illud apparet surdarum mentionem vitari non posse.

[*Teil 2*]

De hyperbola P. Fabri *Synoψi* pag. 80. 184. 293. tab. 1 fig. 18.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Nimirum si sit $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ LKU_1 volutum circa axem LK. ac deinde secetur conus LKU_1 in O. ita ut sectio sit hyperbola quae traducatur in triangulum coni generatrix ita ut axis hyperbolae sit MK. basis KN. Volvantur rursus omnia circa axem LK. figura solida

7 De hyperbola P. Fabri: *Synopsis geometrica*, 1669. An drei der angezogenen Stellen befinden sich Marginalien, s. dazu N. 1. Zum mathematischen Sachverhalt vgl. E. A. Fellmann, *Die mathematischen Werke von Honoratus Fabry*; *Physis* I (1959), S. 21 f. 8 [*Fig. 2, 3*]: In Fig. 2 kommt die Bezeichnung U (wegen der Gleichheit der Strecken KU) doppelt vor; sie wird eindeutigkeitshalber mittels U_1 und U_2 unterschieden. Fig. 3 stellt in Analogie zu Fig. 2 den allgemeinen Fall dar. Die sich daran anschließende Betrachtung (ab S. 572 Z. 2) ist verfehlt.

Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 4

annularis genita a spatio MOU_1N aequabitur cylindro cuius altitudo MK. basis circulus [radii] MO.
Cuius rei haec ratio est, quod quadratum applicatae hyperbolae ut RS aequatur quadrato $RT-$ quad. MO. Ergo et semiquadratum seu momentum applicatae hyperbolae aequatur momento seu semiquadrato RT demto semiquadrato MO. Iam momentum RT differt a momento RS momento ST. ergo momentum ST = semiquadrato MO.
Hinc iam manifestum est genito hyperbolico circa axem haberi posse hoc modo cylindrum aequalem.

Patet etiam memorabilis quaedam circuli (vel ellipsis) et hyperbolae relatio.

In circulo est $y^2 = a^2 - x^2$.
In hyperbola est $y^2 = x^2 - a^2$.

Videndum an hinc sequatur quadratura circuli ex data hyperbolae, vel contra.
Est autem x quantitas continue crescens in hyp. decrescens in circulo arithmetica ratione, a est invariabilis. Item $y^2 + a^2 = x^2$. si y arithmetice crescere seu abscissa, x applicata iam intelligatur.
Imo x vel y hoc loco non est abscissa, potest tamen intelligi abscissa et aliquid praeterea, ut si recta KN quae est hoc loco x continue decrescens intelligatur translata in KMU_2 abscissa. Erit abscissa in M $U_2M = MO$. abscissa in R erit $U_2R = RT$. et $U_2K = KU_1$.
Notandum autem quod x in hyperbola continue crescit, sed non a minimo verum ab a. contra in circulo a minimo crescens desinit in a. Ergo sic potius ut pro x dicamus $a + x$. et eius $\square$ erit $a^2 + x^2 + 2xa$. Ergo $y^2 = a^2 + x^2 + 2xa - a^2$. sive $y^2 = x^2 + 2xa$. cum contra in circulo sit $y^2 = xa - x^2$. Hinc si applicata circuli in applicatam hyperbolae ducatur, fiet $\sqrt{2x^2a^2 - x^4}$.

---

23 *Nebenbetrachtungen:*

$$\frac{2xa + x^2}{xa - x^2} \qquad \frac{2 \frown 6, +4}{6 - 4} \qquad \frac{16}{2} \qquad \frac{2a + x}{a - x} \qquad \frac{\sqrt{2xa + x^2}}{\sqrt{2xa - x^2}} \qquad \begin{array}{r} 2xa + x^2 \\ xa - x^2 \\ \hline 2x^2a^2 - x^4 \end{array}$$

2 diametri *L ändert Hrsg.* 12 Videndum … contra. *erg. L*

---

18 Erit: dies gilt für die von Leibniz vornehmlich betrachtete gleichseitige Hyperbel, wobei L und U_2 koinzidieren. 21 f. contra in circulo: anstelle von $xa - x^2$ müsste es $2ax - x^2$ heißen. — Der Fehler wirkt sich auf die nächste Formel aus.

NB. haec aequatio: $a^2 - y^2 = kx$. est parabolae.

Si MS sit curva hyperbolae, cuius applicata RS. abscissa MR. latus transversum EM, erunt $EM^2 + EM \frown MR = RS^2$. ergo $y^2 = \dfrac{a^2}{\beta^2} + \dfrac{ax}{\beta}$. Idem $y^2 = x^2 - a^2$. Ergo $x^2 - a^2 = \dfrac{a^2}{\beta^2} + \dfrac{ax}{\beta}$. Est autem β ratio EM ad ML figurae superioris.

Investigemus et MF. vel SI. perpendiculares ad ipsam LU. quam sane LU utcunque productam nunquam hyperbolam attingere necesse est.

Manifestum autem est $\dfrac{FM}{LM} = \dfrac{OM}{LO}$. Ergo $FM = \dfrac{LM \frown MO}{LO}$.

Sed rectius investigabimus SI. ubi ac primum SG. ST. GI.

Nimirum $SG = \dfrac{ST \frown LR.}{RT}$ et $ST = RT - RS$. et $GT = \dfrac{ST \frown RT}{LT}$.

Iam $SI = \dfrac{GS \frown ST}{GT}$. $IT = \dfrac{ST \frown ST}{GT}$.

Hinc facile habetur FI. si ab LT auferatur $LF + IT$.

Iam ut SI ad ultimam aequationem reducamus: cum sit $= \dfrac{GS \frown ST}{GT}$ ponatur pro GS et GT eorum definitio, fiet:

$$\frac{\dfrac{ST \frown LR}{RT}, \frown \cancel{ST}}{\dfrac{\langle \cancel{ST} \rangle \frown RT}{\langle LT \rangle}} = SI = \frac{ST \frown LR \frown LT}{RT^2}.$$

et pro $ST = RT - RS$ vel $RT - \sqrt{MR^2 + 2MR \frown MO}$. fiet

$$\frac{LR \frown LT}{RT} - \frac{\sqrt{MR^2 \frown LR^2 \frown LT^2 + 2MO \frown MR \frown LR^2 \frown LT^2}}{RT^2}.$$

Simplicior erunt omnia, si $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ LKU_1 supponatur isosceles.

Erit $GS = ST$. et $MO = LM$. et quia $ST = RT - RS$. seu

$$RT - \sqrt{MR^2 + 2\overset{ML}{MO} \frown MR}. \quad \text{erit etiam} = GS.$$

et SI erit = radix dimidii $\square^{\text{ti}}$ ST seu

$$SI = \sqrt{\frac{RT - \sqrt{\llcorner MR^2 + 2ML \frown MR \lrcorner\lrcorner \square}}{2}} = IT.$$

9 GT: anstelle von $\dfrac{ST \frown RT}{LT}$ müsste es umgekehrt $\dfrac{ST \frown LT}{RT}$ heißen. — Das Versehen beeinträchtigt die gesamte folgende Rechnung.

Cumque sit $LF = MF = \sqrt{\dfrac{MO^2}{2}}$. ideo

$$FI \text{ erit } LT - \sqrt{\frac{MO^2}{2}} - \sqrt{\frac{RT - \sqrt{\llcorner MR^2 + 2ML \frown MR \lrcorner\lrcorner \square}}{2}}.$$

Est autem $MR = LR - MO$. et $LR = \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}}$. Ergo $MR = \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}} - MO$. Et $RT = LR$. ergo $RT = \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}}$. $ML \frown MO = MO^2$. $MR^2 = \dfrac{LT^2}{2} + MO^2 - 2MO \frown \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}}$. Ergo $FI =$

$$LT - \sqrt{\frac{MO^2}{2}} - \frac{\sqrt{\dfrac{LT^2}{2}} - \sqrt{\llcorner \dfrac{LT^2}{2} + MO^2 - 2MO \frown \llcorner \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}} \lrcorner\lrcorner + 2MO \frown LR - 2MO^2}}{\sqrt{_q}\; 2}.$$

vel $\sqrt{_q}\; 2 \frown FI = \sqrt{_q}\; 2 \frown LT - MO - \dfrac{LT}{\sqrt{2}} +$

$$\llcorner \frac{LT^2}{2} + \cancel{MO^2} - \cancel{2}MO \frown \frac{LT}{\sqrt{2}} \cancel{+2MO \frown LR} - \cancel{2}MO^2 \lrcorner.$$
$$\cancel{+2MO \frown} \frac{LT}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2} \frown FI}{LT} = \sqrt{2}, \frown \cancel{LT} - \frac{MO}{LT} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\llcorner \frac{1}{2} + \frac{MO}{\sqrt{2} \frown LT} \lrcorner}.$$

$$\frac{\sqrt{2} \frown FI}{LT} - \sqrt{2} + \frac{MO}{LT} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad = \sqrt{\llcorner \frac{1}{2} + \frac{MO}{\sqrt{2} \frown LT} \lrcorner}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \quad \square = \frac{1}{2} + \frac{MO}{\sqrt{2} \frown LT}.$$

3 *(1)* Iam Cartesiano more *(a)* LF vocemus a + x + y. *(b)* FT vocemus x. et SI vocemus y. LF vocemus a. erit LF = a + x + y. Ergo posita *(aa)* x ut nota *(bb)* iam x. quaeramus y. Cum detur x *(aaa)* . detur et *(bbb)* = FI. deturque LF. dabitur et LI = a + x. dabitur et MF = a. ergo et LM = $\sqrt{2a^2}$. *(2)* Est *L*

---

9 Anstelle von $\sqrt{\llcorner \dfrac{1}{2} + \dfrac{MO}{\sqrt{2} \frown LT} \lrcorner}$ müsste es $\sqrt{\llcorner \dfrac{1}{2} - \dfrac{MO}{LT^2} \lrcorner}$ heißen. — Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent weiter.

[*Teil 3*]

In Wallisii *De motu* observo quadraturas paraboloeidum et hyperboloeidum, sed simplicium tantum. Nam compositas, ubi v. g. quadrata abscissarum ducta in latus rectum aequantur cubis applicatarum, non attingit.

Miror Wallisium in *De motu*, non attingere quae figurae quibus motuum compositionibus efficiantur.

Explicat experimentum magni ponderis inflatione vesicae per spiritum humanum nonnihil elevari.

Disserit de descriptione hyperbolae Wrenniana, sive de cylindro hyperbolico, in quo infinitae duci possunt lineae rectae, idque demonstrat ex eo theoremate, quod sumtis quadratis arithmetice proportionalium, ut: $a^2 \quad 4a^2 \quad 9a^2$ etc. additoque uno quodam quadrato constanti, radices sint applicatae hyperbolicae: $\sqrt{a^2+b^2} \quad \sqrt{4a^2+b^2} \quad \sqrt{9a^2+b^2}$.

Disserit et multis de sua cycloeide. Ostendit Pascalium, Robervallium aliosque minime scivisse etiam segmenta omnia cycloeidalia certo modo abscissa, esse tripla segmentorum semicirculi. Etiam a se demonstratum, quod curvae cycloeidum contractarum et protractarum sint ellipses.

Item quod a quadratura hyperbolae dependeat recta aequalis curvae parabolae. Item superficiei curvae conoeidis parabolici tam parabolae circa axem quam circa tangentem volutae circulum a se exhibitum aequalem.

(Hinc NB. datur recta quaedam, in quam cadit centrum gravitatis curvae parabolae, adeoque cuidam superficiei annuli cuiusdam parabolici exhiberi potest hyperbola aequalis.)

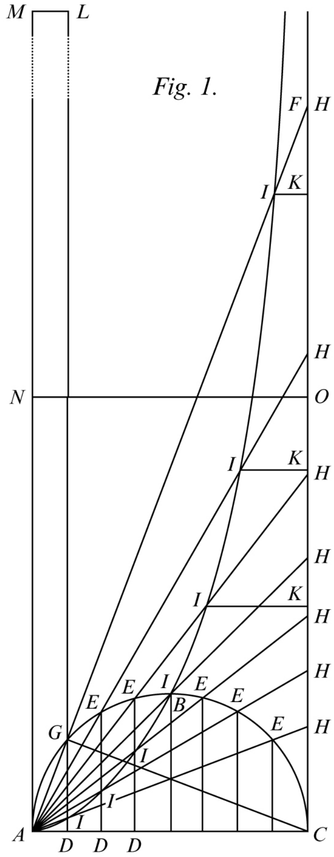
Idem Wallisius exponit a se observatum non tantum spiralem simplicem Archimedeam esse parabolam convolutam, ut vocat, sed et alias esse paraboloeides involutas. Et

---

2 observo: Diese Aussage trifft objektiv nicht zu; s. J. Wallis, *Mechanica*, 1670–71, S. 148–189 (*WO* I S. 667–693). — Die höheren Parabeln und Hyperbeln hat Wallis schon früher allgemein behandelt; vgl. insbesondere *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. LIX, LXIV, CII, S. 47 f., 52 f., 76 f. (*WO* I S. 392, 395, 408). Erst später hat Leibniz Wallis' Ergebnisse zur Kenntnis genommen; s. dazu *De quadratura arithmetica circuli*, hrsg. E. Knobloch, 1993, S. 140. 7 Explicat: *a. a. O.* S. 759–767 (*WO* I S. 1056 bis 1060). 9 Disserit: *a. a. O.* S. 556–567 (*WO* I S. 929–938). 13–16 *A. a. O.* S. 367–465 (*WO* I S. 800–862). — Auf S. 459 (859) wird mit der Bemerkung: „Ille ne uspiam advertit.“ auf Pascal angespielt. Der Name Roberval fällt nicht, wohl aber spricht Wallis allgemein: „Neque illud prius adverterunt, credo, ex Gallis ulli.“ — Die Stelle bezüglich der verkürzten bzw. verlängerten Zykloiden steht auf der Seite davor. 17–19 *A. a. O.* S. 555 und S. 748–750 (*WO* I S. 923–925). 22–575,5 *A. a. O.* S. 488–531 (*WO* I S. 878–904). — Der Hinweis auf Stefano degli Angeli steht auf S. 530 f. (903 f.) und bezieht sich auf dessen Schrift: *De infinitorum spiralium spatiorum mensura, opusculum geometricum*, 1660.

in genere non areas tantum sed et curvas respondentes esse aequales. Idque a se dudum ostensum. Et cum lapsus quidam contigisset in calculo Stephanum de Angelis eo arrepto refutasse doctrinam suam, calculo considerato, demonstratione dissimulata, et quae a se una pagina dicta erant, iusto volumine explicuisse. Idem Wallisius observat posse omnes alias figuras intelligi hoc modo convolvi in quasdam spiralium species.

Agit idem Wallisius de cissoeide, cuius integrum spatium infinitum aequari ostenderit triplo semicirculi. Ab eo tempore se ab Hugenio monitum posse hoc modo etiam partes quaslibet cissoeidis mensurari.



[*Fig. 4*]

6 Agit: *a. a. O.* S. 531–533 und 754–759 (*WO* I S. 904–910).

Semicirculus ABC. dividatur diameter in partes aequales et ex punctis divisionis D ducantur applicatae, per puncta applicatarum extrema $E.E.B.E.$ etc. ducantur chordae AE. producanturque dum occurrant in punctis H tangenti semicirculi CF. in infinitum si opus sit, id est si totam cissoeidem habere velis productae. Sin partem tantum, v. g. chordarum in $GEEBEC$ cadentium produces usque in F. Denique rectis AE sumantur rectae HI respondentes, aequales, ita ut FI sit $= AG$. et ita in caeteris.

Curva per omnia puncta I transiens erit cissoeis, et spatium $AIIFC =$ ni fallor segmento $GBC +$ rectang. AGC triplicatis.

Nota, IK applicata cissoeidis semper aequalis AD. quia $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ IFK simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AGD, et $AG = IF$. ergo et $IK = AD$. et $FK = GD$.

Sed distantiae inter ipsas K. seu portiones KK. erunt infinite parvae, modo portiones DD. sint infinite parvae. Harum ergo portionum progressio investigandum est.

Sed quia IK sunt arithmeticae progressionis, ideo investigandae sunt omnes CK. sunt enim ordinatim applicatae.

Dantur autem omnes CH. si omnes DE multiplicentur per CA. productum dividatur per AD. quia $\dfrac{CH}{DE} = \dfrac{CA}{AD}$. Ergo $CH = \dfrac{CA \frown DE}{\langle AD \rangle}$.

Ab hac summa auferatur summa omnium $FK.HK.HK$. etc. id est portio circularis. Residuum erit area cissoeidis.

Atqui summa omnium CH quadrabilis est. Est enim summa tangentium semiarcus complementi duplicatorum, seu summa tangentium falsorum ad basin, cuius quadraturam dudum invenimus.

---

16 *Unter* $CH = \dfrac{CA \frown DE}{\langle AD \rangle}$. : $\quad y = \dfrac{2ax}{\langle - \rangle}$.

19–21 Male, non tangentium semicomplementi, sed semiarcus.

19 semiarcus *erg. L* 20 ad basin *erg. L*

---

7 ni fallor: Leibniz ist sich selbst nicht sicher, und in der Tat gilt: Zissoidenfläche = 3 · Segment GBC + Dreieck AGC. 21 dudum: vgl. insbesondere N. 27, prop. 33, S. 474 Z. 14–17. — Das Stück nennt Leibniz später selbst, s. S. 577 Z. 20.

Porro summa omnium CH (quarum maxima CF) intelligatur esse rectangulum $ADML$. vel si de toto spatio cissoeidali asymptoto sermo sit, ea intelligatur esse rectangulum $ACON$. Ab hoc rectangulo $ACON$. summa scilicet omnium CH. quadrabili auferatur summa omnium FK. HK. HK. etc. id est semicirculus. Residuum quadrilineum concavum $ANOCBA$ area cissoeidis a nobis inventa aequatur areae cissoeidis ab aliis inventae, nempe triplo semicirculo. Unde sequeretur reddito semicirculo, rectangulum $ACON$ aequari quadruplo semicirculo, seu circulo duplicato. Quod prope est ut dicam absurdum.

An forte dicendum summam omnium CH non haberi, non enim esse tangentes semiarcus complementi duplicatos ad altitudinem, sed potius tangentes semiarcuum duplicatos ad altitudinem. At horum quadratura non habetur, nisi ex supposita circuli quadratura. Quod adeo verum est, ut nec momentum eorum habeatur nisi ex supposita circuli quadratura. Ideo momentum quoque cissoeidis ex asymptota opposita parallela, seu vertice.

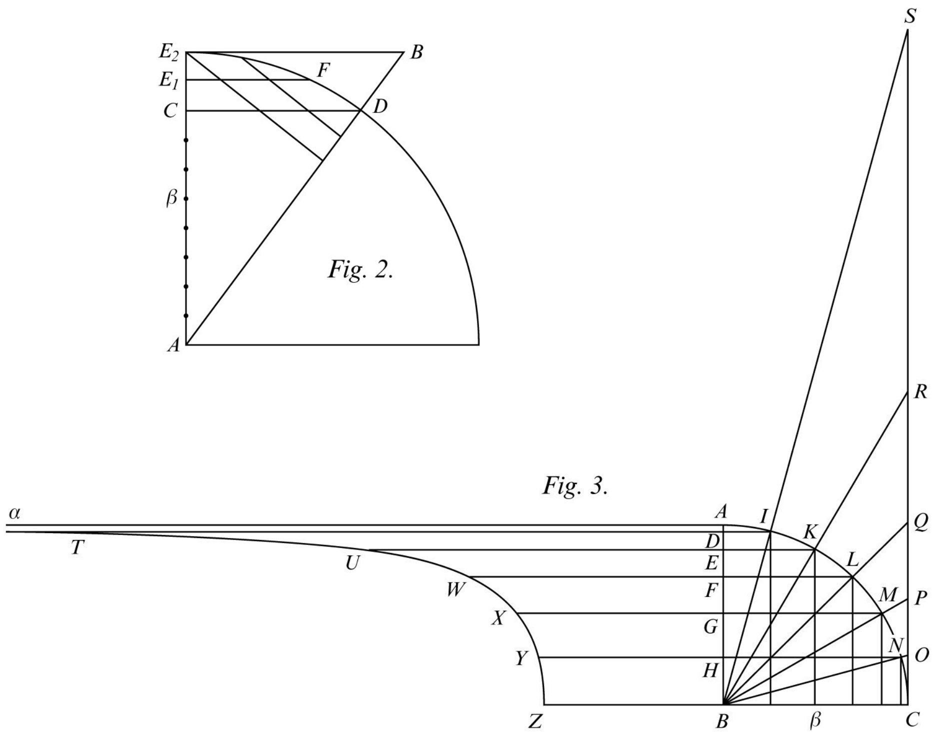
Videamus iam qualem quadraturam conchoeidi falsae, vel potius cissoeidi, ut nunc loquendum est, nam ut conchoeis est figura tangentium ademta scilicet portione circuli generatoris, ita eadem ademta cissoeis est figura tangentium falsorum NB. diminutorum sinubus. Unde illud quoque apparet semicissoeidem hoc modo sumtam seu semisinu auctam ad basin, esse differentiam hyperbolae et conchoeidis.

Iam *Inassignabilia* mea docent ipsum $ACON$ aequari quadruplo semicirculo ABC. et rectangulum AML aequari quadruplo segmento AG. Ergo spatium cissoeidis totum aequatur triplo semicirculo, et spatium cissoeidis generatae ab arcu AG aequatur quadruplo segmento AG. demto AGD. portione circulari, restabitque triplum segmentum AG demto triangulo AED.

10 ad altitudinem *erg. L* 13 f. Ideo ... vertice. *erg. L* 17 f. NB. ... sinubus *erg. L* 18 f. seu ... auctam *erg. L*

20 docent: s. N. 27, prop. 13, coroll. 2, S. 469 Z. 8 f. — Die Übertragung auf die Zissoide trifft nur für die Gesamtfläche zu.

[*Teil 4*]



[*Fig. 5*] [*Fig. 6, tlw. Blindzeichnung*]

Ostendi alibi secantes ad basin aequari sectori duplicato seu radio ad arcum.

At vero applicari ad basin est duci in differentias ordinatarum, id est secans AB ducenda in $CD - E_1F$.

Iam $AB \frown CD = AE_2 \frown E_2B$. quare si et AE_2 in E_1F commode haberi posset, habetur quadratura. Nam posita quadratura conchoeidis, si dua ista solida fierent similia, differentia eorum, id est basis maioris circulo aequaretur.

2 [*Fig. 5, 6*]: Die beiden Figuren sind von Leibniz ineinander gezeichnet worden. Diese Anordnung wird vom Hrsg. nachvollzogen. In Fig. 5 kommt die Benennung E nur einmal (in Doppelfunktion) vor; sie wird vom Hrsg. eindeutigkeitshalber in E_1 und E_2 aufgespalten. 3 Ostendi: s. N. 27, prop. 1, S. 465 Z. 20–22.

Excogitandi sunt aliqui casus in quibus ductus in istas differentias haberi possunt. Utilis enim ista observatio est.

Momentum secantium complementi seu secantium ad basin ex sinu haberi potest, et quadrabile est.

Restant quadrata secantium complementi in sinus ductorum, quae sunt $\dfrac{a^6 - 16a^4\beta^2}{9\beta^2}$.

Iam $\dfrac{a^6}{9\beta^2}$ haberi possunt $= \dfrac{a^3}{9\beta^2} \frown a^3$. Est autem $\dfrac{a^3}{9\beta^2}$ species hyperboloeidis quadrabilis.

Denique $\dfrac{16a^4\beta^2}{9\beta^2} = \dfrac{16a^4}{9}$.

Omnia $\sqrt{a^2 - 16\beta^2}$ et similia ducta in 3β, non sunt quadrabilia, sed ducta in 4β. Horum quadrata haberi possunt, restant momenta at puto momenta secantium complementi haberi posse.

$$\frac{a^2}{3\beta} \frown \sqrt{a^2 - 16a^2} = \sqrt{\frac{a^6 - 16a^4\beta^2}{9\beta^2}} = \frac{\sqrt{a^6 - 16a^4\beta^2}}{3\beta}.$$

Ducatur quadratum radii in basis portionem, [*Text bricht ab*]

Figura secantium complementi est $\dfrac{a^2}{y}$. Est autem y = sinus circuli $= \sqrt{2ax - x^2}$. posito x abscissa. Ergo si iam in figura secantium complementi applicata nominetur y,

5 in sinus ductorum *erg. L* 8–12 Omnia ... radii in *(1)* sinum, *(2)* applicatam, dividat *(3)* basis portionem, *erg. L*

3 Momentum: s. N. 26, prop. 29, S. 448 Z. 20 – S. 449 Z. 3.

fiet $y = \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$. et $y^2 = \dfrac{a^4}{2ax - x^2}$.
Ergo $2y^2ax - y^2x^2 - a^4 = 0$. sive $2y^2ax - y^2x^2 = a^4$. Ergo $2y^2ax = a^4$ [+] y^2x^2. Habetur ergo summa cuborum ipsarum applicatarum huius curvae, quia omnium y^2x summa per summam cuborum indagari potest.

Fig. 3.

Esto quadrans ABC in cuius arcu designentur puncta quotlibet $I.K.L.M.N.$ per quae ex centro $B.$ ducantur rectae, productae donec tangenti quadrantis in $C.$ in infinitum productae prout opus est, occurrant in punctis $S.R.Q.P.O.$ fientque secantes $BS.BR.BQ.BP.BO.$ Ex punctis arcus, $I.K.L.M.N.$ demittantur perpendiculares in radium $AB.$ tangenti infinitae CS parallelum, quae radio occurrant in punctis $D.E.F.G.H.$ et punctis istis, applicentur secantes, ita ut situm accipiant parallelum inter se, et ad radium AB perpendicularem. Transferetur BS in $DT.$ et BR in $EU.$ et BQ in $FW.$ et BP in $GX.$ et BO in $HY.$ et BC in $BZ.$

Iam quod punctis arcus $I.K.L.M.N.C.$ fecimus, idem fieri intelligatur punctis quibuslibet assignabilibus, ac linea curva per puncta $T.U.W.X.Y.Z.$ aliaque intermedia

1 *Zusatz:*
$ax - x^2 \quad x \frown \llcorner a - x \lrcorner \quad 2ax - x^2, \frown y^2 = a^4. \quad 2ax - x^2 - a^2, \frown y^2 = a^4 - a^2y^2.$
$\mp x \mp a = \dfrac{\sqrt{a^4 - a^2y^2}}{y}$. vel $\mp x \mp a = \dfrac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. vel $\mp x \mp a = a\sqrt{\dfrac{a^2}{y^2} - 1}$.
vel si $a = 1$. fiet: $\mp x \mp 1 = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$. Ecce figurae angulorum naturam, unde et fit si ⟨mavi⟩s: $\mp x \mp a = \sqrt{\dfrac{a^4}{y^2} - a^2}$ et $\mp x = \sqrt{\dfrac{a^4}{y^2} - a^2} \mp a$.

2 $-$ *L ändert Hrsg.*

1 $y = \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$: Die Auflösung nach x erfolgt in der Zusatzrechnung, dort müssten aber die Vorzeichen unter der Wurzel jeweils vertauscht werden.

numero infinita transire intelligatur. Manifestum est maximam omnium secantium, tunc scilicet cum punctum arcus est ipsum initium eius A, esse infinitam. Cum enim sit parallela ipsi CS. non nisi infinito abhinc intervallo eam attinget. Quare recta $A\alpha$ est asymptota ad quam curva ZXT semper propius accedit, sed eam tamen nunquam attingit.

Figuram autem ipsam $BZXT\alpha A$ voco hyperbolam falsam. Nam si demissae fuissent perpendiculares ex punctis arcus non in radium AB tangenti parallelum, sed in radium BC tangenti perpendicularem, ut $K\beta$ loco KE. et secans BKR non ipsi E in EU. sed ipsi β fuisset perpendiculariter ad BC applicata, idemque in caeteris punctis omnibus contigisset, figura hoc modo per puncta descripta, futura fuisset hyperbole, nunc autem est h y p e r b o l e f a l s a , quanquam non sit ex iis quas vulgo h y p e r b o l o e i d e s vocant.

Sed eandem hyperbolam falsam alio praeterea nomine appello f i g u r a m a n g u l o r u m quemadmodum hyperbolen veram appellare posses f i g u r a m r a t i o n u m , aut etiam f i g u r a m l o g a r i t h m o r u m (quanquam alia quaedam sit curva logarithmica, ut vocant, sed quam hactenus nemo geometrice describere potuit, et qui descripsisset, dedisset nobis hyperboles quadraturam).

Nimirum ostendit P. Sarrasa ex Gregorii a S. Vincentio, praeclaro admodum invento, quodque vel solum impensos ab eo in circuli hyperbolesque quadraturam labores repensaret; ostendit inquam Sarrasa, si figura $BZXT\alpha A$ spatium hyperbolae asymptotum sit, et ductis basi ZB parallelis YH. XG. WF. quadrilinea $GXWF$. $HYXG$. $BZYH$. inter se comparata esse, ut si rectae abscissae ab altitudine, FG. GH. HB. sint geometrice proportionales, spatia cuilibet insistentia futura sint arithmetice proportionalia, ac proinde si rectae sint ut termini quicunque, spatia futura sunt ut logarithmi.

Ego vero de hyperbola falsa theorema ostendam non minus praeclarum, neque ulli veterum observationi cessurum. Nimirum si figura praesens non hyperbola vera sed falsa seu nostra intelligatur rectaeque YH. XG. aliaeque basi parallelae ducantur, tunc futurum est, ut si rectae sustinentes inde ab asymptota sumtae, AG. AH. AB. sint ut sinus versi, spatia $AGXT\alpha A$. $AHYT\alpha A$. $ABZT\alpha A$. vicissim sint in ratione arcuum

10 f. , quanquam ... vocant *erg.* *L* 16 f. quadraturam). *(1)* Cur autem hyperbolen nostram falsam figuram *(2)* Nimirum *L* 17 ostendit *(1)* Gregorius *(2)* P. Sarrasa *L*

17 P. Sarrasa: A. A. de Sarasa, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*, Antwerpen 1649, pars I prop. II u. III, S. 7 f.

seu angulorum $AM.AN.AC.$ Unde si arcus $AI.IK.KL.$ sint aequales spatia quoque $ADT\alpha A.$ $AEUT\alpha A.$ $AFWT\alpha A.$ aequalia erunt. Ac generaliter recta quaecunque parallela basi, ut $XM.$ spatium pariter figurae angulorum et arcum secabit in partes proportionales.

Porro figura angulorum quam dixi, geometrica est, describique potest. Nam aequatio eius essentialis est: $2y^2ax - y^2x^2 - a^4 = 0$. Et deprehendo per analysin, si ponatur z aequalis sinui recto $GM.$ et a aequalis radio $AB.$ tunc applicatam figurae angulorum respondentem GX fore $\dfrac{a^2}{z}$. Ac proinde summa secantium complementi opus esse ad angulos ex sinubus datis, vel contra supputandos. Quod ingens compendium dabit calculo canonis mathematici utcunque libuerit continuando, infinitisque aliis problematis appropinquatione facillima efficiendis.

Sed maius tamen est aliud a me inventum, quo omnia quae ad dimensionem circuli et partium eius, ad sectionem angulorum universalem, ad inventionem quotcunque mediarum proportionalium pertinent, nulla radicum mentione, sola numerorum rationalium serie adhibita facile effici possint. Quo nescio an ad geometriam mechanicam inveniri possit praestantius epicherema. Nam qui hactenus approximationes nobis per calculum dedere in infinitum continuabiles, aut fassi sunt constructionem fore difficilem linearum per calculum inventarum, aut successum in toto circulo aliquando casu quodam felicem ad partes non produxere. Cum ille casus, quo constructionem facilem reperere, non methodi ipsorum, sed fortunae fuerit, quoniam cum ubi longius prodiere, vel citerius substitere, omnia ad primam illam calculi difficultatem redierint.

Porro facile reducitur illa hyperbole falsa seu figura angulorum ad circulum, nam sector differt a portione circulari ductu sinus in sinum complementi, seu momento sinus ex basi. Ergo differentia inter summam sectorum, et summam portionum circularium est quadrabilis. Intelligi autem potest summa portionum circularium, vel incipiendo a

11 appropinquatione facillima *erg. L* 14 nulla *(1)* radicum extractione *(2)* radicum mentione *L* 15 facile *erg. L* 22 f. circulum, *(1)* nam summa omnium SI. RK. QL. aequatur duplici segmento AM. *(a)* ergo duplex *(b)* et sector | duplex *erg.* | diffe *(2)* nam sector differt *(a)* a duplici segmento rectangulo radii in sinum. Videor ergo errasse in calculo *(b)* a portione *L*

23 sector differt: In der Aussage ist der Faktor 1/2 zu ergänzen. Leibniz rechnet mit dem doppelten Wert konsequent weiter.

minimo, quod tantum semel, vel a maximo quod tantum semel. Alterum horum quadrari potest, et coincidit cum momento ex basi, alterum cum momento ex vertice. Ergo cum summa portionum, maximam non nisi semel repetendo sit momentum sinuum ex basi, et summa sectorum eodem modo sumta, differat a summa portionum momento, sequitur summam sectorum hoc modo sumtam aequari duplo momento sinuum. At summa sectorum est summa arcuum in radium ducta. Summa ergo arcuum est quadrabilis, ut iam ab aliis inventum.

Sed cum summa sectorum non usque ad maximum quaeritur, sed v. g. inter A et N posito, AH divisum in partes infinitas aequales, dabitur adhuc iterum momentum, et rursus arcuum (sinuumve) summa. Puto tamen hanc summam arcuum cum cycloeidali illa non coincidere, ubi ni fallor ab opposito incipitur. Unde et summa sectorum opposita adhibenda est.

Considerari meretur linea illa curva in summa sectorum constituenda, quae de plano in planum instar cochleae transit sive ascendit. Sed haec obiter.

Pergo illud tantum monere, si figurae angulorum quadratrix reperiatur, et quadratrix circuli quoque, sane figurae angulorum quadratricem fore altioris gradus (probabiliter), quam figuram circuli quadratricem, et tamen unam ex altera facile fieri posse, ista adiectione sinus in sinum complementi ducti.

Momentum figurae angulorum aequatur summae sectorum.

---

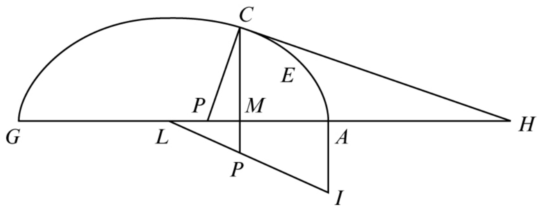
7 ab aliis: B. Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, prop. 1 S. 10 (*PO* IX S. 78).

35. DE TANGENTIUM METHODO
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept (zwei Zusätze aus je späterer Zeit): LH 35 II 1 Bl. 265–266. 1 Bog. 2°. 3 S. Bl. 266 v° leer. Haupttteil 2 S. und 4 Z. auf Bl. 265 sowie Bl. 266 r° oben, Zusätze auf Bl. 266 r°.
Cc 2, Nr. 613

Datierungsgründe: Die Verwendung des Begriffs functio sowie das Wasserzeichen des Papiers sprechen für eine Abfassungszeit kurz vor N. 40 vom August 1673.

Cognatae sunt figurae, quae locum quendam functionum habent communem, uti circulus ellipsis hyperbola, in quibus locus reductarum est triangulum. Sed diverso modo adhiberi potest locus functionis, vel ut crescat cum applicatis, quod facit triangulum in hyperbola, vel ut crescentibus applicatis decrescat, quod fit in ellipsi et circulo. Unde intelligi potest, ellipsim et circulum non tantum cognatas, sed et e i u s d e m n a t u r a e (sic enim malim, quam speciei) esse. Porro inter eiusdem naturae figuras variae sunt species, ut in ellipsi, prout scilicet ratio recti ad transversum sumitur.



[*Fig. 1*]

15+585,1 sumitur. | Errorem calculi | sive eius qui manu typisve descripsit *erg.* | in Geometria Cartesii lib. 2. pag. 46. editionis Schotenianae 1659. mihi videor observasse. Nimirum, in eo est, ut inquirat rectam quae ellipsin in dato puncto ad angulos rectos secet. Ac [*s. Fig. 1*] ubi quadratum huius secantis PC posuit esse s^2, et abscissam AM assumsit y. latus rectum r. | latus transversum GA = q. *erg.* | rectam PA = v. ostendit pag. 41. ex natura ellipsis hanc aequationem: $y^2 \dfrac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$. Unde pag. 46. invenit $0 - 2ey$, vel (quia $e = y$) $0 - 2y^2 = qry - 2$. *gestr.* | Ad *L*

16 [*Fig. 1*]: Die Figur kommt in der Hs. insgesamt dreimal vor; einmal mit vielen Korrekturen in Zusammenhang mit der Streichung von Z. 15 – S. 585 Z. 1 sowie zweimal je auf Bl. 265 r° und 265 v°. — Der Buchstabe *P* kommt (wegen der Gleichheit der Strecken *MP*) doppelt vor.

Ad tangentes vel perpendiculares curvarum inveniendas, mihi commodissima Huddenii ratio videtur, nimirum ille invento quadrato perpendicularis PC, atque altero indeterminatarum y. AM abscissae, vel x. CM applicatae, ex aequatione, ut a Cartesio praescriptum est, ope aequationis cuiusdam naturam curvae exprimentis eliminato; ita ut altera indeterminatarum, v. g. abscissa y. tantum restet; hoc inquam facto Huddenius aequationis inde productae terminos multiplicat per exponentem ipsius y in unoquoque termino repertae. Atque ideo termini in quibus nulla est y abiciuntur. Inde orta aequatio perpendicularem dabit.

Hoc ille in conchoeide expertus, apud Schotenium, notis ad secundum *Geometriae* Cartesii librum pag. 255.

Placet in ellipsi experiar, ut appareat an calculus consentiat Cartesiano. Ostendit Cartesius pag. 41, posita perpendiculari $PC = s$. et abscissa $AM = y$. et latere recto $= r$. latereque transverso $GA = q$. recta denique $PA = v$. ostendit inquam ex natura ellipsis:

$$y^2 \quad \frac{+qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0.$$

Indeque pag. 46, invenit:

$0 - 2ey$, vel (quia $e = y$) $\quad 0 - 2y^2 = \dfrac{qry - 2qvy}{q - r}$.

Unde $0 = \dfrac{qry - 2qvy}{q - r} + 2y^2$. sive $0 = qry - 2qvy + 2y^2q - 2y^2r$. vel $qr + 2yq = 2vq + 2yr$. Igitur $2vq = qr + 2yq - 2yr$. sive denique:

$$v = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q}.$$

Idem Huddenii methodo sic reperitur:

Aequatio est:

$$y^2 \qquad \frac{qry - 2qvy + qs^2}{q - r} \quad = \quad 0.$$

10 f. pag. 255. *(1)* Ergo in ellipsi statim facilique *(2)* Placet *L* 13 ex natura ellipsis *erg. L* 17 f. +2yr. *(1)* Igitur $\mathrm{qr} - 2\mathrm{yq} + 2\mathrm{yr} = 2\mathrm{qv}$. Ac denique $\mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{r}}{2} - \mathrm{y} + \dfrac{\mathrm{yr}}{\mathrm{q}}$. *(2)* Igitur *(a)* $\mathrm{qr} = 2\mathrm{yq} - 2\mathrm{yr} + 2\mathrm{qv}$. Ergo $\mathrm{qr} - 2$ *(b)* 2vq *L*

1 f. Huddenii ratio: Im Folgenden setzt sich Leibniz mit dem Hudde'schen und dem Descartes'schen Verfahren, Tangenten bzw. Normalen zu bestimmen, auseinander. Neben den von Leibniz selbst genannten Stellen aus der *Geometria*-Ausgabe ist insbesondere noch J. Hudde, *De reductione aequationum*, *DGS* I S. 436, zu nennen.

fiet per multiplicationem Huddenianam:

$$\begin{array}{ccccc} 2. & 1. & 1. & 0. & 0. \\ \hline 2y^2 & \dfrac{+qry-2qvy}{q-r} & + \;0 & & = \;0. \end{array}$$

Hinc ecce aequationem eandem cum aequatione a Cartesio inventa:

$$0 - 2y^2 \;=\; \frac{+qry-2qvy}{q-r}.$$

Caeterum videndum est quemadmodum datis abscissa AM applicata MC inveniri possint tangentes CH, sive perpendiculares PC, sive reductae PM, sive productae AH. Ita vicissim ope tangentis solius, vel perpendicularis solius, vel reductae solius, vel productae solius, ac praeterea abscissae, inveniri possit applicata. Et ut facilior haec sit inquisitio, retento exemplo praecedente, tentemus regressum.

Ponamus ergo ex cognitis PM. quas reductas voco, quaerendas applicatas CM. Cum autem sit PA vel $v = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q}$. erit

$PM = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q} \; -y$. seu $PM = \frac{r}{2} - \frac{yr}{q}$. sive $PM = \frac{qr-2yr}{2q}$.

Unde manifestum est locum omnium PM fore lineam rectam, et si rectae AM velut altitudini applicatae intelligantur, incidere omnes in figuram rectilineam.

5 est *(1)* an haec tangentium method *(2)* quemadmodum datis *(a)* applicatis *(b)* abscissa *L*
6 sive reductae PM, sive productae AH *erg. L* 7 f. ope *(1)* tangentium | solarum *erg.* |, vel perpendicularium | solarum *erg.* |, vel reductarum, vel productarum, inveniri queant *(a)* soli *(b)* una nimirum ex aliqua *(2)* tangentis solius, vel perpendicularis solius, vel reductae | solius *erg.* |, vel productae | solius *erg.* |, ac *L* 12 −y. *(1)* et quia per naturam ellipsis: $\mathrm{xx = ry - \frac{r}{q}yy}$. vel $\mathrm{xxq = ryq - ryy}$. vel $\mathrm{\frac{xxq}{r} = yq - ryy}$. conemur *(a)* iungere *(b)* inserere hanc aequationem priori: $\mathrm{0 = qry - 2qvy + 2y^2q - 2y^2r}$. vel sic potius: $\mathrm{\underbrace{qry - yyr}_{xxq} - 2qvy + 2y^2q - yyr = 0}$. Erit $\mathrm{xxq + 2y^2q = 2qvy - yyr}$. *(2)* seu *L* 14 in *(1)* triangulum AMP. *(2)* figuram rectilineam *L*

6 productae AH: Dies weicht vom üblichen Gebrauch ab; mit producta bezeichnet Leibniz gemeinhin die ganze Subtangente MH.

Cuius ut constitutio intelligatur, posita AM minima seu $y = 0$. erit $PM = \frac{r}{2}$. seu lateri recto dimidio, quae ad A applicata esto AI.

Similiter in L. ellipsis centro erit $y = \frac{q}{2}$. Ergo $PM = \frac{qr - 2yr}{2q}$. erit $\frac{qr}{2q} - \frac{2qr}{4q}$ sive $\frac{r}{2} - \frac{r}{2} = 0$.

Ergo figura omnium PM erit triangulum LAI. cuius basis dimidium latus rectum ellipsis, altitudo dimidium latus transversum.

Ponamus iam datum esse locum omnium PM. quemadmodum datus est locus omnium AM (qui ipso PM applicatus semper triangulum exhibet), quaeri autem locum omnium CM. seu ipsam figurae $MCEA$ naturam.

Ergo ut ante posita $CP = s$. $PA = v$. et $PM = v - y$. erit

$$PM^2 = v^2 + y^2 - 2vy \ \text{ vel } \ \frac{r^2}{4} + \frac{y^2r^2}{q^2} - \frac{\cancel{2}yr^2}{\cancel{2}q}.$$

quoniam scilicet altera ex his, nempe vel PM, vel PA seu v. vel y seu AM. elidi potest.

Huic PM^2 addatur $CM^2 = x^2$, fiet $s^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{y^2r^2}{q^2} - \frac{yr^2}{q} + x^2$.

Sed quoniam x quaeritur, ut methodus duplicum radicum aequalium commodius adhiberi queat, de integro ordiendum, quaerendamque ellipsis tangentem arbitror, non y, sed x assumto, atque y eliminato.

Nimirum $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$. Iam quia $xxq = ryq - ryy$. porro ex aequatione priore sequitur esse $y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$, haec ergo ipsius y definitio in locum eius in secunda aequatione substituatur:

2 f. AI. *(1)* et *(a)* triangulum *(b)* figura, omnes MP. comprehendens erit trapezium MPAI. portio trianguli LAI. cuius vertex L. in ellipsis centro, *(aa)* quoniam L. *(bb)* quoniam tunc y $= \frac{q}{2}$. ergo $\frac{qr - 2yr}{2q} = \frac{r}{2} - \frac{\frac{\cancel{2}\cancel{q}r}{\cancel{2}}}{2\cancel{q}} = \frac{r}{2}$. *(2)* Similiter *L* 15 queat, *(1)* ab initio statim, *(2)* de *L*

fiet: $xxq = rqv - rq\sqrt{s^2 - x^2}, -rv^2 - rs^2 + rx^2 + 2rv\sqrt{s^2 - x^2}$. vel

$$\begin{array}{llllllll} x^2q = & rqv & -\sqrt{s^2r^2q^2 - r^2q^2x^2} & -\ rv^2 & +\ \ rx^2 & [-rs^2] & + & \sqrt{4r^2v^2s^2 - 4r^2v^2x^2}. \\ 2x^2q = & 0 & +rqx & -\ \ 0 & +\ 2rx^2 & [-\,0] & & -2rvx. \end{array}$$

Unde fieret: $2x^2q = rqx + 2rx^2 - 2rvx$. vel $2x^2q + 2rvx = rqx + 2rx^2$. vel:

$$\cancel{2}\cancel{r}v\cancel{x} = \frac{rqx + 2rx^2 - 2x^2q}{2rx}. \text{ sive } = \frac{\cancel{r}q}{2} + \cancel{2}x - \frac{xq}{r} = v.$$

Unde sequitur: $\frac{q}{2} + x - \frac{xq}{r} = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q}$. seu $x - \frac{xq}{r} = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q} - \frac{q}{2}$. et $x = \dfrac{\frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q} - \frac{q}{2}}{1 - \frac{q}{r}}$. Quod cum sit absurdum, errorem in calculo esse necesse est. Credo in eo quod surdos per exponentes ipsius x multiplicavi.

Possumus autem eliminare surditates, si ponamus $\underset{\odot}{\sqrt{s^2r^2q^2 - r^2q^2x^2}}$ cum $\underset{☽}{\sqrt{4r^2v^2s^2 - 4r^2v^2x^2}}$ ab una aequationis parte, caetera ab altera, et utrumque quadremus, reliquum appellemus ☿ fiet $\odot + ☽ - 2\sqrt{\odot\, ☽} = ☿$. Unde duae surditates reductae ad unam quae denique eliminatur, nam $0 - 2\sqrt{\odot\, ☽} = ☿ - \odot - ☽$ ideoque $[4\odot\, ☽] = \underbrace{☿ - \odot - ☽}\ \Box$. Sed haec prolixiora, quam ut iis insistere opus sit, brevius cum ostensum sit $PM = \frac{r}{2} - \frac{yr}{q}$. substituendo x pro y. Quod ut fiat consideranda aequatio: $x^2 = ry - \frac{r}{q}yy$.

Ergo $0 - x^2 = \frac{r}{q}y^2 - ry$. Pone $\frac{r}{q} = \frac{1}{4}$. erit $r^2\cancel{+0} - x^2 = \frac{r}{q}y^2 - ry + r^2$.

Ergo $\sqrt{r^2 - x^2} = 2\frac{r}{q}y - r$. Ergo in eo casu: $\dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}, +r}{2\frac{r}{q}} = y$.

2 $-\mathrm{rs}^2$ *erg. Hrsg.* 3 -0 *erg. Hrsg.* 12 $2\sqrt{\odot\, ☽}$ *L ändert Hrsg.*

1 fiet: die folgende Rechnung ist fehlerhaft und führt schließlich auf die von Leibniz bemerkte Unstimmigkeit.

Imo idem fieri potest in omni ellipsi, nam si data sit aequatio: $0-x^2=\frac{r}{q}y^2-ry$, addendo utrobique $\frac{q}{2r}r^2=\frac{qr}{2}$; fiet

$$\sqrt{\frac{qr}{2}-x^2} = \overset{(\sqrt{\frac{r}{q}}\,y)}{\sqrt{\frac{ry^2}{q}}} - \sqrt{\frac{qr^{\cancel{2}}}{2\cancel{r}}}.$$ Nam haec in se ducta dant: $\frac{r}{q}y^2-ry+\frac{qr}{2}$. Ergo $\sqrt{\frac{qr}{2}-x^2}+\sqrt{\frac{qr}{2}}=\sqrt{\frac{ry^2}{q}}$. Ergo $\dfrac{\sqrt{\frac{qr}{2}-x^2}+\sqrt{\frac{qr}{2}}}{\sqrt{\frac{r}{q}}}=y$. sive

$$\sqrt{\frac{q^2}{2}-\frac{x^2q}{r}}+\underset{\overset{\bigwedge}{\frac{q}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{q^2}{2}}}=y.$$

Ponamus nos figuram seu locum applicatarum, quaerere ex dato loco reductarum, idque in ellipseos exemplo tentemus.

Primum posito $MA=y$. et $CM=x$. et $PC=s$. et $AP=v$. et $PM=v-y$. erit $PM^2=v^2+y^2-2vy$. et $CM^2=x^2$. Ergo $s^2=v^2+y^2-2vy+x^2$. Cum autem

---

8–590,3 *Daneben am Rande:*

$$y^2=ax.\quad \frac{y^2}{a}=x.\quad \text{sive}\quad \frac{y^4}{a^2}=x^2.\quad \text{Ergo}\quad \frac{\frac{y^4}{a^2}}{y}=\frac{y^3}{a^2}.$$

588,17–589,1 y. *(1)* Memorabile hoc videtur, esse quoddam ellipseos genus, praeter circulum, in qua tam *(a)* applicata ad abscissam *(b)* applicata, quam abscissa pura relatione explicari potest, scilicet, quando latus transversum recti quadruplum est. Idem in aliis figuris *(aa)* explicari *(bb)* tentari potest. *(2)* Imo *L*

---

1 f. addendo utrobique: anstelle von $\frac{qr}{2}$ müsste es $\frac{qr}{4}$ heißen. — Leibniz rechnet mit dem Versehen konsequent weiter.

quaeramus relationem x ad y. ponatur x esse ξy. fiet:

$$s^2 \quad = \quad v^2 \quad + \quad y^2 \quad - \quad 2vy \quad + \quad \xi^2 y^2.$$

In qua aequatione cum sint duae radices aequales fiet:

$$0 \quad = \quad 0 \quad + \quad 2y^2 \quad - \quad 2vy \quad + \quad 2\xi^2 y^2.$$

Ergo $2y^2 + 2\xi^2 y^2 = 2vy$. atque ideo $v = y + \xi^2 y = v$. Ergo PM seu $v - y = \xi^2 y$. Atqui idem $PM = \frac{r}{2} - \frac{yr}{q}$. Ergo $\xi^2 y = \frac{r}{2} - \frac{yr}{q}$. Ergo $\xi^2 y^2$ vel $x^2 = \frac{ry}{2} - \frac{y^2 r}{q}$.

Deberet esse: $ry - \frac{y^2 r}{q}$. error ergo, non calculi, sed methodi, quia scilicet in isto $\xi^2 y^2$ non potest sciri quot unitatum sit exponens ipsius y. quia in ipso ξ^2 latet quoddam y.

Ergo nos ad Cartesii methodum duarum radicum aequalium, potius quam Huddenianam, recurrere debere arbitror.

Nimirum $\quad s^2 - v^2 - y^2 + 2vy - \xi^2 y^2 = 0$. et $y^2 + e^2 - 2ye$, etiam 0.

ergo: $\quad s^2 - v^2 - y^2 + 2vy - \xi^2 y^2 = y^2 + e^2 - 2\cancel{ye}y^2$.

Ergo $\quad s^2 - v^2 - \cancel{y^2} + 2vy - \xi^2 y^2 = \cancel{y^2} + e^2 - \cancel{2y^2}$.

Ergo $\quad s^2 - v^2 + 2vy - \xi^2 y^2 = y^2$.

$$\xi^2 y^2 + y^2 + v^2 - 2vy$$

Ergo $\quad \xi^2 y^2 + \cancel{y^2} + \cancel{v^2} - \cancel{2vy} - \cancel{v^2} + \cancel{2vy} - \xi^2 y^2 = \cancel{y^2}$.

Verissima quidem, sed quibus nihil explicari patet. Tollatur ergo iam v ex aequatione, quoniam eius comparatio cum y cognita est.

Est autem $v = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q}$. Ergo erit $v^2 = \frac{r^2}{4} + ry - \frac{yr^2}{q} + y^2 - \frac{2y^2 r}{q} + \frac{y^2 r^2}{q^2}$. et $2vy = ry + 2y^2 - \frac{2y^2 r}{q}$. fiet:

$$s^2 - \frac{r^2}{4} - \cancel{ry} + \frac{yr^2}{q} - \cancel{y^2} + \frac{2y^2 r}{q} - \frac{y^2 r^2}{q^2} + \cancel{ry} + \cancel{2y^2} - \frac{2y^2 r}{q} - \xi^2 y^2 = \cancel{y^2}\ 0.$$

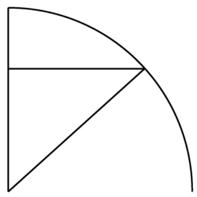
Sed nihil ex hac quoque aequatione duci potest, quoniam si s^2 explicandum sit, omnia tolluntur.

5 = v. *(1)* At iam aliunde constat esse *(2)* Ergo *L*

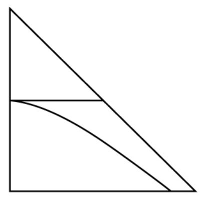
Videamus an reverti liceat ad methodum Huddenianam sed aliam.

Aequatio ista: $s^2 - v^2 - y^2 + 2vy - \overset{\xi^2 y^2}{\overset{\vee}{x^2}} = 0$. duas habet radices aequales, multiplicetur per progressionem arithmeticam, ubi prius recte fuerit ordinata. Sed malum in eo est, quod recte ordinari non potest, cum exponens verus ipsius y in termino $\xi^2 y^2$, non sit notus quia y ipsi ξ implicatum est.

[*Zusatz 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Differentia inter applicatam circuli et hyperbolae:

$$\sqrt{2ax + x^2} - \sqrt{2ax - x^2} \sqcap z.$$

fiet: $\boxed{2ax} + \underset{\odot}{2}x^2 \sqcap z^2 + 2z\sqrt{2ax - x^2}\,\boxed{+2ax}\;\boxed{-x^2}$.

Ergo $4z^2 \frown 2ax - x^2 \sqcap 4x^4 \boxed{-4z^2x^2} + z^4 \sqcap 8z^2ax \boxed{-4z^2x^2}$.

Aliter $\sqrt{a^2 + y^2} - \sqrt{a^2 - y^2} \sqcap v$, unde $\sqrt{a^2 + y^2} \sqcap v + \sqrt{a^2 - y^2}$, sive $\boxed{a^2} + y^2 \sqcap v^2 + 2v\sqrt{a^2 - y^2}\boxed{+a^2} - y^2$, sive $2y^2 - v^2 \sqcap 2v\sqrt{a^2 - y^2}$, et quadrando $4y^4 \boxed{-4y^2v^2} + v^4 \sqcap 4v^2a^2 \boxed{-4v^2y^2}$. Ergo $\cancel{2}y^2 \sqcap \dfrac{v}{2}\sqrt{[4a^2] - v^2}$. $\dfrac{4y^4}{v^2} \sqcap 4a^2 - v^2 \sqcap 2a - v \frown 2a + v$.

Patet ante omnia figurae differentiarum quadratorum summam; pendere a momento segmenti ex centro.

1+3 methodum *(1)* Hugenianam *(2)* Huddenianam | sed aliam *erg.* |. Aequatio *L* 4 ordinata. | Sed hic rursus subesse. *streicht Hrsg.* | Sed *L* 15 a^2 *L ändert Hrsg.* 16 differentiarum *(1)* dari momentu *(2)* quadratorum *L*

$$y \sqcap \sqrt{\frac{v}{2}\sqrt{[4a^2]-v^2}}.$$

Iam v ista investigabimus:

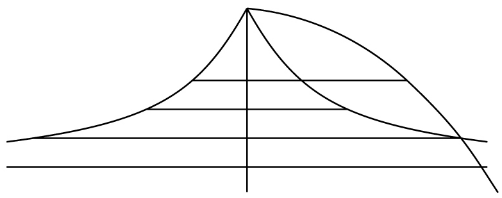
$$v^4 - 4v^2a^2 + a^4 \sqcap a^4 - 4y^4.$$

Unde $a^2 - v^2, \frown a^2 - v^2 \sqcap a^2 - 2y^2 \frown a^2 + 2y^2$, sive $a + v, \square, \frown a - v\square \sqcap a + y\sqrt{2} \frown a - y\sqrt{2}, \frown a^2 + 2y^2$;

$\mp v^2 \pm a^2 \sqcap \sqrt{a^4 - 4y^4}$, et $v \sqcap \sqrt{\mp\sqrt{a^4 - 4y^4} + a^2}$.

$4y^4 \sqcap 4v^2a^2 - v^4$, unde $16y^3l \sqcap 8v^2a^2 - [4v^4]$. Ergo $l \sqcap \dfrac{8v^2a^2 - [4v^4]}{16y^3}$.

$\dfrac{l \mp y}{z} \sqcap \dfrac{l}{v}$. Ergo $z \sqcap \dfrac{lv \mp yv}{l}$.



[*Fig. 4*]

Ope differentiarum inter duas figuras commensurabiles, novae habentur quadraturae, v. g. $\dfrac{2ay^2}{y^2 + a^2} \sqcap x$. Ergo $y^2x + a^2x \sqcap 2ay^2$. $y^2 \frown x - 2a, +a^2x \sqcap 0$, pone $x - 2a \sqcap z$, fiet $y^2z + a^2z + 2a^3 \sqcap 0$.

Differentia inter $y \sqcap \sqrt{\dfrac{a^2x}{2a - x}}$. et inter $\sqrt{2ax - x^2}$[:]

$$\sqrt{2ax - x^2} \sqcap \sqrt{\frac{a^2x}{2a - x}} + z.$$

1 a^2 *L ändert Hrsg.* 7 v^4 *L ändert Hrsg. zweimal* 12 f. $\sqcap$ 0. | In parabola: $y^2z - a^2z + 2a^3 \sqcap 0$. *streicht Hrsg.* | Differentia *L*

4 Unde: Auf der linken Seite der Gleichung vernachlässigt Leibniz den Term $-2v^2a^2$ und löst nun diese vereinfachte Gleichung auf. 9 [*Fig. 4*]: Die grob gezeichnete Merkfigur entspricht nicht den Gegebenheiten des Textes. — Für eine graphisch korrekte Darstellung vgl. *LSB* III, 1 S. 156.

Unde $2ax - x^2 \sqcap \dfrac{a^2x}{2a-x} + 2z\sqrt{\dfrac{a^2x}{2a-x}} + z^2$. sive $2ax - x^2 - \dfrac{a^2x}{2a-x} - z^2 \sqcap 2z\sqrt{\dfrac{a^2x}{2a-x}}$. Sed nihil inde.

[*Zusatz 2*]

$\sqrt{aa+yy} - \sqrt{aa-yy}$ *aequ.* z. Ergo $2aa + \sqrt{a^4-y^4}$ *aequ.* zz. Seu $\sqrt{a^4-y^4}$ *aequ.* $zz-aa$. Seu $\sqrt{aa+yy}.\ \sqrt{a+y}.\ \sqrt{a-y}$ *aequ.* $\overline{z+a}.\ \overline{z-a}$.

Momentum figurae ex axe coniugata datur ex data $\int \overline{\sqrt{a^4-y^4}\ \overline{dy}}$. Sit $\boxed{a^4} - y^4$ *aequ.* $z^4 \boxed{+a^4} - 2zzaa$. et fit: $2zzaa$ *aequ.* $z^4 + y^4$. seu yy *aequ.* $z\sqrt{2aa-zz}$. Et y *aequ.* $\sqrt[2]{z}\sqrt[4]{2aa-zz}$.

$\sqrt{bb+cyy} + \sqrt{dd+eyy}$ *aequ.* z. fiet: $bb+cyy$ *aequ.* $zz+dd+eyy-2z\sqrt{dd+eyy}$. Ergo $b^4 + 2bbcy^2 + ccy^4 + z^4 + 2zzdd + 2zzeyy + d^4 + 2ddeyy + eey^4 - 2bbzz - 2bbdd - 2bbey^2 - 2cy^2zz - 2cy^2dd - 2cey^4 - 4zzdd - 4zzeyy$ *aequ.* 0.

Tollamus $zzeyy$, faciendo $+2e - 2c - 4e$ *aequ.* 0. seu c *aequ.* $-e$. ita tollamus alia quam volumus.

5 f. $\overline{\mathrm{z-a}}$. *(1)* z + a aequ. $\sqrt{\dfrac{\mathrm{a^4-y^4}}{\mathrm{z-a}}}$. Ergo momentum ipsius | *(a)* ordi *(b)* abscissae *erg.* | z + a. ex z − a. *(2)* Momentum *L*

4–8 Leibniz beginnt mit dem Ansatz von S. 591 Z. 13. Aufgrund von Flüchtigkeiten und Vereinfachungen ist das Ergebnis mit der Ausgangsgleichung nicht kompatibel.

36. FINES GEOMETRIAE
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 256. 1 Bl. 2°. 1 1/4 S. auf Bl. 256 r° und v°. Auf dem übrigen Teil des Blattes *LBS* VII, 1 N. 115.
Cc 2, Nr. 552

Datierungsgründe: Leibniz spricht in diesem Stück von seiner methodus transmutandarum figurarum, eine Anspielung auf den im 1. Halbjahr 1673 gefundenen Transmutationssatz (vgl. *LSB* III, 1 S. 115 f.). Das Wasserzeichen des Papiers ist bis August 1673 bezeugt.

Fines geometriae, seu classes problematum (omne enim theorema propter problema est) describere figuras; metiri figurarum datarum quantitates, invenire figuras quantitatis desideratae.

Horum porro omnium rursus tres sunt gradus, est enim geometria vel Euclidea, vel Apolloniana (quam Vieta et Cartesius resuscitavere), vel Archimedea, cui Guldinus, Cavalerius, aliique incubuere.

Euclidea ducit, metiturque rectilineas, invenitque figuras quantitatis desideratae rectilineas, quoties ratio quaesitarum ad datas haberi potest, seu quoties problema est planum, ductuque rectarum et circuli solvi potest.

Sed quoniam interdum rectilinea quantitatis desideratae inveniri non possunt nisi aliis quibusdam curvis, seu locis, quos vocant descriptis, eam provinciam Apollonius praeclare exornavit, et Vieta, Cartesius, Slusiusque amplificavere.

Caeterum ad geometriam Apollonianam dimensione figurarum curvarum, opus non est, sed sufficit eas describi posse, et tangentes earum inveniri quare saepe miratus sum a doctissimis viris, sed qui scilicet hoc unum agitavere geometriam Apollonianam pro absoluta ac perfecta venditari.

Commune istud est eorum peccatum, qui in Cartesii verba iuravere: ita enim ille saepe loquitur splendidius sane quam verius; methodo sua geometriam ad perfectionem perductam esse, quanta ab homine optari possit; nullum esse problema, cuius non aut

10 est) *(1)* invenire, scilicet puncta; describere scilicet locos, seu seriem punctorum infinitam; ac denique comparare, seu metiri figuras, constituereque *(2)* velut subiectum contemplationis, invenire loca, invenire quantitates desideratas, *(3)* describere *L* 27 problema, *(1)* quod eius ope aut solvi non queat *(2)* cuius *L*

solutionem aut solvendi impossibilitatem monstret. Certas sibi rationes esse praescribendi limites intellectui, definiendique quicquid aliquando inveniri possit.
Sed quantopere in eo negotio lapsus sit, vir caetera utique magnus, docuit eventus. Crediderat enim arte humana curvam rectae aequalem inveniri non posse quod in *Geometria* diserte satis expressit, forte quod ex ea quam sequebatur geometriae methodo, cui nihil addi posse putabat aditus et ad hanc speculationem nullus aperiretur. At Wrennus certe ac Heuratius ac novissime Hugenius praeclaris speciminibus, spem intellectui humano reddidere.
Constat Cartesium inveniendae dimensioni areae cycloeidis imparem, donec eius quantitas a Robervallio demonstrata, ei a Mersenno, (quanquam sine demonstratione) transmissa est.

Cuius rei ratio est (operae pretium enim est, intimas scrutari harum rerum causas, cum eas nemo satis persecutus sit), quia algebra quam hactenus habemus in surdarum calculo imperfecta est. Nam quis mortalium duas quasdam radices surdas

$$Rq\ a^2 + b^2. + Rq.\ a^2 + c^2.$$

in unam quandam, quanquam compositam seu binomiam redigere potest? At hoc plerumque in curvilineorum dimensione requiritur.

Alterum est quod per binomia vel residua dividi non potest quemadmodum per ea potest multiplicari, nam ex $a, \frown b + c.$ fieri possunt plures producti uninomii, $ab + ac.$ at si divisor sit binomius, ut

$$\frac{a}{b+c}$$

producti uninomii haberi non possunt nisi numero infiniti. Quorum summa iniri quidem potest, sed quae binomium datum nobis reddit.
Magni tamen usus hoc est ad approximationes quod Mercator in quadratura hyperbolae ostendit; ego in quadratura circuli exacta sed arithmetica, et sectione angulorum univer-

9 areae *erg. L* 20–22 binomius, *(1)* ex eo divisores *(2)* ut $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b+c}}$ *(a)* divisores uninomii ex eo *(b)* producti *L* 23 f. reddit. *(1)* Cuius tamen maximus est usus ad approximationes *(2)* Magni *L* 25 exacta sed arithmetica *erg. L* 25–596,1 universali, *(1)* scilicet arithmetica per approximationes *(2)* non *L*

5 expressit: R. Descartes, *Geometria*, *DGS* I S. 39. 8 reddidere: s. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 68–72 (*HO* XVIII S. 202–211). 10 f. transmissa: Mersenne – Descartes, Brief vom 28. April 1638, in: R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667; S. 380–384 (*DO* II S. 116–122; *MCW* VII S. 173–179). 25 ostendit: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 31–34.

sali, non exacta quidem, sed per approximationes, expeditissimas tamen idem, ingenti opinor fructu, exhibebo.

Tertium quod observavi malum est imperfectio arithmeticae serierum, et quae ab ea pendet arithmeticae infinitorum; quoties quadratura alicuius figurae reducta est ad infinitam seriem numerorum rationalium (rationalium inquam, surdi enim sunt intractabiles).

Quod primus omnium in hyperbola praestitit Vicecomes Bruncker, Societatis Regiae Anglicanae praeses, geometra insignis, in circulo autem hactenus, nemo, donec a me quoque eius rei ratio excogitaretur, qua circulum (et ellipsin) ad quanquam figuram hyperboloeidem reduxi, et ostendi serie quadam numerorum rationalium infinitorum exacte exhiberi posse circuli imo et segmenti cuiuslibet magnitudinem. Unde sequitur vera et exacta (id est non per approximationes), attamen arithmetica tantum quadratura, et quanquam per approximationes (sed expeditissimas), sectio angulorum universalis, et quotcunque mediarum proportionalium inventio, cubique, ac surdesolidi, altiorisque cuiuscunque potestatis duplicatio, triplicatiove etc.; et ut verbo dicam perfectio geometriae in usu communi versantis.

Sed haec aliquando fusius dicam, peculiari dissertatione de approximationibus, seu perfectione geometriae in usu versantis. Nunc admonuisse sufficit, hanc arithmeticae infinitorum imperfectionem, quod omnes series infinitas numerorum rationalium in summam colligere nequit, redundare in geometriam.

Neque hic algebra sufficit, nisi ei ars combinatoria succurrat.

Haec sunt quae faciunt, ut hactenus in potestate artificis non sit, datam figuram curvam metiri. Quare data quadam figura, cuius resolutio nos in surdas ducit, eousque transformanda est, donec eliminatis surdis ad infinitam seriem rationalium numerorum redigatur, qui primus est ad quadraturam gradus.

3 et *(1)* inprimis *(2)* quae *L* 9 (et ellipsin) *erg. L* 21 f. succurrat. *(1)* His ita positis, fit ut non sit in potestate artificis, invenire *(2)* Haec sunt quae faciunt, | fit *streicht Hrsg.* | ut *L* 23 metiri. *(1)* Necesse est enim fig *(2)* Quare *L* 24 eliminatis surdis *erg. L*

7 praestitit: W. Brouncker, *The squaring of the hyperbola*, in: *Philosophical Transactions* Bd III, Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649. 10 reduxi, et ostendi: vgl. N. 27 Teil 3.

Et regula est generalis a me inventa: omnis figura plana curvilinea, cuius solidum revolutione genitum, circa altitudinem basinve, quemadmodum et solidum cuiuslibet partis eius a vertice revolutionis abscissae, reduci potest ad cylindrum, quod in circulo, ellipsi, hyperbola, cycloeide, figura sinuum, aliisque multis fieri potest, reduci potest ad speciem quandam hyperboloeidis, seu infinitam seriem numerorum rationalium; quod est arithmeticam eius, (exactam tamen) quadraturam dare.

Atque haec quidem dimetiendarum figurarum methodus recta est, est et alia obliqua, et fortuna subnixa, cum figura mutatur in aliam figuram, donec tandem in quadrabilem incidamus. Hoc sane hactenus factum est casu, sed qui certam quandam methodum exhibuerit transmutandarum figurarum, quam nihil effugiat, nemo comparuit. Hanc ego ausim dicere a me detectam, fontesque apertos, geometriae Archimedeae quos qui persequatur, efficere possit, quod in geometria Apolloniana iactatur, solvere problema, aut ostendere insolubilitatem.

Mira res est, et summae facilitatis, ac ne contemplationi quidem intricatissimae curvarum obnoxia; eo usque ut ex simplici quodam diagrammate, in quo nihil nisi circulus et aliquot rectae sese intersecantes depictae erunt, deduxerim, triginta et ultra propositiones admirandas, quibus curvilinea plurima, partim quadrantur partim in alia curvilinea commutantur methodo tam facili, ut non nisi rectilinea per Euclidea *Elementa* tractari videantur.

Tota res nititur triangulo quodam orthogonio laterum infinite parvorum, quod a me appellari solet c h a r a c t e r i s t i c u m , cui alia communia, laterum assignabilium, similia, ex proprietate figurae constituantur. Ea porro triangula similia characteristico comparata, exhibent propositiones multas, pro tractabilitate figurae, quibus diversi generis curvae inter se comparantur. Pauca sunt, quae ex hoc t r i a n g u l o c h a r a c t e r i s t i c o non deducantur.

Ars autem combinatoria praestare potest ut nihil effugiat. Atque ita secure pronuntiari potest, etiam de problematum possibilitate quamdiu scilicet arithmetica surdorum, atque infinitorum, separata opera non perficiuntur.

1 a me inventa *erg. L* 20 triangulo *(1)* assignabili quodam, quod a inassi *(2)* quodam orthogonio *L* 27 potest, | non *gestr.* | etiam *L*

1 regula . . . a me inventa: vgl. dazu N. 17 S. 340 Z. 8 f. 16 triginta et ultra: s. vor allem N. 27. — Das charakteristische Dreieck hat Leibniz bei seinen Studien zu Pascals *Lettres de A. Dettonville*, 1659, gefunden; vgl. dazu N. 10.

37. DE PARABOLOEIDUM ET HYPERBOLOEIDUM QUADRATURA I
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 239. 1 Bl. 4°. 2 S.
Cc 2, Nr. 693

Datierungsgründe: Das vorliegende und die beiden folgenden Stücke stehen in engem inneren Zusammenhang; sie sind jeweils Vorstufen voneinander und sind offenbar nach N. 26 und N. 27 entstanden. Aufgrund des Wasserzeichens des Papiers müssen sie vor N. 40 von August 1673 liegen.

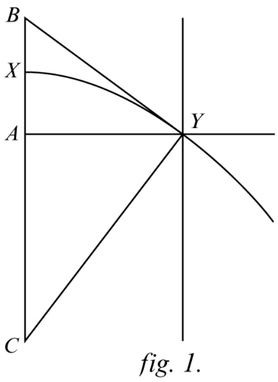


fig. 1.

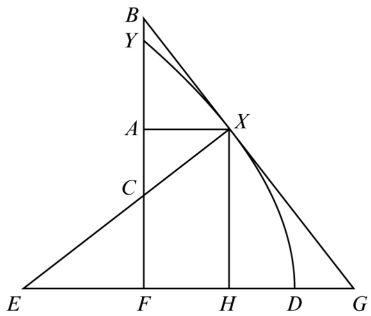


fig. 2.

Sunto tria in axe producto puncta, unum (A) quo occurrit applicatae, alterum quo tangenti (B), tertium (C) quo perpendiculari, hinc lineae AB et AC, aio hanc regulam esse generalem[:]

Applicata semper est media proportionalis inter AB et AC.

Ergo si y sit applicata, et x sit abscissa, habeatque AB constantem semper rationem ad abscissam, ut in hyperboloeidibus et paraboloeidibus[,] ea ratio ponatur esse β. Ergo $\dfrac{y^2}{x\beta} = AC$.

11 proportionalis *(1)* |inter *nicht gestr.*| punctum *(2)* li *(3)* inter *L*

Quod si iam ex natura curvae $y^2 = ax$. erit $AC = \frac{ax}{\beta x} = \frac{a}{\beta}$. Et quia β est ratio exponentium potestatis x et y. $= 2$. erit $\frac{a}{\beta} = \frac{a}{2}$.

At quid si $y^3 = ax^2$. erit $y^2 = \frac{ax^2}{y}$. (vel $y = \frac{ax^2}{y^2}$. vel $1 = \frac{ax^2}{y^3}$.) ideoque $AC = \frac{ax^2}{\beta xy} = \frac{ax}{\beta y}$. Iam hoc loco $\beta = 3$. ideo $\frac{ax}{3y} = AC$. Ergo $AC^3 = \frac{a^3x^3}{9y^3}$. et pro y^3 substituendo ax^2 fiet $AC^3 = \frac{a^3x^3}{9ax^2} = \frac{a^2x}{9}$. Ergo $AC = \frac{\sqrt{a^2x}}{3}$. Hinc memorabile est, si aequatio curvae $ax^2 = y^3$. tunc determinationem ipsius AC, fore $\frac{\sqrt{a^2x}}{3}$.

Contra, si aequatio curvae $a^2x = y^3$, erit $y^2 = \frac{a^2x}{y}$. Ergo AC vel $\frac{y^2}{x\beta}$ erit $= \frac{a^2x}{\beta xy} = \frac{a^2}{\beta y}$.

(Ideoque [locus] omnium AC in curva ista, ad basin applicatarum, erit hyperbola. Eodemque modo in aliis orietur hyperboloeis, ubicunque x tollitur[;] cum contra, ubi x manet, alia quaedam paraboloeis sit locus omnium AC, ut in praecedenti, ubi $AC = \left[\frac{2\sqrt{_c\, a^2x}}{3}\right]$. seu applicata parabolae cubicae. Ergo [locus] omnium AC hic quadrari potest, at ubi est $\frac{a^2}{\beta y}$ pendet eorum summa ad basin ex quadratura hyperbolae[;] sed ad altitudinem, potest opinor etiam quadrari, quod apparebit, si auferemus y ut mox sequetur.)

Iam si $AC = \frac{a^2}{\beta y}$. Ergo $AC^3 = \frac{a^6}{\beta^{[3]}y^3}$. vel (quia $y^3 = a^2x$.) $\frac{a^6}{[\beta^3]a^2x} = \frac{a^4}{[\beta^3]x}$. Ergo hoc casu [locus] AC est genus quoddam hyperboloeidis altioris, si axi applicentur, ut est hyperbola communis, si applicentur basi.

9 summa *L ändert Hrsg.* 11 $\frac{\sqrt{a^2x}}{3}$ *L ändert Hrsg.* 12 summa *L ändert Hrsg.* 15 *fehlende Faktoren erg. Hrsg.* 16 casu | summa *erg., ändert Hrsg.* | AC *L* 17–600,1 basi. *(1)* Hinc *(2)* NB. *(3)* Omnium *L*

3–6 Hier begeht Leibniz verschiedene Flüchtigkeitsfehler; bei richtiger Rechnung müsste sich $AC = \frac{2\sqrt{_c\, a^2x}}{3}$ ergeben.

Omnium AC axi applicatarum solidum haberi potest ex vertice, modo summa haberi possit quadratorum AY seu applicatarum paraboloeidis nostrae ($a^2x = y^3$.) ad axem. Ratio est quia $AC \frown AB$ (vel $AC \frown AX\ \beta$) $= AY^2$. At summa horum quadratorum ita habebitur:

Datur momentum huius paraboloeidis ex vertice, datur et eius quadratura, ergo eius centrum gravitatis, ergo et momentum ex ipsa AX, seu quadrata omnium AY. sed momenta omnium [AC] ex X aliunde habentur, sunt enim summa omnium a^2.

Iam intelligantur omnia inversa, et fig. 2. relationem quaeri omnium curvae punctorum, non ad lineam AX, sed ad lineam AY.

Tunc BX tangens curvae in puncto X erit infinita, quia CX coincidit cum AX, et ideo BX parallela AB, ideoque infinita. Sed hoc non contingit in quolibet puncto X, sed tum demum cum AX est axis figurae. AY enim axis non est, etsi sit altitudo.

Porro ut investigemus AX, posito AY velut cognito, et [Y] puncto inimmutabili, cum sit $a^2x = y^3$. alia nunc instituenda aequatio est, in qua y ipsi a misceatur, x separatim inquiratur. Ergo $\dfrac{y^3}{a^2} = x$. Quod si sit $ax^2 = y^3$. fiet: $x^2 = \dfrac{y^3}{a}$. $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$.
Hinc facilis quadratura figurae[,] tantum enim summa omnium cuborum ex Y (quae iniri potest, quia y crescit uniformiter) dividenda per a^2.
At in hyperbola aut hyperboloeide ita aequatio primum: $xy = a^2$. ergo nihil refert ad summam habendam sive dicas $x = \dfrac{a^2}{y}$, sive $y = \dfrac{a^2}{x}$.

Quod si aequatio sit: $x^2y = a^3$. fiet vel $y = \dfrac{a^3}{x^2}$ (quorum momentum est cylinder hyperbolicus $\dfrac{a^3}{x}$) vel $x = \dfrac{a^3}{yx} = \sqrt{\dfrac{a^3}{y}}$. et horum $\sqrt{\dfrac{a^3}{y}}$ momentum est $\sqrt{a^3y}$ quod est genus seriei paraboloeidis, in quo $x^4 = a^3y$. Et $\dfrac{x^4}{a^2} = ay$. Cumque quadrari hoc possit,

2 f. axem. *(1)* At hanc haberi posse puto *(2)* Ratio *L* 7 AY *L ändert Hrsg.* 13 Y *erg. Hrsg.* 22 seriei | paraboloeidis *darüber* parabolae | in quo *(1)* $x^2 = a^3y$. Et $x^2 = ay$. *(2)* x^4 *L*

22 in quo: in den beiden folgenden Ausdrücken stand zunächst x^2 (s. die Variante), Leibniz hat dann abgeändert und die neue Kurve weiter betrachtet.

habebitur et series omnium x^2, habita scilicet summa omnium x earumque momento aliquo. Series autem omnium x habetur ex serie omnium y, quae est $\dfrac{x^4}{a^3} = y$. quorum manifesta est quadratura. Cumque momentum etiam omnium y ex vertice, seu summa omnium yx manifeste detur, aequalis: $\dfrac{x^5}{a^3}$ ad basin, constat momentum etiam ex basi, et ideo centrum gravitatis, atque ideo momentum ex altitudine, atque ideo summam quadratorum applicatarum ad altitudinem, x^2, dari.

Hinc praeclaram duco demonstrationem: quadraturam hyperboloeidis $x^2y = a^3$. ex quadratura hyperbolae dari. Idemque de omnibus hyperboloeidibus in infinitum demonstrari posse arbitror.

Suppono quadraturam omnium dari praeter primae seu Apollonianae. Esto fig. 2. hyperboloeis 2^{da} $a^3 = x^2y$, eius momentum ex vertice Y est cylinder hyp. $\dfrac{a^3}{x}$. Quadrata omnium $y = AX$ sunt $\dfrac{a^6}{x^4}$. quae quadrabilia, quia cylinder hyperboloeidis $\dfrac{a^5}{x^4}$ quadrabilis. Momenta omnium (x) XH ex vertice D $\sqrt{a^3y} = xy$. ergo $= \sqrt{ay}, \frown\, a$. seu cylindro parabolae. Restant quadrata omnium (x) XH, seu momentum ex DF est $\dfrac{a^3}{y}$ seu cylinder hyperbolae. Ergo cum momentum ex vertice $Y+$ mom. ex basi DF componant cylindrum hyperboloeidis quadrabilem, ergo duo cylindri hyperbolici eiusdem altitudinis, tantum quod una hyperbola est $\dfrac{a^2}{YF}$, altera $\dfrac{a^2}{DF}$ componunt cylindrum hyperboloeidis quadrabilem. Possunt autem duae hyperbolae ad se invicem reduci, et ita invenietur quadratura, dum scilicet hyperbolae concavae duae, similes, complent cylindrum. Ergo differentia earum habetur a convexa. Hinc quadratura.

Nota quia AB ad basin aequantur ipsis AY ad altitudinem, ideo in fig. 2. ubi paraboloeidis inverso quodam modo assumitur, nec ad axem sed basin applicatae ducuntur

4 ad basin *erg. L* 5 ex | axe *darüber* altitudine |, atque *L* 9–21 arbitror. *(1)* Sed demonstratio omnium pulcherrima et generalissima haec est, qua demonstro summam omnium AB. aequari figurae. Hinc quadraturam habemus omnium paraboloeidum, in quibus summa omnium AB. semper $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ est. Hinc summam habemus aliarum figurarum infinitarum, quae paraboloeides non sunt, in quibus AB. parabolam aliamve figuram quadrabilem conficiunt. NB. omnes AB. in figura 2^{da} constituunt spatium asymptotum. Huius ergo quadratura hoc modo habetur sane admirabilis. *(2)* | Suppono ... quadratura. *erg.* | Nota *L*

novum quoddam genus figurarum, et quidem asymptotarum, quadrabilium orietur[,] nam in fig. 2. ultima AB est infinita, quia et ultima XB infinita est.

Porro habebimus AB. si scilicet AX^2 dividatur per AC. erit $AB = \dfrac{AX^2}{AC}$.

Vel aliter[:] Si axem figurae inquiremus qui ponatur esse DFE (fig. 2.), quo casu AX non est axis, nec XB infinita, ductaque perpendiculari XCE, et tangente XG. patet angulum XBA esse = angulo AXC, triangulaque XAC et BAX similia, ergo $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AX}{AC} = \dfrac{XB}{CX}$.

Ergo $AB \frown AC = AX^2$. Ergo $AB = \dfrac{AX^2}{AC}$.

Sed eadem AB conemur ut opinor simplicius sic determinare: Angulus CEF = angulo ABX. Triangulaque BAX et EHX similia sunt ergo. Ergo $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{EH}{HX}$. Ergo $AB = \dfrac{EH \frown AX}{HX}$.

Eodem modo fig. 2. habetur summa omnium XB ad basin, si summa omnium AX ad arcum. Qualis habetur si AX est axis parabolae, sed non si applicata axi. Summa omnium XB applicata ad FD = omnibus AB ad arcum.

NB. si aequatio hyperboloeidis sit $y^3x = a^4$. fiet vel: $x = \dfrac{a^4}{y^3}$. (quorum momentum in distantias a vertice Y ductorum est cylinder hyperbolae, cuius aequatio: $\dfrac{a^3}{y^2}$, hoc ergo momentum pendet a quadratura hyperboloeidis praecedentis) vel $y = \dfrac{\sqrt{_c\ a^4}}{x}$. quae ducta in x vel $\sqrt{_c}\ x^3$ dabunt: $yx = \sqrt{_c}\ a^4x^2$. Summa autem seriei cuius termini sunt

$$\sqrt{_c}\ a^4x^2, \text{ vel } [\sqrt{_c}\ a^4\beta^2,\ \sqrt{_c}\ a^4 4\beta^2] \text{ etc.}$$

iniri potest, sunt enim applicatae paraboloeidis cuiusdam ad axem. Ergo et cubi applicatarum istarum.

2 f. est. *(1)* Posita autem XB. finita, eam sic investigabimus *(2)* Porro *L* 3 f. $\dfrac{\mathrm{AX}^2}{\mathrm{AC}}$. *(1)* Sed quia AC. et AB. nunc aeque ignotae, rectius *(2)* Vel *L* 7 f. $\dfrac{\mathrm{AX}^2}{\mathrm{AC}}$. *(1)* | Cumque summa omnium AX^2 id est quadratorum applicatarum $\bigtriangledown^{\mathrm{li}}$ ad basin, detur. *nicht gestr.* | Caeterum omnes AC. sunt *(a)* etiam applicatae parabolae *(aa)* et i *(bb)* si *(b)* radices differentiarum inter duarum parabolarum applicatas. *(2)* Sed *L* 11 basin, *(1)* aequalis summae *(2)* si *L* 15 in ... ductorum *erg. L* 18 $\sqrt{_\mathrm{c}}\ \mathrm{a}^4\beta,\ \sqrt{\mathrm{a}^4 2\beta}$ *L ändert Hrsg.* 19 potest, *(1)* | ergo et *nicht gestr.* | *(a)* qua *(b)* sum *(2)* sunt *L*

Nimirum generali regula ostendendum est, quadratorum, cuborum, etc. summam cuiuslibet applicatae parabolae iniri posse.
Sed id impraesentiarum facile fieri potest si quaeratur $\sqrt{_c\ ax^2} = \dfrac{yx}{a}$. Ergo momentum istud hyperbolae quadrato-quadraticae est cylinder parabolae cubicae.

2 applicatae *(1)* hyperbolae *(2)* parabolae *(3)* parabolae *L* 4 hyperbolae quadrato-quadraticae *erg. L* 4 cylinder *(1)* | parabolae *nicht gestr.* | quadrato cubicae *(2)* parabolae *L*

4 parabolae cubicae: in neuerer Terminologie: semicubicae.

38. DE PARABOLOEIDUM ET HYPERBOLOEIDUM QUADRATURA II [Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 135–136. 1 Bog. 2°. 4 S. Bl. 135 insgesamt gestrichen.
Cc 2, Nr. 638

Datierungsgründe: s. N. 37.

[*Teil 1, gestrichen*]

Multa nuper a me demonstrata sunt, exigua licet neglectaque in schedula de quadratura paraboloeidum ac hyperboloeidum.

Ac primum quod ad paraboloeidum quadraturam pertinet methodum reperi generalem, qua non tantum paraboloeides quadraticae aut cubicae, simplices, quarum quadratura tantum vulgo extat, sed et compositae quadrantur, repetam breviter:

Quaeritur quadratura paraboloeidis simplicis, cuius haec est aequatio[:] $a^2x = y^3$. vel $\sqrt{_c\, a^2x} = y$. Hanc aequationem in aliam commutemus, qua surditas evitetur[;] ex $a^2x = y^3$, fiet $x = \dfrac{y^3}{a^2}$. Summa ergo omnium x, applicatarum axi parallelarum haberi potest, quia haberi potest summa omnium $\dfrac{y^3}{a^2}$, quia y^3 crescunt uniformiter, est ergo summa summarum, pyramidalium, seu summa triangulo-triangularis, divisa per a^2, quia a immutabile est.

At si aequatio paraboloeidis non simplicis, sed compositae sit v. g. $ax^2 = y^3$, nam quoties nimirum non immutabilis parameter, sed mutabilis applicata potestate affecta est, paraboloeidem compositam appello. Aequatio haec erit $x = \dfrac{y^3}{ax}$. vel $x^2 = \dfrac{y^3}{a}$. unde statim hanc consequentiam duco quadrata omnium x summari posse. Quadrata autem applicatarum aequantur momento ex altitudine, quae hoc loco est basis, sunt enim x basi parallelae axi applicatae, at y axi parallelae, basi velut altitudini applicatae. Habemus ergo momentum paraboloeidis compositae ex basi.

---

8 Multa: s. N. 37.

Altera aequatio est: $y = \sqrt{{}_c\ ax^2}$. Ergo $y^3 = ax^2$. At summa omnium ax^2 haberi potest, ergo et summa omnium y^3. Sed nos opus habemus summa omnium y^2. Est autem $y^2 = \dfrac{ax^2}{y}$. sed $y = \sqrt{{}_c\ ax^2}$. Ergo $y^2 = \dfrac{ax^2}{\sqrt{{}_c\ ax^2}}$. Ut auferri possit surditas, erit $y^2y^2y^2 = \dfrac{a^3x^2x^2x^2}{ax^2}$, vel $y^6 = \dfrac{a^3x^6}{ax^2} = \dfrac{a^2x^4}{1}$. Ergo $y^3 = ax^2$. nullo hactenus fructu.
Ergo quaerendum si y ducamus in distantiam a vertice x. fiet $yx = \sqrt{{}_c\ ax^5}$. Unde patet quadraturam huius paraboloeidis solidi (nota[:] paraboloeidi solida non sunt hactenus considerata) pendere a quadratura huius paraboloeidis plani: $y = \sqrt{{}_c\ ax^2}$.

Diximus supra $x = \dfrac{y^3}{ax}$. Ergo $x = \dfrac{y^3}{\dfrac{ay^3}{ax}}$. Ergo $x = x$. inepte.

An aliter pro y^3 substituendo ax^2, fiet $x = \dfrac{ax^2}{ax} = x$. iterum inepte.

Habemus $x^2 = \dfrac{y^3}{a}$. Ergo $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$.

Sed cum haec frustra tentari videantur nova methodus ineunda est:
Cum sit $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$. erit $x = \dfrac{y}{\sqrt{a}}$. Id est summa indivisibilium omnium y, dividenda est per radicem quadratam summae indivisibilium ipsius a. Quod ita facile opinor nunc assequemur novo licet isto surditatis genere ablegato. Si data nobis aequatione: $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$. pro summa omnium $\sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$ substituamus $\sqrt{\dfrac{a^4\beta}{a}}$. fiet $x = \sqrt{\dfrac{a^4\beta}{a}}$. vel $x = \sqrt{a^2\beta}$. Ergo $x = a \frown \sqrt{\beta}$.

2 y^3. *(1)* Ergo et momentum paraboloeidis ex *(a)* altitudine *(b)* axi. Quare habetur eius centrum gravitatis, et cum detur momentum eius, habebitur et quadratura, quae area enim est momentum distantia centri gravitatis ab axe divisum. Restat no *(2)* Sed *L*

12–16 Zunächst hatte Leibniz überall $\sqrt{{}_c}$ bzw. radicem cubicam stehen; er hat dann aber ohne sonstige Änderung die Kubikwurzel durch die Quadratwurzel ersetzt. Dasselbe geschieht, wenn auch nicht an allen Stellen S. 606 Z. 26 – S. 607 Z. 2 und S. 608 Z. 10–13.

At $\sqrt{\beta}$. facile haberi potest, quia β haberi potest, est enim certus quidam numerus, ratio scilicet omnium y^3, ad omnia a^3, seu ad a^4. quae aliunde dudum nota est.

Ecce ergo repertam rationem generalem quadrandi omnes paraboloeides simplices et compositas.

Addo quod intactum, omnium dimensionum, id est planas, solidas, quadrato-quadraticas; etsi enim illae sint imaginariae, tamen repraesentationes earum utiles sunt, aliisque figuris exprimi possunt. Ita $\sqrt{_c}\ ax^5 = y^2$. vel $ax^5 = y^6$. aequatio est exprimens naturam cuiusdam figurae solidae, cuius planum applicatum in se cubice ductum, aequatur surdesolido distantiae a vertice, in quandam parametrum constantem ducto.

Unde illud quoque apparet omnium paraboloeidum applicatorum quadrata, cubos, etc. momenta, aliaque id genus innumera haberi posse. Neque in hanc rem expectari posse perfectius quicquam.

Porro ista quoque paraboloeidi solida aut supersolida, ad nova ut dixi planarum paraboloeidum genera exhibenda, utilia sunt, v. g. si sit $\dfrac{\sqrt{_c}\ ax^5}{a} = (y)$. Eius utique paraboloeidis area hoc modo haberi potest. Sed videndum an ea aliter exprimi possit: $\sqrt{_c}\ ax^5 = (y)a$. Ergo $ax^5 = (y)^3a^3$. Ergo $x^5 = (y)^3a^2$. Quare huius quidem generis aequationes paraboloeidum planarum irregulares non nisi frustra inducerentur. Solidae autem hac methodo ad suas planas reducuntur, a quibus pendent. V. g. data est aequatio $\sqrt{_c}\ ax^5 = y^2$. et summa quaeritur omnium y^2. Eam ita habebimus si substituamus: $\dfrac{\sqrt{_c}\ ax^5}{a} = \dfrac{y^2}{a}$. Iam si pro $\dfrac{y^2}{a}$ substituatur (y) (quod consulto includo parenthesi ne duo y inter se confundantur), fiet $\dfrac{\sqrt{_c}\ ax^5}{a} = (y)$. Ergo dicto modo: $x^5 = (y^3)a^2$, vel potius $\dfrac{x^5}{a^2} = (y^3)$. vel $\sqrt{_c}\ \dfrac{x^5}{a^2} = (y)$. Ita summa omnium (y) iniri potest, quae ducta in a dabit summam omnium y^2.

Non possum hinc abire, nisi admoneam, admirandam illam consequentiam, quae ex hac demonstratione duci potest:

Cum x sit $= \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$. ostensum est reperiri posse summam omnium x. Iam idem $x = \dfrac{y}{\sqrt{a}}$, ut supra dictum est, et haberi potest summa omnium $\langle \dfrac{y}{a} \rangle$. (Quae est $\dfrac{a}{2}$. posito maximum $y = a$. seu quando basis seu maxima applicata lateri recto aequalis est, sin minus habetur proportione.) Cumque $\sqrt{_c}\ a$. sit semper eadem, hinc sequitur quantitatem ipsius $\sqrt{_c}\ a$.

seu rationem eius ad a. definiri posse, quia ratio omnium $\dfrac{y}{\sqrt{a}}$ planum constituentium ad omnia $\dfrac{y}{a}$ lineam facientia, haberi potest.

Notabile enim est, rationes puras in geometricis esse nullas, sed indivisibilia communia designari quoties divisor dividendo quantum ad dimensionem aequalis; sin inferior, designari indivisibilia communibus inferiora, quorum non nisi infinita indivisibile commune constituant.

Huius rei manifestam hanc demonstrationem affero per impossibile[:]
Sunto v. g. y et a aequalia, ergo $\dfrac{y}{a}$ significant 1. ita inquies. Ego fateor, sed aio illud 1 notandum esse hoc modo *1r*. neque enim esse 1, seu numerum illum, sed esse indivisibile aliquod, quod in praesenti constructione unitatis personam sustinet, sive quod est infinitesima pars lineae cuiusdam, in partes aequales infinitas cogitatione divisae. Fateor tamen dici posse $\dfrac{y}{a}$ esse unitatem communem, nam $\dfrac{y^2}{a^2}$ non augent dimensionem, nam v. g. $\dfrac{y^2a}{a^2}$ non nisi lineam facit. Et haec manifesta sunt sciendum enim istis a^2. vel a. non significari lineam, sed numerum infinitum, unde praeclare Proclus *Comm. in 1. Eucl.*[:] ut elementa arithmeticae sint: unitas et multitudo, ita geometriae esse: τὸ ἄτομον, καὶ τὸ ἄπειρον. Id est occupari eam numero sed infinito, indivisibilium velut unitatum.

Caeterum illud manifestum est, si v. g. curvae cuiusdam in rectam ductae superficies cylindrica aequetur seriei

$$\sqrt{a\beta} + \sqrt{2a\beta} + \sqrt{3a\beta} \text{ etc.}$$

curvam ipsam aequari huic seriei ex indivisibilibus conflatae:

$$\frac{\sqrt{a\beta}}{a} + \frac{\sqrt{2a\beta}}{a} + \frac{\sqrt{3a\beta}}{a} \text{ etc.}$$

Id ipsum ergo $\dfrac{\sqrt{a\beta}}{a}$, vel simile est indivisibile quoddam.

4 dividendo *(1)* maior *(2)* quantum *L*

14 praeclare: vgl. dazu *a. a. O.* (ed. Friedlein) S. 19.

Caeterum ad id unde coepi redeundum est: haberi posse valorem ipsius $\sqrt{a}$. vel $\sqrt{_c\; a}$. etc. in ratione ad a. Quod nescio an non usum haberi possit, ad construendas in plano aequationes alioquin desperatas.

V. g. si aequatio prodierit $z = \sqrt{_c\; c^2 v}$. posset $\sqrt{_c\; c^2}$. et $\sqrt{_c\; v}$. quodam valore exhiberi, haberetur aequationis reductio, imo sufficeret valorem cogniti $\sqrt{_c\; c^2}$. exhiberi. Certe data summa horum $\sqrt{_c\; \frac{y^3}{a}}$ $\left(\text{seu } \frac{y}{\sqrt{_c\; a}}\right)$ seu quadratura dicta, dabitur ratio eius ad summam $\frac{\sqrt{_c\; y^3}}{a}$. seu ad $\frac{y}{a}$.

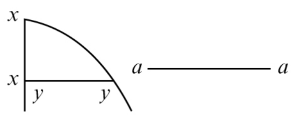
Caeterum ut clarior sit modus quadraturae paraboloeidum compositarum, sic procedendum:

Data aequatione: $x = \sqrt{\frac{y^3}{a}}$. substituatur $x = \frac{y}{\sqrt{a}}$. Iam summa omnium y inveniatur more communi, cuius ratio ad a^2. cum nota sit β. fiet summa omnium x. seu $\frac{xb}{\gamma} = \frac{a^2\beta}{\sqrt{a}}$. Ergo $\frac{x^2b^2}{\gamma^2} = \frac{a^4\beta^2}{a}$. Quod absurdum, in eo ergo peccatum quod pro $\sqrt{_q\; \frac{y^3}{a}}$. substitutum $\frac{y}{\sqrt{_q\; a}}$. vel $\frac{y}{\sqrt{_c\; a}}$. Neutrum procedit.

Nihil ergo actum est, nisi alia rectior, generaliorque via reperiatur de qua pagina sequenti.

[*Teil 2, gültig*]

Quadratura paraboloeidum generalis



[*Fig. 1*]

Paraboloeidis cuiusque natura aequatione quadam exprimitur qua omnia curvae puncta ad axin basinve determinantur, eam autem aequationem ingreditur parameter seu l a t u s r e c t u m, recta quaedam constans atque invariata (a), distantiam

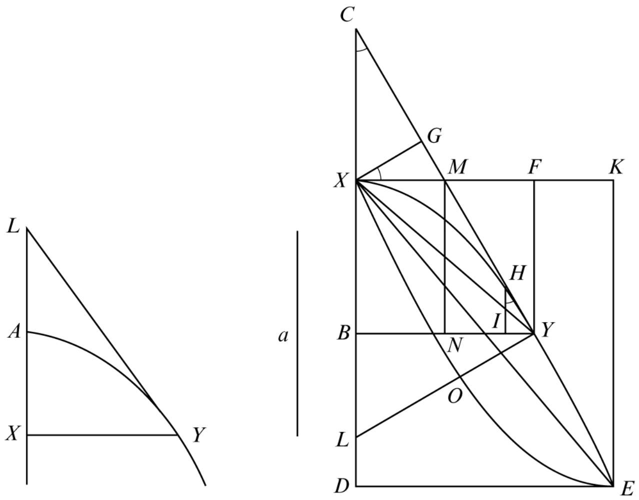
20 f. parameter seu l a t u s r e c t u m *erg. L*

puncti a vertice seu a b s c i s s a m appellabimus (x) BX, distantiam eius ab axe seu a p p l i c a t a m ad axem (y) BY.
His ita positis paraboloeidum genera haec sunt:

$\frac{1}{3}$	$a\ x =$	y^2	$a^4x =$		$a^5x =$		$a\ x = y^2$
$\frac{1}{4}$	$a^2x =$		$a\ x^4 =$		$a\ x^5 =$		$a^2x = y^3$
		y^3		y^5	$a^4x^2 =$	y^6	
$\frac{2}{5}$	$a\ x^2 =$		$a^3x^2 =$		$a^2x^4 =$		$a^3x = y^4$
	$a^3x =$		$a^2x^3 =$		$a^3x^3 =$		$a^4x = y^5$
	$a^2x^2 =$	y^4					
	$a\ x^3 =$						

etc.

4–11 *Anmerkungen zur Tabelle:*
gültig: NB. $a^2x^2 = y^4$ frustra diceretur, reducitur enim ad $ax = y^2$. ut et $a^3x^3 = y^6$ ad $ax = y^2$.
$a^4x^2 = y^6$. $a^2x = y^3$.
gestr. neben der 4. Spalte: Area trilinei concavi $\frac{1}{3}$



[*Fig. 2*]

Porro in omnibus istis paraboloeidibus, haec est regula generalis tangentium ducendarum, a geometris praestantibus dudum prodita, nimirum si tangens sit YC. rectam x (BX) fore ad rectam BC, ut est exponens potestatis x (BX) ad exponentem potestatis y (BY). Ideo in parabola communi BC est $(2\ BX)$ $2x$, quia cum aequatio sit: $ax = y^2$. patet exponentem x esse 1. exponentem y^2 esse 2.

At hinc se methodus mihi aperuit nova prorsus et admiranda, quadrandi figuram quamcunque, quotiescunque ea eius est natura, ut certa constansque sit ratio CX ad BX, vel BC ad BX. Quae methodus utique infinitas alias figuras comprehendit, quae paraboloeides, sive ex earum, quas tabella in infinitum continuata contineret, genere; non sunt.

Fiat triangulum figurae datae characteristicum, indivisibilium repraesentantium HIY. Ducatur et recta XG perpendicularis ad tangentem CY. seu intervallum tangentis a vertice. Patet triangula CBY et HIB esse similia, angulumque BCI angulo IHY aequalem. Ergo cum angulus XCG (vel BCY) angulo IHY sit aequalis, triangula quoque CGX et HIY similia erunt; ideoque

$$\frac{CX}{HY} = \frac{GX}{IY}, \text{ vel } CX \frown IY = GX \frown HY,$$

id est CX ad basin aequantur intervallis tangentium a vertice seu GX ad arcum, ac per consequens (ut alibi demonstravimus) segmento XY, vel si longius procedas XE, duplicato.

Porro quando rectae CX habent certam et constantem rationem ad rectas BX, etiam summa omnium CX ad basin DE, vel XK, constantem habet rationem ad summam omnium BX (vel FY) ad eandem XK. vel ad aream spatii $XYEK$. Haec ratio esto β. Summa omnium BX, seu area concavi trilinei $XYEK$ quaesita esto: z^2. Ergo

$$\text{summa omnium } CX \text{ erit } \beta z^2, \text{ ac segmentum } XYE \text{ erit } \frac{\beta z^2}{2}.$$

Iam trilineum concavum $XYEK$ segmento XYE auctum constituit triangulum $EXKE$. habemus ergo aequationem:

$$z^2 + \frac{\beta z^2}{2} = \bigtriangledown XKE. \quad \text{Ergo} \quad z^2 = \frac{\bigtriangledown XKE}{\overline{1 + \dfrac{\beta}{2}}}$$

Habemus ergo quadraturam trilinei concavi $XYEK$ quaesitam.

Exemplo veritas demonstrationis statim comprobatur, si curva sit parabolae communis, erit $\beta = 1$. ergo $1 + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{3}{2}$. Ergo $z^2 = \dfrac{\bigtriangledown XKE}{\overline{\dfrac{3}{2}}}$ vel $= \dfrac{\square XE}{3}$.

Innumerae supersunt figurae; eadem methodo quadrabiles, quae in tabula praecedente non continentur, uti, in quibus exponentes sunt ut numeri fracti, aut ut integri ad fractos, v. g. $ax^{\frac{1}{2}} = y$, sed id reducitur ad hanc aequationem: $\dfrac{ax}{2} = x^2$. Sed in haec ulterius inquirendum, et an exponentes numeri surdi esse possint.

Sed quicquid eius sit, illud certe manifestum est, si CX sit ad CB aliter quam integer rationalis ad integrum rationalem, v. g. ut $\dfrac{1}{2}$ ad 1. vel ut $\dfrac{3}{4}$ ad $\dfrac{2}{3}$. vel ut Rq 2. ad 1. quod certe fieri posse manifestum est, patet non ideo minus quadrari figuram, etsi paraboloeidum forma enuntiari non possit.

1 (ut alibi demonstravimus) *erg. L*

14–17 Hier benutzt Leibniz eine neuartige Bezeichnungsweise, wendet diese aber nicht konsequent an. Hinzu kommen Unzulänglichkeiten in der Rechnung. — Derselbe Ansatz tritt erneut in N. 39 S. 627 Z. 18 – S. 630 Z. 2 auf.

Hinc habemus quadraturas innumerabiles figurarum quae a paraboloeidum quadratura non dependent, et operae pretium, naturam aliquot figurarum eiusmodi, aequatione exprimere; quod alias fiet.

Videamus exemplum, si $\frac{CX}{(BX)} = \frac{Rq\ 2}{1}$. seu $\frac{CX}{x} = \frac{Rq\ 2}{1}$. seu $CX = Rq\ 2x^2$.

Ergo $CB = x + Rq\ 2x^2$. Iam $(BY) = y$. $\frac{XM}{BY} = \frac{CX}{CB}$. Ergo $XM = \frac{CX \frown y}{CB} = \frac{Rq\ 2y^2}{1+Rq\ 2}$. Iam CXM $\left(\frac{CX \frown XM}{2}\right) = \frac{Rq\ 4y^2x^2}{1+Rq\ 2} = \frac{yx}{1+Rq\ 2}$. $\square XN = BX \frown XM = \frac{Rq\ 2y^2x^2}{1+Rq\ 2}$. $NY = BY - XM. = y - \frac{Rq\ 2y^2}{1+Rq\ 2}$. Sed et tamen $\frac{NY}{y} = \frac{1}{1+Rq\ 2}$. quia $\frac{NY}{BY=(y)} = \frac{XB\ (1)}{CB\ (1+Rq\ 2)}$. Ergo $NY = \frac{y}{1+Rq\ 2}$.

(Ergo $\frac{y}{1+Rq\ 2} = y - \frac{Rq\ 2y^2}{1+Rq\ 2}$. seu $\frac{1}{1+Rq\ 2} = 1 - \frac{Rq\ 2}{1+Rq\ 2}$. Ergo $\frac{1}{1+Rq\ 2} + \frac{Rq\ 2}{1+Rq\ 2} = 1$. vel $\frac{1+2Rq\ 2+2}{1+2+2Rq\ 2}$ nota veritatis. NB $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$.)

Iam $\bigtriangledown NMY = \frac{yx}{2+2Rq\ 2}$. ac denique $CBY = x + Rq\ 2x^2 \frown y = \frac{xy + Rq\ 2x^2y^2}{2} = \frac{yx + Rq\ 2x^2y^2 + \frac{yx}{2}}{1+Rq\ 2}$. Sed sic ubique y tolli potest nec inde aequatio.

$BL = \frac{y^2}{x+Rq\ 2x^2}$. Ergo $BYL \bigtriangledown^{\text{lum}} = \frac{y^3}{2x+2Rq\ 2x}$.

quod $+ \left(\frac{yx + Rq\ 2y^2x^2 + \frac{yx}{2}}{1+Rq\ 2}\right) \frac{xy + Rq\ 2x^2y^2}{2} = \frac{CL \frown y}{2}$.

4–613,12 In diesem Abschnitt versucht Leibniz vergeblich, den Fall eines irrationalen Exponenten zu behandeln, kommt aber trotz verschiedener Ansätze (der letzte zudem fehlerhaft) zu keinem Ergebnis.

Sed $\frac{CL}{LY} = \frac{[LY]}{BL}$. item $LY = Rq\; y^2 + \frac{y^4}{x^2 + 2x^2 + 2Rq\; 2x^4}$. ita veniemus credo ad aequationem.

Vel breviori aequatione [:]

$$\bigtriangledown^{\text{lum}}\; CYL = CL \frown BY \quad \text{vel} \quad \frac{xy + Rq\; 2x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{2x + 2Rq\; 2x^2}$$

$$= \frac{CY \frown LY}{2} \qquad \sqrt{x^2 + 2x^2 + Rq\; 8x^4 + y^2} \frown \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{x^2 + 2x^2 + Rq\; 8x^4}}.$$

Divisis omnibus per y vel $Rq\; y^2$ fiet[:]

$$x + Rq\; 2x^2 = \underbrace{\sqrt{x^2 + 2x^2 + Rq\; 8x^4 + y^2} \frown 1 + \frac{y^2}{x^2 + 2x^2 + Rq\; 8x^4}} - \frac{y^2}{2x + 2Rq\; 2x^2}.$$

Dividantur et omnia per x quantum possunt, fiet:

$$1 + Rq\; 2 = \sqrt{1 + 2 + Rq\; 8 + \frac{y^2}{x^2}} \frown 1 + \frac{y^2}{x^2 + 2x^2 + Rq\; 8x^4} - \frac{y^2}{2x^2 + 2Rq\; 2x^4}.$$

Vel multiplicando rursus sed aliter, per x^2:

$$x^2 + Rq\; 2x^4 = \underbrace{\sqrt{1 + 2 + Rq\; 8 + \frac{y^2}{x^2}} \frown x^2 + \frac{y^2}{1 + 2 + Rq\; 8}} - \frac{y^2}{2 + Rq\; 8}.$$

$$= \sqrt{x^4 + 2x^4 + Rq\; 8x^8 + y^2x^2} + \frac{\sqrt{y^4 + 2y^4 + Rq\; 8y^8 + \frac{y^6}{x^2}}}{x^2 + 2x^2 + Rq\; 8x^4} - \frac{y^2}{2 + Rq\; 8}.$$

Caeterum ex eodem principio aliae adhuc quadraturae aperiuntur, non minus late fusae. Nam si summa omnium CX ad basin seu XK applicatorum haberi potest, ut si (non trilineum concavum sed veram) parabolam constituant, quadrari potest segmentum figurae XYE duplicatum, quare et figura.

Ecce aliud[:] Summa omnium XM ad altitudinem; seu summa omnium BN, aequatur itidem segmento figurae duplicato, quod ita facile demonstro[:]

Triangula similia HIY et XGM, quia anguli GXM et IHY aequales. Ergo $\frac{XM}{HY} = \frac{XG}{HI}$. Ergo $XM \frown HI$ (seu XM ad altitudinem) $= XG \frown HY$. intervallo tangentis ad arcum.

1 BY *L ändert Hrsg.* 12 $\frac{y^2}{2 + Rq\; 8}$. | Divide rursus per x^2 fiet[:] $1 + Rq\; 2 = \sqrt{1 + 2 + Rq\; 8 + \frac{y^2}{x^2}}$ *gestr.* | *L*

Et summa XM ad altitudinem = segmento figurae duplicato.

Unde illud quoque apparet[:] habita quadratura omnium XM, ad altitudinem, haberi et quadraturam omnium NY. Vicissim, habita quadratura omnium NY, habetur differentia inter figuram et segmentum duplicatum; est enim [summa omnium] NY differentia inter figuram et segmentum figurae duplicatum seu inter summam omnium BY quae constituit figuram, et omnium BN quae constituit segmentum figurae duplicatum. At differentia inter figuram convexam et segmentum figurae duplicatum est trilineum figurae concavum, quod facile patet: sit enim segmentum XOE introrsum insistens chordae XE, aequale et simile extrorsum insistenti XYE, patet cum aequalia sint tota, triangula XDE et XKE, et ablata segmenta XOE, XYE, etiam residua trilinea concava $XDEOX$ et $XKEYX$ aequalia fore. Est autem trilineum concavum $XDEOX$, residuum figurae convexae $XDEYX$, ablato duplici segmento $XYEOX$; ergo id residuum figurae convexae, demto duplici segmento, triangulo figurae concavo aequale est.

Quare data quadratura omnium NY seu summa earum ad altitudinem, datur quadratura figurae et vicissim.

Hinc nova iterum methodus, qua aliae figurae innumerabiles quadrari possunt, synthetice pariter atque analytice.

Synthetice inquam, cum ex datis figuris quadrabilibus, ut paraboloeidibus, aliisque derivatur quadratura omnium XM, vel omnium NY; analytice cum assumitur certa quaedam progressio quadrabilis omnium v. g. XM, et per analysin investigatur, quaenam sit figura, cuius omnes XM sint assumtae progressionis. Eaque figura ostenditur esse quadrabilis.

Sed accurate loquendo omnis ista investigatio est synthetica: Nam data figura invenire methodum quadrandi, analyticum est, data methodo invenire figuram, cui methodus applicari possit syntheticum. Nec vero hactenus aliter quam synthetice in geometria transformatrice procedi potest, quoniam series infinitae, inprimis ubi surdae radices interveniunt, per analysin tractabiles non sunt.

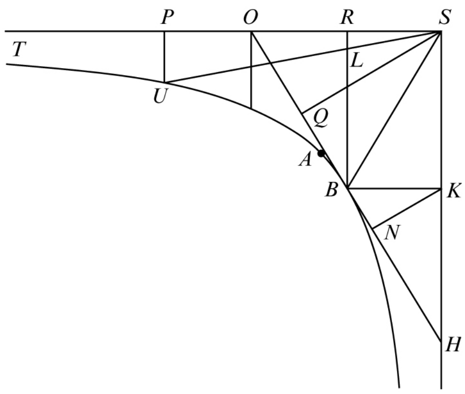
Est tamen analysis quaedam succenturiata in his rebus, ut scilicet in figura data methodos omnes, quas hoc loco demonstravi, ac quibus parum admodum ex geometria certe addi potest, quamdiu ipsa arithmetica infinitorum, aut etiam analysis non perficitur. Experiamur.

4 summa omnium *erg. Hrsg.*

Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 4

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	etc.	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	etc.	$\frac{1}{15}$
	$\frac{1}{36}$		
	$\frac{1}{49}$		

Inspiciatur figura hyperbolae aut hyperboloeidis pag. 89 libri Hugenii.



[*Fig. 3*]

1–7 *Tabelle am Rande erg. L*

8 Inspiciatur: HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 89. Leibniz hat keine eigene Figur gezeichnet. Die vorliegende Figur hat Hrsg. textkonform unter Berücksichtigung des Leibnizschen Handexemplars rekonstruiert. (Für die vollständige Figur s. N. 2.)

Ibi $SK = KH$. si hyperbola est communis, quia $xy = a^2$. exponentes autem x et y sunt aequales in xy.

Perpendicularis KN ad arcum = ipsi KH ad basin.

Ergo SQ ad arcum = SH ad basin quia dupla priorum, atqui SH ad basin = figurae $BRTAB$ duplicatae.

Et eiusdem dimidium seu simplex ista figura = $SBTS$.

Quod videtur absurdum, x implicans. Sed ratio est, quia tunc ipsa linea ultima ST comprehenditur, quae non comprehendebatur sectori ipsi $SBTR$, nimirum ultima ista linea scilicet dimidia = triangulo SBR, quia rectangulum $SKBR$ = toti lineae ST infinitae.

Si partes tantum sumas res eodem redit. Esto spatium $BRPUAB$ aequalis sectori $SBAUS$ quod non mirum cum UPS sit = BRS. Atque haec quidem si curva $TUAB$ sit hyperbolica communis.

Inquiramus quid futurum sit si sit aliqua hyperboloeidum, v. g. ubi $x^2y = a^3$. quo casu KH duplum SK.

Iam summa omnium SK ad arcum vel duplus sector $SBAUS$ = omnibus SH ad basin quae tripla omnium SK ad basin, seu tripla spatii $BRPUAB$.

Ergo $\quad 2,\ SBAUS = 3,\ BRPUAB$.

seu, quod idem est:

$\quad 2,\ LBAUL + 2,\ SLB = 3,\ LBAUL + 3,\ UPRL$.

Ergo: $\quad 2,\ SLB - 3,\ UPRL = LBAUL$.

vel $\quad 2,\ SLB - 2,\ UPRL = (LBAUL + UPRL)\ \ BRPUAB$.

Habemus ergo quadraturam spatii hyperboloeidis, $BRPUAB$. Quo posito hyperbolae quoque quadratura omniumque hyperboloeidum in infinitum haberi potest.

8 comprehendebatur *(1)* in figura *(2)* segmento *(3)* sectori *L* 14 f. duplum SK. *(1)* Ergo SH *(a)* triplum *(b)* $\frac{3}{2}$ KH. ideoque sector SBAUS = *(aa)* $\frac{3}{2}$ BAUPRB. seu LUABL + SLB = $\frac{3}{2}$ LUAB + $\frac{3}{2}$ UPRL. Ergo: SLB = $\frac{1}{2}$ LUAB + $\frac{3}{2}$ UPRL. *(aaa)* Ergo 2, SLB − *(bbb)* $\frac{3}{\cancel{2}}$ UPRL = $\frac{1}{\cancel{2}}$ LUAB. Ergo 2, SLB − 2, UPRL = BAUPR. quo posito haberemus huius hyperboloeidis quadraturam. *(bb)* $\frac{3}{4}$ BAUPRB. Ergo $\frac{1}{4}$ LUABL + ~~SLB~~ = $\frac{3}{4}$ UPRL − SLB. seu LUABL = 3UPRL − 4SLB. vel: (LUABL + UPRL) BAUPRB = 4UPRL − 4SLB. Habemus ergo quadraturam spatii hyperboloeidis BAUPRB. *(2)* Iam *L* 23 potest. | Tentandumque an ea ratione spatii quoque asymptoti infiniti quadratura haberi queat. Quod ut fiat tantum demonstrandum est, quodnam planum lineae infinitae ST sit aequale. *gestr.* | *L*

39. DE PARABOLOEIDUM ET HYPERBOLOEIDUM QUADRATURA III
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 95–96, 250–251, 138–139 (Text); Bl. 140 (fig. 1. und fig. 2.). 3 Bog. und 1 Bl. 2°. 12 S. sowie zwei separate Figuren. Cc 2, Nr. 555B, 635A, 635B, 692

Datierungsgründe: s. N. 37.

39$_1$. PARS PRIMA. DE PARABOLOEIDUM QUADRATURA

[Prop. 1.]
„ Superficies cylindrica truncata super curva quadam velut basi ita erecta, ut ei cur-
„ vae in puncto quolibet intervallum tangentis sui a vertice, perpendiculariter insistat;
„ aequatur segmento, recta a vertice ad extremum curvae punctum ducta abscisso,
„ duplicato.

8 Prop. 1. *erg. Hrsg.*

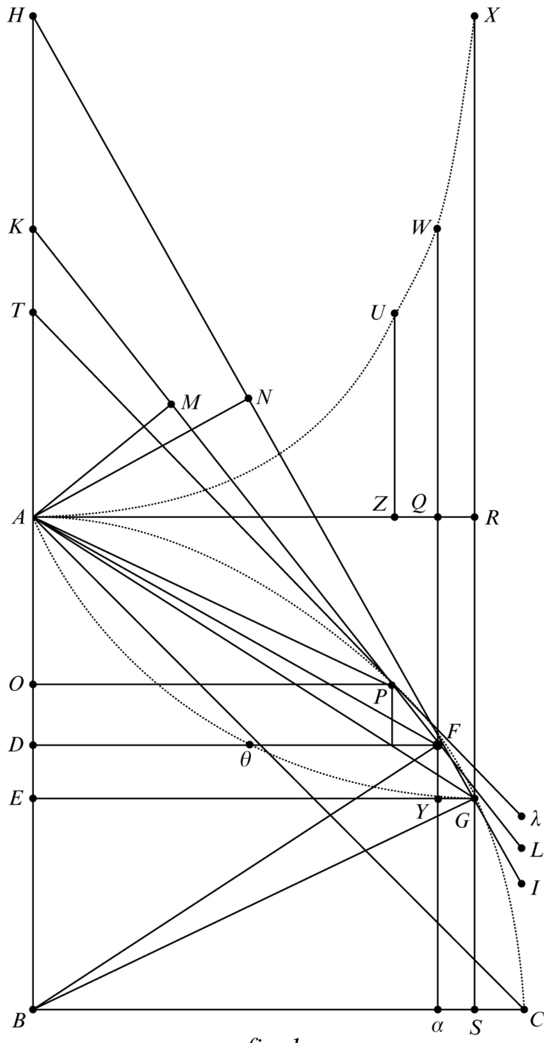


fig. 1.

Esto figura quaelibet ABC cuius altitudo AB in partes numero infinitas sive aequales, sive inaequales, qualis est DE aut OD, quas infinite parvas pono, divisa intelligatur. Et ex punctis divisionis omnibus D. et E. ducantur applicatae, DF. EG, et ad puncta curvae F. G. tangentes HFI, et KPL. quarum a vertice A intervalla sunt perpendiculares ductae a vertice ad tangentes, nempe AM, AN. Haec intervalla tangentium, punctis tangentium suarum cum curva communium, perpendiculariter imponantur, AM puncto F, et AN puncto G. idemque in omnibus curvae AFG punctis fieri intelligatur. Aio portionem superficiei cylindrici recti inde enatam, aequari duplo segmento $AFGA$, recta scilicet AG, verticem A cum extremo curvae, G. connectente; et curva ipsa AFG, contento; idemque est ubicunque punctum ultimum G. in curva AFC assignetur.

Hoc ita demonstro: intelligatur figura data constare infinitis trapeziis, ut $OPFD$, vel $DFGE$, quae scilicet duabus quibusdam applicatis, ut OP et DF, vel DF et EG, parte altitudinis infinite parva, OD, vel DE, ac denique portione quadam tangentium, ut $KPFL$, vel $HFGI$ inassignabili seu infinite parva, nempe ut PF. vel FG, contineantur. Unde fit ut curva in infinitas rectas inassignabiles, ut PF. vel FG, velut latera polygoni irregularis numeri laterum infiniti, fracta intelligatur.

Nunc vero ex vertice A. ducantur rectae ad omnia puncta extrema horum latera, ut AP. AF. AG. quas ad circuli exemplum c h o r d a s appellare possis. Manifestum est totidem oriri triangula, quot sunt latera, quorum vertex in A, basis, ipsum latus, velut APF. AFG. iisque triangulis infinitis totum segmentum AFG compleri. Unde constat figuram huic triangulorum summae aut eius duplo aequalem, ipsi segmento eiusve duplo aequari.

Qualem vero superficiem cylindricam propositam esse, ita facile ostendemus: quoniam constat ex *Elementis* altitudinem, ut AM, vel AN, ductam in basin, ut PF, vel FG duplo trianguli, ut APF, vel AFG aequari, ergo summa omnium rectangulorum, quorum altitudines, intervalla tangentium a vertice, bases vero, latera infinite parva curvam componentia, tangentiumve portiones, vel quod idem est superficies cylindrica, ex intervallis tangentium punctis contactus perpendiculariter impositis conflata, summae omnium triangulorum numero infinitorum duplicatae, id est duplo segmento aequatur. Q.E.D.

1 infinitas *(1)* inter se aequales *(2)* sive *L* 21 aut eius duplo *und* eiusve duplo *erg. L*

1 Esto figura: Die Kurve in der Handzeichnung folgt zuerst der Näherungskurve; in der Umgebung von A ist sie an die Secanslinie angeglichen.

C o r o l l. 1.

„ Si curva proposita in rectam extendatur, cui velut altitudini, intervalla tangentium
„ in punctis contactus applicari intelligantur; figura inde nata eidem segmento, curva
„ inde a vertice sumta, rectaque contento; duplicato; aequabitur.

Quoniam manifestum figuram hanc nihil aliud esse quam superficiem cylindricam supradictam, in planum explicatam.

C o r o l l. 2.

„ Segmentum circuli duplicatum aequatur figurae sinuum versorum arcui applicato-
„ rum, seu momento arcus sui ex puncti extremi tangente librati.

Nam si curva AFG sit arcus circuli, intervallum tangentis a vertice aequatur sinui verso seu abscissae per applicatam DF vel EG ex puncto dato F vel G ductam, ad radium AB in verticem A terminatum, perpendicularem; ut constat, ita AM erit aequale AD, AN erit aequale AE. Ideo in semisegmento $AEGFA$ summa sinuum versorum seu abscissarum ad arcum, seu quod idem est, momentum arcus AFG ex tangente AR (Quod, inquam, idem est, quia intervalla punctorum arcus, ab AR tangente verticis, ut QF, vel RG. aequantur sinubus versis seu abscissis ut AD, vel AE; intervalla autem ab axe librationis ponderanti applicata dant eius momentum.) aequabitur duplo segmento $AFGA$.

Σ χ ο λ. Haec quae de summa sinuum versorum diximus, pulchre conveniunt cum iis quae iam apud alios demonstrata habentur. Illi nimirum ostenderunt momentum arcus AFG ex basi BS seu summam sinuum complementi (qui in circulo ob uniformitatem coincidunt cum sinubus rectis, nisi quod inverse sumantur), arcui suo AFG applicatorum, ut si DB vel EB arcui in punctis F. vel G. perpendiculariter insistere intelligantur, quadrari posse; et radio in maximum eius sinum rectum EG, vel rectangulo AC. id est triangulo AGB duplicato aequari. Et hoc quidem ex dimensione superficiei hemisphaerii Archimedea deducere in proclivi fuit. Cum ergo summa sinuum versorum ut AD ad arcum, det duplex segmentum AFG. et summa sinuum complementi ut DB ad arcum, det duplex triangulum segmento suffultum, ideo summa amborum, $AD + DB$, seu AB. radius, in arcum AFG. aequabitur duplici sectori AFG. quod verum esse dudum constat. Et talia quidem apud eos qui de cycloeide scripsere, Torricellium, Pascalium, Fabrium, Laloveram, legi possunt, velut omnium quae illi demonstravere fundamenta. At doctissi-

25 Et hoc quidem: zur Gesamtproblematik s. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 17–19.

mus geometra, Iohannes Wallisius, ad rem praesentem propius accessit, ipsamque figuram sinuum versorum dimensus est; nostra tamen demonstratio facile prae caeteris se commendaverit, quandoquidem methodi universalis novae non nisi corollarium est; ipsosque recta sinus versos aggreditur, nullo per rectorum ambages circuitu.

P r o p. 2.

„ Figura ex productis ad basin ordinatim recto angulo applicatis nata, aequatur seg-
„ mento duplicato.

P r o d u c t a s appello compendii causa, altitudinem ultra verticem eousque productam, donec occurrat tangenti, qualis est in fig. 1. AH. vel AK, vel AT. id est quicquid in figurae altitudine AB, quantum satis est, producta, inter verticem A, et tangentis occursum H. K. T. cadit; quae si basi AC. vel ei respondenti rectae AR. ordinatim ad perpendiculum applicentur; o r d i n a t i m inquam, id est AH producta, translata in RX, quoniam R in basi, puncto curvae F, cuius tangens FH altitudini BAH productae in H occurrit, ad perpendiculum respondet; eandemque ob causam AK transferatur in QW, et AT in ZU, atque idem ad quodlibet curvae punctum, factum putetur; figura inde conflata $AUWXR$ aequabitur segmento $AFGA$ duplicato.

Quod ut demonstretur, cogitandum est: Triangula FYG et HGB vel HUA esse similia: posito nimirum BG esse perpendicularem ad curvam: atque ideo, ut est AU ad YG, ita erit AH ad FG, unde sequitur rectangulum ex AU in FG, vel quod eodem redit, ut prop. 1. ostensum est, triangulum AFG duplicatum; aequari rectangulo AH in YG. vel rectangulo XR in QR. Eodem modo rectangulum ex WQ in ZQ. triangulo APF duplicato aequabitur. Et quoniam positis YG vel QR. et FG infinite parvis, omnia triangula segmentum $AFGA$ exhauriunt, et omnia rectangula quae dixi, figuram $AUWXR$ complent, ideo figura haec segmento isti duplicato aequabitur.

Σ χ ο λ. Magni sunt momenti huius generis demonstrationes; quoniam nullis figurarum speciebus, nullis figurae propositae partibus continentur; nam et curva AFG cuiuslibet naturae, et punctum ultimum G, in ea utcunque continuata, ubilibet assumi potest.

2 versorum *erg. L* 3 novae *erg. L*

1 Iohannes Wallisius: *Mechanica*, 1672, S. 283–305 (*WO* I, S. 752–766).

Illud tantum admoneri debet, si curva eius sit naturae, ut aliqua applicatarum altitudini perpendicularium, BC. ad ipsam curvam perpendicularis sit, ut in circulo, ellipsi, aliisque ovalium speciebus contingit, tangentem ad punctum hoc C. utcunque productam, nunquam attingere altitudinem BA, utcunque productam; cum sit ei parallela, utraque enim altitudo pariter et tangens est hoc casu ad applicatam BC perpendicularis: quare si in figura productarum $AUWXR$ constituenda, punctum R ipsi C respondere ponatur, recta RX erit infinita, sive quod idem est, extremum eius X distabit a basi BR recta maiore quam quae assignari possit, spatiumque $AUWXR$ erit asymptotum longitudinis infinitae, sed finitae magnitudinis, cum non nisi segmento $AFCA$ duplicato aequetur.

Quodsi curva AFG sit arcus circuli, et AFC arcus quadrantis; manifestum est spatium $AUWXSB$ aequari sectori $AFGB$ duplicato: et si R ipsi C respondeat, seu si recta RX sit infinita, spatium $AUWXCB$ quanquam infinite longum aequabitur semicirculo. Et hanc quidem appellare soleo f i g u r a m a n g u l o r u m , item h y p e r b o l a m f a l s a m , quemadmodum enim portiones spatii asymptoti hyperbolici sunt ut logarithmi, ut ex praeclaro P. Gregorii a S. Vincentio theoremate primus P. Sarrasa deduxit; ita portiones spatii asymptoti huius figurae sunt ut arcus sive anguli, ductisque rectis parallelis, eadem proportione secantur; posito enim rectam QF vel RG esse magnitudinis cuiusdam assignabilis, erit ut arcus circuli AF ad arcum AG, vel angulus ABF ad angulum ABC. ita spatium $BAUW\alpha$ ad spatium $BAUXS$.

Hyperbolen autem falsam cur vocem manifestum est, quia eaedem secantes, ut BH. vel BK, quae altitudini AB in punctis ut D. E. ad perpendiculum ordinatim applicatae hyperbolen formant, punctis baseos BC. ut α. vel S. impositae dant quam dixi figuram angulorum.

Eodem modo data qualibet curva inveniri potest figura quae eadem cum curva ratione secetur.

P r o p. 3. P r o b l e m a

„ Parabolam et paraboloeides in universum omnes et figuram quamlibet quadrare, in
„ qua p r o d u c t a ad a b s c i s s a m habet eandem semper rationem certam atque
„ constantem.

In eadem f i g. 1. esto curva AFC parabolae, aut paraboloeidis, aut alterius cuiusdam figurae, in qua productae sunt abscissis proportionales, seu in qua AT est ad AO,

---

15 deduxit: A. A. de Sarasa, *Solutio problematis*, 1649, S. 5–17.

ut AK ad AD. Nam in parabola quidem communi productae sunt abscissis aequales; in caeteris, proportionales. Et placet tabulam aequationum, quibus natura paraboloeidum exprimitur, hoc loco exhibere, unde eadem opera ratio abscissarum ad productas in unaquaque apparet. Cumque harum figurarum aequationes, applicatarum ad abscissas relationem exhibentes, ingrediantur rectae quaedam constantes et invariatae, quas parametros aut latera recta appellare solent, eas appellemus (a). abscissas ut AO, vel AD, (x). applicatas ut OP, vel DF, (y). Tabula vero haec erit.

2 proportionales. *(1)* Quod ut appareat tabulam paraboloeidum, qualem iam dudum geometra nobilis Christianus Hugenius in suo de Horologiis oscillatoriis tractatu novissimo, posuit; placet huc transferre, et qua *(2)* Et L 6 (a). *(1)* distantiam puncti in curva assunti a vertice, seu *(2)* abscissas L

2 *Zur Variante:* Zunächst wollte Leibniz die Huygens'sche Tabelle der Paraboloide, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 88 (*HO* XVIII S. 237), heranziehen, hat dann aber gemerkt, dass diese hier nicht passt.

[*1. Fassung, gestr.*]

Tabula Paraboloeidum

$$\begin{array}{llcl}
 & \text{quadratica seu communis} & & ax \quad = y^2 \\[2ex]
 & \text{simplex} & & \left.\begin{array}{l} a^2x \\ \\ ax^2 \end{array}\right\} = y^3 \\
\text{cubica} & & & \\
 & \text{quadratiformis} & & \\[2ex]
\text{(seu } ax = y^2) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & * & \left.\begin{array}{l} a^3x \\ a^2x^2 \\ ax^3 \end{array}\right\} = y^4 \\[2ex]
 & & & \left.\begin{array}{l} a^4x \\ a^3x^2 \\ \\ a^2x^3 \\ ax^4 \end{array}\right\} = y^5 \\[2ex]
\begin{array}{l} \\ \text{(seu } a^2x = y^3) \\ \text{(seu } ax \;\; = y^2) \\ \text{(seu } ax^2 \; = y^3) \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ * \\ * \\ * \\ \\ \end{array} & \left.\begin{array}{l} a^5x \\ a^4x^2 \\ a^3x^3 \\ a^2x^4 \\ ax^5 \end{array}\right\} = y^6 \\[2ex]
 & & & \text{etc.} \\
 & & & \text{etc.}
\end{array}$$

Unde nonnulla satis notatu digna primo aspectu apparent, primum, parabolarum quadraticarum esse speciem unam, cubicarum duas, quadrato-quadraticarum tres u n a d e m t a (quae stella notata est), surdesolidarum quatuor, cubico-cubicarum quinque u n a rursus, stellata, d e m t a . Sive, quadraticarum esse speciem unam, cubicarum et

2 *Zur Tabelle:* ∗ *nebst zugehörigen Klammereinschüben erg. L* 24 (quae stella notata est) *erg. L* 25 u n a | rursus, stellata, demta *erg., ändert Hrsg.* | d e m t a *L*

quadrato-quadraticarum duas; surdesolidarum et cubico-cubicarum tres; atque ita porro, regula generali, ut tot sint species paraboloeidum dimensionis cuiusdam propositae, exponentem habentis numerum imparem vel parem, quot sunt unitates in exponente pari, proxime minori. Cur autem ab iis dimensionibus quae exponentes habent pares, una species stellata adimatur manifestum est; quoniam stellata per extractionem radicis ad dimensionis cuiusdam inferioris speciem iam ante nominatam nimirum ad primam reduci potest. Ita ex aequatione $* \, a^2x^2 = y^4$. per extractionem radicis quadratae fit, $ax = y^2$, et ex $* \, a^3x^3 = y^6$. fit per extractionem radicis cubicae aequatio eadem quae ante $ax = y^2$. Sed haec impraesentiarum persequi nihil attinet.

Illud tantum quod ad nostrum institutum facit, cuiusque causa tabulam attuli nunc exponendum est, nimirum methodum tangentium, ad has curvas ducendarum, a geometris praestantibus hanc esse, dudum proditam, ut sicuti est exponens potestatis x abscissae, ad exponentem potestatis y applicatae, ita sit ipsa x abscissa, ut in figura nostra recta AD, ad rectam DK, ex abscissa AD, et producta ad tangentem usque, recta scilicet AK, compositam.

Hinc iam illud apparet infinitas esse alias figuras, quae eadem problematis nostri methodo quadrari possint, quanquam tabula paraboloeidum utcunque continuata non contineantur, ut si recta DK, sit ad abscissam AD, ut numerus surdus ad integrum, vel ut integer ad surdum, vel ut surdus ad surdum; neque enim potestates enuntiari possunt, quarum exponentes sint numeri surdi, v. g. $y^{Rq6} = ax^{Rq6-1}$. nisi quis forte methodum in veniat, tollendi irrationalitatem, quod fieret ducendo ipsum ax^{Rq6-1} toties in se, quot in *Rq* 6 sunt unitates, fieret y^6. sed altera aequationis pars non ideo statim ab aequatione *(!)* liberata foret cum fiat $y^6 = a^{Rq6}\, x^{6-Rq6}$. Quare huius generis figuras paraboloeidum more, hac quidem methodo enuntiare difficillimum fuerit. Forte putet aliquis methodo

4 minori *(1)* : et tot sint species paraboloeidum dimensionis cuiusdam exponentem habentis numerum parem, quot sunt exponentes dimensionis proxime inferioris, *(2)* . Cur *L* 6 nimirum ad primam *erg. L* 24 fuerit *(1)* , sed ut enuntiari tamen geometrico more possint; adhibenda est methodus a me alibi tradita de inveniendis applicatis ex datis productis. Quae si succedit hoc loco, nobisque aequationem geometrice enuntiatam praebet, eum inde ducemus fructum sane ingentem, ut et inexpectatum, ut enuntiationes huiusmodi plane irregulares et intractabiles, reducamus ad formulas usitatas; quemadmodum, si exponentes sint numeri fracti, facilis reductio est, ponamus enim aequationem hanc esse: $\mathrm{ax}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{y}^{\frac{2}{2}}$, ea ad hanc aequationem revocari posset: $\mathrm{ax} = \mathrm{y}^2$, *(a)* si modo regula illa de ration *(b)* quoniam exponens x. ad exponentem y. est ut 1. ad 2. Meminisse tamen debemus eandem plane rationem abscissarum ad applicatas in diversis generibus figurarum paraboloeidum *(2)* . Forte *L*
24–626,1 methodo | quadam certa *gestr.* | quam *L*

quam alibi explicui, ex datis productis, quaerendi applicatas, eiusmodi aequationes irregulares ad communes formulas reduci posse. Sed considerandum est iisdem licet positis productis, diversas esse posse applicatas, nec proinde problema satis esse determinatum, nam in duabus paraboloeidibus quarum una aequationem habet $a^2x = y^3$, altera aequationem [*bricht ab*]

[*2. Fassung, gültig*]

[*Tabelle, s. S. 628 und S. 629*]

Ubi nonnulla, notatu satis digna, primo aspectu apparent. Ac primum, parabolarum quadraticarum f o r e speciem unam, cubicarum duas, quadrato-quadraticarum tres, surdesolidarum quatuor, cubico-cubicarum quinque; f o r e , inquam, nisi eae species stella notatae adimendae essent, in quibus aequationes deprimi possunt, quod fit quando potestatum omnium aequationem ingredientium exponentes habent unum divisorem communem,

$$\begin{array}{lllll} \text{ita} & a^2x^2 = y^4 & a^4x^2 = y^6 & a^3x^3 = y^6 & a^2x^4 = y^6 \\ \text{dat} & ax \quad = y^2 & a^2x \quad = y^3 & ax \quad = y^2 & ax^2 \quad = y^3. \end{array}$$

Unde fit, ut quotiescunque exponens potestatis x habet divisorem communem cum exponente potestatis y. Idem divisor etiam exponenti potestatis a applicari possit, quia exponentes potestatum a et x iuncti faciunt exponentem potestatis y. Quare ut abscissa ad applicatam datam quandam habeat rationem certam atque constantem, non nisi in una figurae paraboloeidis specie contingere potest, et si quidem in alia contingere posse videtur, ea ad priorem reduci potest.

---

7 *Zur 2. Spalte der Tabelle:* $\dfrac{1}{\beta}$ ratio productae ut AK ad abscissam ut AD, ut est exponens potestatis (a) ad exponentem potestatis (x).
Zur 4. Spalte der Tabelle: Valor trili⟨nei⟩ parabo⟨lici⟩ $AFGR$, portione ⟨rectanguli⟩ circumscripti $E\langle R$ aliquota,⟩ $ER = b^2$; expressus.

---

1 alibi explicui: vgl. dazu N. 18. Leibniz spielt darauf noch einmal S. 630 Z. 8 an. 22–25 Zu den Ergänzungen zu Spalte 2 und 4 s. u. S. 630 Z. 18–22 sowie S. 631 Z. 8–11.

Quibus intellectis exponamus regulam, cuius causa tabulam attulimus, quae haec est, ex methodo tangentium ad huius generis curvas ducendarum, a praestantissimis geometris dudum prodita:
ut sicuti est exponens potestatis ipsius a. lateris recti, ad exponentem potestatis ipsius x. abscissae AD, ita sit producta AK ad ipsam x. seu abscissam AD.
Nec quisquam metuat, ne forte eadem exponentium y et x ratio in diversae speciei curvis obtingat, v. g. in aequatione $a^2x^2 = y^4$, et $ax = y^2$, quia, ut dixi, aequatio illa ad hanc reduci potest.

Hinc iam illud apparet, infinitas esse alias figuras, quae eadem problematis nostri methodo quadrari possint, quanquam tabula paraboloeidum utcunque continuata non contineantur, ut si producta AK sit ad abscissam AD, ut numerus integer ad surdum, vel ut surdus ad integrum, vel ut surdus ad surdum. Nam si ponatur AK ad AD, exempli gratia, ut 1. ad Rq 6. $-$ 1. figura paraboloeidum more ex regulae allatae praeceptis tractata daret hanc aequationem: $y^{Rq\ 6} = ax^{\overline{Rq\ 6}\ -1}$. ubi y et x ad dimensiones quasdam imaginarias, quales inter quadratum et cubum, cubum et quadrato-quadratum, aliasque potestates mediae fingi possunt, ascendunt. Quas vero formulas ad communem enuntiandi rationem revocare, non adeo expeditum opinor futurum est.

Annotabit forte aliquis numeros fractos surdorum loco adhibitos eandem facturos difficultatem, ut si aequatio sit $ax^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{3}{2}}$. ascendi ad imaginarios. Sed sciendum est $x^{\frac{1}{2}}$ idem esse, quod $\dfrac{x}{2}$. et $y^{\frac{3}{2}}$ idem esse $\dfrac{y^2}{2}$. ac proinde hanc formulam ad communem illam $ax = y^2$. reduci. Idemque apparet ex ratione productae AK ad abscissam AD, quae si intelligatur esse ut numeri integri ad fractum, aut fracti ad integrum, aut fracti ad frac-

4 exponens *(1)* potestatis (y) | applicatae DF. *erg.* | ad exponentem potestatis (x) | abscissae AD. *erg.* |, ita sit *(a)* composita ex abscissa *(b)* in figura nostra prima recta KD (composita ex *(aa)* abscissa DA, et *(bb)* producta KA, et abscissa AD) *(2)* potestatis *L* 12 surdum *(1)* ; neque enim potestates enuntiari possunt, quarum exponentes sint numeri surdi, ut exempli gratia: $\mathrm{y}^{\mathrm{Rq}\ 6} = \mathrm{ax}^{\overline{\mathrm{Rq}\ 6}-1}$. Quomodo enim y. toties in seipsum duci intelligemus, quot sunt in Rq 6. unitates, cum Rq 6. non sit unitati commensurabilis? *(a)* Sane nisi sit aliqua reducendi ratio *(b)* Sane figuras talium aequationum geometrice describere difficillimum arbitror, nisi aliqua reductio adhibeatur. *(c)* Quae sane ex communibus algebrae legibus *(aa)* difficillima futu *(bb)* quam *(2)* . Nam *L* 17 opinor *erg.* *L*

18–630,2 Leibniz greift auf die Bezeichnungsweise von N. 38 zurück, aber auch hier leidet die Betrachtung unter Unzulänglichkeiten in der Rechnung.

Tabula

	Aequationes				
	$y^2 =$	$a\ x$		$\frac{1}{1}$	
	$y^3 =$	$a\ x^2$		$\frac{1}{2}$	
		a^2x		$\frac{2}{1}$	
	$y^4 =$	$a\ x^3$		$\frac{1}{3}$	
(seu $ax = y^2$)		a^2x^2	$*$	$\frac{2}{2} = 1$	
		a^3x		$\frac{3}{1}$	
	$y^5 =$	$a\ x^4$		$\frac{1}{4}$	
		a^2x^3		$\frac{2}{3}$	
		a^3x^2		$\frac{3}{2}$	
		a^4x		$\frac{4}{1}$	
	$y^6 =$	$a\ x^5$		$\frac{1}{5}$	
(seu $ax^2 = y^3$)		a^2x^4	$*$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	
(seu $ax = y^2$)		a^3x^3	$*$	$\frac{3}{3} = 1$	
(seu $a^2x = y^3$)		a^4x^2	$*$	$\frac{4}{2} = 2$	
		a^5x		$\frac{5}{1}$	
				etc.	
				etc.	

Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 4

Paraboloeidum

<u>Nomenclatura</u>

quadratica	seu communis	$\left(\frac{2b^2}{6}\right)$	$\frac{b^2}{3}$					
cubica	quadratiformis			$\frac{2b^2}{5}$				
	simplex	$\left(\frac{2b^2}{8}\right)$	$\frac{b^2}{4}$		$\left(\frac{1}{4}b^2\right)$			
quadrato–quadratica	cubiformis			$\frac{3b^2}{7}$				
	quadratiformis				$\frac{2b^2}{6}$ $\left(\frac{1}{3}b^2\right)$			
	simplex	$\left(\frac{2b^2}{10}\right)$	$\frac{b^2}{5}$			$\left(\frac{1}{5}b^2\right)$		
surdesolida	$\square^{to}$ $\square^{ti}$ formis			$\frac{4b^2}{9}$				
	cubiformis				$\frac{3b^2}{8}$			
	quadratiformis					$\frac{2b^2}{7}$		
	simplex	$\left(\frac{2b^2}{12}\right)$	$\frac{b^2}{6}$				$\left(\frac{1}{6}b^2\right)$	
quadrato–cubica	quadrato–cubiformis			$\frac{5b^2}{11}$				
	quad. quadratiformis				$\frac{4b^2}{10}$ $\left(\frac{2b^2}{5}\right)$			
	cubiformis					$\frac{3b^2}{9}$ $\left(\frac{1}{3}b^2\right)$.		
	quadratiformis						$\frac{2b^2}{8}$ $\left(\frac{1}{4}b^2\right)$	
	simplex		$\frac{b^2}{7}$					$\left(\frac{1}{7}b^2\right)$

15 *(1)* cubico- *(2)* quadrato-cubica *L*

tum, semper revocari potest ad rationem integri ad integrum; ut si AK ad AD sit, ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{1}{6}$. perinde est ac si diceretur esse ut 18 ad 4.

At si ratio sit ut Rq 6. ad 1. utique aequatio ad paraboloeidum formulam concepta eam, quam dixi, irregularitatem, nunquam exuet: neque enim nisi unquam surdus ad numerum erit ut numerus ad numerum.

Ut vero figura tali aequatione formata quam geometricam esse negari non potest, cum tangentes eius duci possint, communi more enuntiabilis, ac continuo quodam motu descriptibilis reddatur, adhibenda est methodus a me inventa, et alibi tradita, inveniendi applicatas ex datis productis.

Posito regulam, de eadem in talibus aequationibus ac figuris ratione linearum AK ad AD, quae est exponentium a et x esse adeo universalem, ut obtineat tunc quoque, cum ratio linearum surda est. Quod nunc excutere non vacat.

Ita enim ex ea methodo praeter alios ingentes, hunc quoque fructum capiemus, ut aequationes eiusmodi plane irregulares et intractabiles ad formulas usitatas reducantur, quod nescio an ulla algebrae arte fieri semper possit.

Et fortasse maior inde lux ad surdas tractandas, quae hactenus leges a nobis recusant, oriri potest.

Ut autem figurarum eiusmodi omnium quadrandarum rationem universaliter demonstremus, rationem illam constantem abscissae AD ad productam AK appellemus β. ita ut producta multiplicata per β det abscissam, et abscissa divisa per β productam. Aream trilinei concavi $AFGR$. quod figurae datae $AFGE$ supplemento est ad rectangulum ER. appellemus z^2. et rectangulum ER vocemus b^2. Constat autem hoc trilineum concavum esse summam omnium abscissarum ad AR perpendiculariter ordinatimque applicatarum: AO translata in ZP. et AD in QF. et AE in RG. etc. Quod si iam abscissae sunt productis proportionales, sive si abscissae ad productas respondentes, eandem semper habent rationem [quae β ad 1], etiam summa abscissarum $AUWXR$, vel per p r o p. 2. segmentum duplicatum [$AFGA$]. erit ut [β ad 1]. Ergo[:]

13–15 *Daneben großes* NB.

6 f. quam geometricam ... communi more *erg. L* 10 in ... figuris *erg. L* 12 Quod ... vacat. *erg. L* 26 rationem *(1)* β *(2)* quae 1 ad β *L ändert Hrsg.* 27+631,3 AFGθA *L ändert Hrsg. zweimal* 27 1 ad β *L ändert Hrsg.*

$2z^2$ (trilineum concavum $A\theta GE$ + trilineum concavum simile et aequale $AFGR$) $+\dfrac{z^2}{\beta}$ (segmentum duplicatum $[AFGA]$) $= b^2$ (rectangulo ER. quia duplex trilineum concavum cum duplici segmento totum rectangulum ER complent). Ergo

$$z^2 = \frac{b^2}{2+\dfrac{1}{\beta}}.\quad \text{Q. E. F.}$$

Hoc est[:]

Rectanguli (ER) pars aliquota, a numero ex binarii et alterius numeri $\dfrac{1}{\beta}$ rationem productae ad 1. abscissam exprimentis additione orto, denominata trilineo figurae concavo ($AFGR$) aequatur.

Exemplo veritas regulae statim confirmatur. Si curva sit parabolae communis, erit $\beta = 1$. ergo $z^2 = \dfrac{b^2}{2+1=3}$.

T a b u l a vero qua V a l o r e s t r i l i n e o r u m continentur secundum hanc regulam supputata, mirabiles detegit rerum naturae harmonias, quae profunda potius meditatione sentiuntur, quam paucis verbis satis libantur. Introducam tamen, atque aditum menti his dapibus inescatae dabo.

Ac primum illud animadverto, si ut solent facere primum aequationes stellatas, quae in alias dudum positas reducebantur, eliminassem; deinde recto ordine valores sibi invicem subrogassem, nullis velut gradibus atque generibus constitutis; pro pulchra quadam serie, harmoniae plena, rude nescio quid atque indigestum reportassem, in quo nec suspicio concinnitatis restaret.

Deinde illud consideratione dignum arbitror, esse in quolibet parabolarum gradu, velut inter ipsas cubicas aequationis y^3, aut quadrato-quadraticas aequationis y^4, alias aliis simpliciores. Atque eas nimirum, in quibus abscissa nulla potestate affecta est, ut

6 f. Q. E. F. *(1)* Hoc est: binario numeri rationem abscissae ad productam exprimentis (integri vel fracti, rationalis vel surdi) accessione aucto, | rectanguli ER *erg. u. gestr.* | pars aliquota secundum numerum productum rectanguli ER est *(2)* Hoc *L*

$ax = y^2$, vel $a^2x = y^3$, vel $a^3x = y^4$, vel $a^4x = y^5$, vel $a^5x = y^6$, etc. esse caeteris simpliciores, unde et trilineorum valores simplicissime exprimuntur, sunt enim tertia, quarta, quinta, sexta, septima portio rectangulorum. Atque huius generis paraboloeides propemodum solae vulgo considerantur. Certe non nisi istarum quadraturas ab aliis demonstratas legi. Caeteras uspiam exstare aut demonstratas, aut saltem indicatas, non memini.

Has vero simpliciores ita communiter explicare solent[:] Parabolae quadraticae, applicatas ad axem seu basi parallelas, esse in subduplicata ratione altitudinum, cubicae (simplici scilicet, sed quae vulgo sola nominatur) in subtriplicata, quadrato-quadraticae in subquadruplicata, et ita porro. Contra sumto trilineo, et in eo applicatis ad basin seu axi parallelis; quadraticae applicatas esse in duplicata, cubicae in triplicata, quadrato-quadraticae in quadruplicata ratione altitudinum.

Subtilissimus Wallisius vocat elementa huiusmodi in trilineo seu ordinatim ad altitudinem uniformiter crescentem applicatas axi parallelas: primanos, secundanos, tertianos, quartanos; vel in ipsa parabola, axi applicatas: subprimanos, subsecundanos, etc. Quemadmodum in hyperbola et hyperboloeidibus, primanorum, secundanorumve, vel subprimanorum, subsecundanorum reciprocos.

Atque ita factum est, ut de simplicium tantum paraboloeidum quadratura cogitaretur, praesertim cum illi omnes, qui hactenus seriebus numerorum respondentibus in unam summam colligendis operam dedere, quos inter novissimus pene ac subtilissimus omnium *Trianguli arithmetici* autor Pascalius eminet, non nisi numerorum quos vocant triangularium, pyramidalium, etc., itemque quadratorum, cuborum, altiorumque potestatum summam collegerint.

At vero ad summam seriei eiusmodi ineundam sive finitam sive infinitam:

$$1 \quad Rq\ 8. \quad Rq\ 27. \quad \underset{=8}{Rq\ 64.} \quad Rq\ 125. \quad Rq\ 216.$$

qua radices quadratae numerorum cubicorum exhibentur, aut ad habendam summam seriei talis:

$$1 \quad Rcub.\ 4. \quad Rc.\ 9. \quad Rc.\ 16. \quad Rc.\ 25. \quad Rc.\ 36.$$

4–6 Certe ... non memini: Zur Problematik der Quadratur der höheren Parabeln und Hyperbeln vgl. Hofmann, *Leibniz in Paris*, 1974, S. 55–57. 13 Wallisius vocat: *Mechanica*, 1672, S. 144 f. (*WO* I, S. 665 f.), bzw. *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 35 u. 54 (*WO* I, S. 384 u. 390).

ex radicibus cubicis numerorum quadratorum, nemo unquam vel aspiravit. Quarum utraque ex quadratura paraboloeidis cubicae compositae seu quadratiformis (nam ex parabolis cubicis non nisi una composita est) manifeste pendet; cuius scilicet aequatio est $ax^2 = y^3$.

Unde aequatio duplex; una:

$x = \sqrt{_q}\ \dfrac{y^3}{a} = \dfrac{\sqrt{_q}\ y^3}{\sqrt{_q}\ a}$, unde posito $y = 1.$ vel $2.$ vel $3.$ etc. et $a = 1.$ fiet:

Rq 1. *Rq* 8. *Rq* 27. etc.

altera aequatio:

$y = \sqrt{_c}\ ax^2$, unde posito $x = 1.$ vel $2.$ vel $3.$ et $a = 1.$ fiet:

Rc. 1. *Rc.* 4. *Rc.* 9.

Ita inter parabolas quadrato-quadraticas, una est cubiformis $ax^3 = y^4$, qua radices cubicae numerorum quadrato-quadratorum; vel quadrato-quadraticae numerorum cubicorum in summam colligi possunt, alia est quadratiformis $a^2x^2 = y^2$, quae coincidit parabolae quadraticae; tertia est simplex, qua summa numerorum quadrato-quadraticorum, vel radicum quadrato-quadraticarum ex numeris naturalibus initur, $a^3x = y^4$.

Quod si caeteras quoque paraboloeides prout cuiusque nomenclatura in tabula est, prosequamur, apparebit nihil huius generis nos effugere posse, qualia certe nemo ab algebra aut simplici arithmetica infinitorum, a geometria separata, speraverit. Et vero cum haec methodus etiam ad finitas series in summam colligendas serviat, poterit eius usus esse ingens in reducendis aequationibus. Saepe enim duae pluresve radices surdae addi poterunt in unam summam aut sibi subtrahi; cum hactenus non nisi dicis causa signa $+$ vel $-$ interposita sint, idque illi si Diis placet additionem subtractionemque vocant. Exempli causa ostendi potest $Rq\ a^2 + Rq\ 2a^2 = \dfrac{4}{3} Rq\ 2a^2$. Ita $Rc\ 9a^3 + Rc\ 16a^3$. in unam quantitatem colligi potest. Quod si termini affecti non sint iidem, ut $Rq\ a^2 + Rq\ 2b^2$, ratioque eorum nota sit, ea ascribatur, ut si b sit $= 3a$. fiet: $Rq\ a^2 + Rq\ 18a^2$. Et haec

10 f. Rc. 9. *(1)* Aliae series | huiusmodi *erg.* | infinitae eadem methodo in summam colligi possunt; quod al *(2)* Ita *L* 20 in *(1)* poliendis *(2)* reducendis *L* 24 f. potest. *(1)* Idemque verum est, si *(2)* | Quod si *(a)* terminorum alio *(b)* termini ... + Rq $2b^2$, *(aa)* vel ne *(bb)* imo si alter sit cognitus *(cc)* ratioque ... + Rq $18a^2$. *erg.* | Et *L*

23 ostendi potest: Diese Aussage trifft nicht zu.

quidem facile fieri possunt, modo termini addendi sint continui alicuius seriei potestatum, id est numerorum naturalium, quadraticorum, cubicorum; nec refert cuius radicis extractio postuletur; nam datis terminis continuis numerorum v. g. cubicorum, summa radicum, sive quadratarum, sive cubicarum, sive quadrato-quadraticarum, sive aliarum, quarumcunque ex illis extractarum in infinitum, iniri potest: modo scilicet eiusdem simul dimensionis radix ex omnibus extrahatur, nam colligere velle $Rq\ 2 + Rc\ 3$. id hac quidem methodo fieri non potest. Sed nec subtractio radicum promovetur, v. g. $Rq\ 3 - Rq\ 2$. saepe tamen per transpositionem subtractio in additionem mutari potest in aequationibus.

Quod si termini continui non sint, cogitandum est an continuorum ritu tractari possint arte quadam, v. g. $Rq\ a^2 + Rq\ 3a^2$. Sane fingi potest 1. 3. esse terminos progressionis arithmeticae continuae, cuius intervallum 2. substitui possit in locum 1. salvo alioquin calculo.

Sed haec cum sint momenti sane maximi alias accuratius excutiemus. Quemadmodum illud quoque an non et radices quadraticae, cubicaeve, numerorum triangularium aliorumve, ut pyramidalium, etc. hac methodo iniri possint. Nunc vero possumus tot serierum summa tot figurarum quadratura nove detecta contenti esse.

Caeterum praetereo tot alias quadraturarum nostrarum harmonias, quas attenta tabulae consideratione detegere quivis potest.

At nunc quidem abibo hinc, ubi id unum admonuero, si productae abscissis sint proportionales figuram productarum $AUWXR$ fore figurae abscissarum $AFGR$ homogeneam, ac proinde si AFG sit curva cuiusdam paraboloeidis, curvam $AUWX$ eiusdem specie, quanquam alterius magnitudine (latere quippe recto, mutato) paraboloeidis fore.

P r o p. 4. P r o b l e m a

„ Centrum gravitatis omnium paraboloeidum, et quod hinc sequitur solidorum ab illis
„ revolutione circa axem quemcunque genitorum dimensiones invenire; quadratorum-
„ que, et cuborum, et quarumlibet ab applicatis potestatum summam inire.

Constat invento centro gravitatis, areaque figurae, momentum eius ex axe quocunque, sive solidum circa axem illum genitum haberi. Cumque areas omnium paraboloeidum habeamus restat ut centra gravitatis quaeramus.

Centrum gravitatis datur, dato momento figurae quadrabilis ut $AFGE$, vel $AFGR$. tum ex altitudine AE, tum basi (eiusve opposita) AR. Hoc enim momento per figurae

26 applicatis | cuiuslibet *streicht Hrsg.* | potestatum *L*

magnitudinem diviso, distantia centri, ab axe librationis habetur, habitis autem distantiis eiusmodi duabus centrum habetur.

Momentum figurae ex quodam axe librationis aequatur summae semiquadratorum, quorum latera sunt perpendiculariter figurae. Ita summa semiquadratorum

$$\frac{OP^2}{2}+\frac{DF^2}{2}+\frac{EG^2}{2}\ \text{etc.}\ \ \text{seu omnium } y$$

aequatur momento figurae convexae $AFGE$ ex axe librationis AE.
Eodem modo summa semiquadratorum

$$\left[\frac{RG^2}{2}+\frac{QF^2}{2}+\frac{ZP^2}{2}\right]\ \text{etc. seu omnium } x$$

aequatur momento figurae concavae $AFGR$ ex opposita basi AR.
Dato autem momento figurae concavae $AFGR$ ex AR. etiam momentum convexae $AFGE$. ex eadem AR datur; datur enim dudum momentum rectanguli ER, ex recta AR, a quo si momentum cognitum trilinei concavi detrahatur, restabit utique momentum convexi residui.

Aio nunc in omni paraboloeide summam pariter omnium x^2, et omnium y^2 iniri posse. Ac primum y semper est radix, sive quadrata, sive cubica, sive altior quaecunque quam vocabo: $R\beta$. alterius partis aequationis, in qua exponens potestatis ipsius a quicunque γ. et ipsius x quicunque δ. eritque $\gamma+\delta=\beta$. et aequatio figurae haec:

$$y=R\beta\ a^{\gamma}x^{\delta}.\ \ \text{et}\ \ y^2=R\beta\ a^{2\gamma}x^{2\delta}.$$

Aio horum: $R\beta\ a^{2\gamma}x^{2\delta}$ summam iniri posse.

Quaeratur aequatio naturam huius figurae solidae exprimens. Quaeratur paraboloeis cuius eadem aequatio est, qualis deesse non potest; ea quanquam plana figurae huic solidae, homogenea est, ac proinde eam habebit rationem figura solida ad prisma eiusdem cum figura solida altitudinis et basis (quod prisma quadrabile est, cum eius

8 $\frac{RX^2}{2}+\frac{QW^2}{2}+\frac{ZU^2}{2}$ *L ändert Hrsg.* 18 $y^2=$ *(1)* $R\beta a^{\gamma^2}x^{\delta^2}$. Aio horum: $R\beta a^{\gamma^2}x^{\delta^2}$ summam iniri posse. Nam $R\beta x^{\delta^2}$ semper haberi potest, qualiscunque sit exponens β aut δ. ut ex *(a)* figura *(b)* problemate praecedente constat, ut ponamus β esse *(aa)* 5. et δ^2 esse 4. erit $R\beta x^{\delta^2}$ radix surdesolida *(bb)* 6. et δ^2 esse 4. erit $R\beta x^{\delta^2}$ radix cubico-cubica ex termino quadrato-quadratico, qualium summa iniri potest | ope parabolae cubico-cubicae quadrato-quadratiformis *erg.* |, productum per $R\beta a^{\gamma^2}$, quae semper eadem est multiplicetur. Intelligatur figura plana, huic solidae homogenea, in qua sit $y^2=a^{\gamma^2}x^{\delta^2}$ *(2)* $R\beta a^{2\gamma}x^{2\delta}$ *L* 20 exprimens *(1)* ; nimirum ablegata irrationalitate, omnibusque toties in se ductis, quot in β sunt unitates, fiet aequatio $y^{2\beta}=a^{2\gamma}x^{2\delta}$. *(2)* . Quaeratur *L*

basis, quadratum scilicet maximae y nota sit) quam habet paraboloeis homogenea ad rectangulum eiusdem cum ipsa altitudinis basisque. Habebitur ergo figura haec solida sive quadratorum summa.

Eodem plane modo summa omnium x^2 inibitur, aequatione enim posita

$$y^\beta = a^\gamma x^\delta, \text{ fiet } x = R\delta\, \frac{y^\beta}{a^\gamma} \text{ et } x^2 = R\delta\, \frac{y^2\beta}{a^2\gamma}.$$

Inde aequatio paraboloeidis homogeneae investigetur cuius paraboloeis summae omnium x^2 homogenea est.

Exemplo res fiet manifestior. Esto paraboloeis cubica quadratiformis aequationis

$$ax^2 = y^3. \text{ Ergo } y = Rc\, ax^2. \text{ et } y^2 = Rc\, a^2x^4,$$

patet $y^6 = a^2x^4$. Sed quia applicata hoc loco non est y sed y^2, ideo si fingatur esse y, fiet $y^3 = a^2x^4$, reformanda in istam $y^3 = \dfrac{x^4}{a}$, vel $y^3a = x^4$, quae figura plana seu paraboloeis quadrato-quadratica cubiformis, figurae omnium y^2, paraboloeidis datae, homogenea est, sunt enim cubi applicatarum y^2 in solida, y in plana, ut quadrato-quadrata abscissarum x.

Eritque summa omnium y^2, seu applicatarum in figura $AFGE$, usque ad maximam $EG_{[,]} = \dfrac{2EG^3}{7}$, quae dimidiata divisa per aream ipsius paraboloeidis datae $\dfrac{3EG^2}{5}$ dabit $\dfrac{5}{21}EG$, distantiam centri gravitatis paraboloeidis cubicae quadratiformis ab axe AE.

Vicissim si summa omnium x^2 in eadem paraboloeide, vel potius trilineo eius concavo ineunda sit, cum sit $y^3 = ax^2$, erit $x^2 = \dfrac{y^3}{a}$. cuius quidem facile est aliunde inire summam, cum summa omnium y^3, quae haberi potest, per a dividenda sit. Sed ut methodo tamen

9 f. Rc a^{2}x^4, *(1)* unde aequatio: y^6 = a^{2}x^4. reducibilis ad | priorem *erg.* | y^3 = ax^2. Est ergo momentum eius | paraboloeidis *erg. u. gestr.* | seu solidum revolutione circa axem AB. genitum, ipsi figurae hoc loco proportionale, quod alioquin *(a)* non nisi *(b)* et in figura logarithmorum observavi. In eadem paraboloeide x = Rq $\dfrac{y^3}{a}$. Ergo x^2 = $\dfrac{y^3}{a}$. Unde aequatio ax^2 *(2)* patet *L* 21 , cum summa . . . sit *erg. L*

15 summa omnium y^2: genauer müsste es $\frac{3}{7}\, AE \cdot EG^2$ heißen. Leibiz rechnet mit dem unrichtigen Ergebnis bis S. 637 Z. 10 weiter.

nostrae insistamus, substituta x pro x^2, fiet $x = \frac{y^3}{a}$, et correcta aequatione $xa = \frac{y^3}{a}$, vel $xa^2 = y^3$. Ergo figura plana, solidae omnium x^2 homogenea est parabola cubica simplex, quae cum sit quarta pars sui rectanguli, etiam figura solida omnium x^2, sui parallelepipedi quarta pars erit. Id vero verissimum esse iam tum manifestum est, cum sit $x^2 = \frac{y^3}{a}$. et maximum horum quadratorum $AE^2 = RG^2 = \frac{EG^3}{a} = \frac{AR^3}{a}$. Iam summa omnium y^3, $= \frac{\text{maximum } y^4}{4}$ seu $\frac{EG^4}{4}$. Ergo summa omnium x^2 erit $\frac{EG^4}{4a}$. eorumque dimidium seu momentum omnium x, ex AR, erit $\frac{EG^4}{8a}$. subtractum a momento totius rectanguli ER, $\frac{AE^2 \frown AR}{2}$ relinquet $\frac{AE^2 \frown EG}{2} - \frac{EG^4}{8a}$, momentum figurae convexae $AFGE$, quod per aream eius $\frac{3EG^2}{5}$ divisum, dabit $\frac{5\ AE^2}{6\ EG} - \frac{5\ EG^2}{24a}$ distantiam centri gravitatis figurae $AFGE$, ab AR.

Atque haec quidem methodus centra inquirendi generalis est, et in omnibus paraboloeidibus successura, aliae sunt particulares; cum y in x. vel x in y. cum fructu duci potest, ut in paraboloeide cubica simplici, $a^2x = y^3$, et ideo $x = \frac{y^3}{a}$, erit $xy = \frac{y^4}{a^2}$, id est cylinder trilinei paraboloeidis quadrato-quadratici simplicis, cuius aequatio est $xa^3 = y^4$. Item cum ob aequationem $a^2x = y^3$ sit $y = Rc\ a^2x$, erit $yx = Rc\ a^2x^4$, sed hic manifestum est, non ita facilem exitum esse, nisi methodo a me exposita ad figuras planas homogeneas solidae reducantur.

Operae pretium autem foret, calculum centrorum in his figuris prosequi tabulaque exponere, spes enim est, si recte distinguatur, harmonias quasdam non inelegantes, quales ipse figurarum valor dedit, quaeque pulcherrimae certe sunt, calculi confirmationes, non defore; sed ista nunc prosequi non vacat. Attamen observationes aliquot principales omittere non possum, nimirum:

Momentum omnium x ex vertice, seu xy figurae paraboloeidis simplicis cuiuscunque esse cylindrum trilinei paraboloeidis simplicis proxime altioris. Ita momentum trilinei concavi

3 sui | parallelepipedi *streicht Hrsg.* | rectanguli *L* 21 vacat. *(1)* Lubet tamen spatium relinquere, ut si *(a)* quando otium *(b)* alias per otium attexi possint. Unam hoc loco tantum adicio observationem, *(2)* Attamen *L*

parabolae communis, esse cylindrum trilinei parabolae simplicis cubicae; et ostendimus paulo ante huius quoque trilinei momentum esse cylindrum trilinei parabolae simplicis quadrato-quadraticae; idemque de caeteris intelligendum.

Et huic observationi aliam non absimilem addo, omnes scilicet paraboloeides pene simplices, seu simplicibus proximas cuiuscunque gradus (quippe quas ingreditur x^2), habere momentum trilinei ex ipsa AR, basi paraboloeidis BC parallela, homogeneum trilineo figurae plane simplici gradus proxime sequentis, quoniam in talibus $x^2 = \frac{y^3}{a}$ vel $\frac{y^4}{a^2}$ vel $\frac{y^5}{a^3}$ vel $\frac{y^6}{a^4}$ etc. Sunt autem semiquadrata omnium x, seu omnia $\frac{x^2}{2}$ momento earum ex altitudine cui applicatae sunt AR aequalia, ut constat. Rectius dicam non tantum homogenea esse haec solida, illis planis, sed esse eorum cylindros, nam summa omnium $\frac{y^3}{a}$ est cylinder omnium $\frac{y^3}{a^2}$, seu summa omnium x^2, paraboloeidis pene simplicis, est summa omnium x, paraboloeidis plane simplicis, gradus proxime sequentis, ducta in a.

Sed haec cum sint specialia praelibare volui tantum. Ac nunc ad theoremata generalia obiter tradenda accedo.

Ac primum regula fieri potest, elegans admodum et universalis, pro summis omnium y^2 habendis, quae ita habet:

Data paraboloeide in qua summa omnium y^2 quaeritur. Ad habendam novam paraboloeidem summae omnium y^2 homogeneam, distinguendi sunt duo casus, nam, aut exponens ipsius x est maior, quam ipsius a, aut minor vel aequalis.

Si maior, tunc ita procedendum est:

Ipsius y potestati ascribatur exponens duplicatus potestatis ipsius x in aequatione paraboloeidis datae occurrens, et ipsius a potestati ascribatur exponens differentiae exponentium x et a, et habebitur aequatio paraboloeidis homogeneae solido cuius quadratura quaeritur.

Ita esto paraboloeis $ax^3 = y^4$, fiet: $y^6 = a^2x^4$ ac proinde paraboloeis cubico-cubica [quadrato]-quadratiformis erit figurae omnium y^2, paraboloeidis quadrato-quadraticae

14 f. Sed ... accedo. *erg. L* 18–21 Ad habendam ... procedendum est: *erg. L* 24 x et a | et quod tamen omitti quoque potest, uterque ducatur in exponentem ipsius y priorem *erg. u. gestr.* |, et *L* 27 quadrato- *erg. Hrsg.*

cubiformis homogenea. Ratio haec est, cum sit

$$ax^3 = y^4. \text{ erit } Rqq\; ax^3 = y. \quad \text{et} \quad Rqq\; a^2x^6 = y^2.$$

Hic habemus primum exponentem x duplicatum, nempe 6 ex 3, estque $Rqq\; a^2x^6$ planum seu secundae dimensionis, et summa omnium solidum. Cui solido, ut planum homogeneum habeatur, dividatur eousque per a. donec ista Rqq praesens in lineam transeat. Productum enim manebit homogeneum priori, quia a cum sit perpetuo eadem, non variat rationes. Dividenda est ergo quantitas a^2x^6 per a. dimidio exponentium numero affectum, seu per a^4. fiet $Rqq\; \frac{a^2x^6}{a^4}$. vel $Rqq\; \frac{x^6}{a^2}$. Est enim (2) differentia inter (4) dimidium summae $(2+6)$, et partem minorem (2), eadem cum (2) differentia inter terminos (4 et 2) maiorem et minorem dimidiatos (seu 3 et 1 exponentes in aequatione data, potestatum x et a). Nam $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Iam cum sit $y = Rqq\; \frac{x^6}{a^2}$, eliminata irrationalitate fiet $\frac{x^6}{a^2} = y^4$, atque ideo $x^6 = y^4a^2$, vel potius; sumendo y pro termino cuius unius potestas potestati duorum caeterorum terminorum aequatur $y^6 = a^2x^4$.

Si vero exponens potestatis a sit maior exponente potestatis x vel ei aequalis, exponens potestatis (non y) sed x duplicetur, et summa exponentium datorum x et a, ab exponente a dato duplicato subtracta, residuum ipsi a ascribatur.

Ut esto paraboloeis, surdesolida quadratiformis, aequationis $a^3x^2 = y^5$. fiet aequatio paraboloeidis solido omnium y^2 homogeneae, $x^4a = y^5$. quae est surdesolida quadrato-quadratiformis. Nam quoniam ob aequationem datam

$$y = R⑤\; a^3x^2. \quad \text{erit} \quad y^2 = R⑤\; a^6x^4.$$

hinc habemus exponentem x duplicatum. Iam ut figuram planam homogeneam inveniamus, dividamus a^6x^4 per a toties in se ductum, donec $R⑤\; a^6x^4$ fiet linea, id est per a, exponente, omnium exponentium $6+4$, dimidio, $3+2=5$, id est summa exponentium

4 dimensionis, *(1)* id *(2)* et ... solido *L* 5–7 lineam *(1)* finit *(2)* transeat. | Productum ... rationes. *erg.* | Dividenda *L* 12 fiet *(1)* $\frac{x^{24}}{a^8} = y^4$ *(a)* sive x^{24} *(b)* (unde patet ad eliminandam rationalitatem *(!)* exponentes productos 6. et 2. in exponentem ipsius y. datum, hoc loco 4. ducendos) atque ideo $x^{24} = y^4a^8$, vel potius; sumendo y pro termino cuius | unius *erg.* | potestas potestati duorum caeterorum terminorum aequatur $y^{24} = x^4a^8$, vel *(2)* $\frac{x^6}{a^2} = y^4$ *L* 13 f. $y^6 = a^2x^4$. | Unde patet in his casibus non opus esse, ut *gestr.* | Si *L* 18 est *(1)* cubico-cubica quadrato-cubiformis *(2)* surdesolida *L*

initio datorum, affectum, fiet $R\,5\,\dfrac{a^6x^4}{a^5}$; et quoniam hic exponens 5 semper minor est, exponente a dato duplicato, ab eo subtrahatur, fietque $R\,5\ ax^4 = y$, sive $ax^4 = y^5$.

Superest tantum ut quadrata omnium x quoque regula aliqua complectamur, quae sane brevis est et generalissima:
Exponens y duplicetur, et exponens a duplicatus, exponente x augeatur, habebiturque aequatio trilinei paraboloeidis, summae omnium x^2 homogenei.
Ita si sit paraboloeis surdesolida cubiformis, aequationis $y^5 = a^2x^3$. fiet aequatio $y^{10} = a^7x^3$, cuius paraboloeidis trilineum omnium $R\,3\,\dfrac{y^{10}}{a^7} = x$, summae omnium x^2 paraboloeidis datae homogeneum est. Nam ob aequationem datam

$$x = R\,3\,\frac{y^5}{a^2}.\ \ \text{Ergo}\ \ x^2 = R\,3\,\frac{y^{10}}{a^4}.$$

Hinc primum exponentes tam y quam a duplicatos habemus. Sed ut ex $R\,3\,\dfrac{y^{10}}{a^4}$, plano, salva progressionis ratione fiat linea, dividendum est per $R\,3\ a^3$, differentia enim inter $10-4$ quae nunc est potestas quantitatis productae, et $5-2$ quae esse deberet, ut linea fiat, est $5-2$, nam $2a-2b-a+b=a-b$. Iam $5-2$. seu differentia inter exponentem y datum, et a datum, semper est exponens x. Igitur exponenti a dato, nempe 2. duplicato, 4. addendus exponens x. seu hoc loco 3. fiet $R\,3\,\dfrac{y^{10}}{a^7} = x$, sive aequatio paraboloeidis homogeneae inventae erit: $\dfrac{y^{10}}{a^7} = x^3$, vel $y^{10} = a^7x^3$.

Nec dubito, ut dixi qui calculum ordine persequeretur, praeclaras in eo harmonias detecturum. Idemque futurum esse si ad cubos altioresque ipsorum x aut y potestates in summam colligendas assurgatur, methodo universali nunc aperta.

Ne quis autem putet quadrata applicatarum figurae homogeneae inventae quadrata figurae datae repraesentantium cubos eiusdem figurae datae repraesentare, exemplum

13 quae ... productae *erg. L* 20 f. aperta. *(1)* Praesertim cum quadrata | applicatarum *erg.* | figurae homogeneae inventae quadrata figurae datae repraesentantium cubos eiusdem figurae datae repraesentare *(a)* possint *(b)* fortasse possint, sed hanc suspicionem nunc excutere non vacat, quod facile foret; neque *(aa)* ea regula *(bb)* hoc quadratorum repraesentantium interventu opus est, cum methodo generali semper haberi possint repraesentantes applicatae. *Dazu am Rande (nachträglich gestr.) großes* *(2)* Ne *L*

adiciemus, quod eadem opera methodum nostram confirmat, et hanc [suspicionem] refutat.

$a^2x = y^3$. Hinc $y^6 = a^5x$ aequatio paraboloeidis homogenae omnium x^2, nam $x = \dfrac{y^3}{a^2}$. Ergo $x^2 = \dfrac{y^6}{a^4}$, homogenea huic: $x = \dfrac{y^6}{a^5}$. Qualibus exemplis, in quibus summa omnium x^2 methodo vulgari ac facili, sed ipsis peculiari haberi potest, elegans nostrae methodi confirmatio praebetur.

Sed et in hoc exemplo $x^3 = \dfrac{y^9}{a^6}$ quare et summa omnium x^3 haberi hoc loco potest; eadem homogenea figurae planae aequationis huiusmodi: $\dfrac{y^9}{a^8} = x$. Videamus an eadem figura sic inventa, etiam quadratis figurae homogeneae praecedentis, cuius aequatio $x = \dfrac{y^6}{a^5}$ homogenea sit, minimum $x^2 = \dfrac{y^{12}}{a^{10}}$, homogenea huic $x = \dfrac{y^{12}}{a^{11}}$, id ergo falsum deprehenditur.

Quare methodo universali a me hoc loco aperta, applicatarum cuiuscunque paraboloeidis cuiuscunque gradus potestates in summam colligendi, difficultate omni ad figuras planas homogeneas, ubi post demonstrationes nostras nulla est, id est quadraturam parabolarum revocata, possumus, opinor esse contenti.

Et vero cum Wallisius ipse quem nullus in hoc genere facile praeverterit non nisi primanos, secundanos, tertianos, etc.; subprimanos, subsecundanos, subtertianos, etc.; et singulorum, quadratos, cubos, aliasque potestates; ac horum denique omnium (demtis tamen quibusdam) reciprocos in summam colligendi, tradiderit tantum rationem; facile agnosci potest, quanta nunc accessione haec scientia augeatur; ubi cuilibet speciei serierum ab ipso traditae, infinitae aliae a me adduntur. Nam, si ille secundanos dedit, ego secundano-tertianos, secundano-quartanos, secundano-quintanos, etc. Si tertianos, ego tertiano-quartanos, tertiano-quintanos, tertiano-sextanos, etc. (idem est de subsecundano-tertianis; horumque omnium potestatibus) adicio. Ac proinde cum ille non

1 suspicionem *erg. Hrsg.* 20 serierum *(1)* infinite aliae | propemodum *erg.* | a me *(2)* ab *L*

15 Et vero: eine ähnliche Aussage bezüglich Wallis macht Leibniz bereits in N. 34; s. o. N. 34, S. 574 Z. 2 f. — s. a. oben S. 632 Z. 4–6.

nisi simplices exhibuerit, ego infinities infinitos addo, qui uno quoque simplicium cum caeteris omnibus distincte complicato, surgunt.

Et nunc vero etiam ad reciprocorum, quibus hyperboloeides constant, dimensiones transire placet.

39_2. PARS SECUNDA. DE HYPERBOLOEIDUM QUADRATURA

Hyperboloeides omnium graduum generumque quadrare,
excepta tantum earum prima, sive hyperbola ipsa.

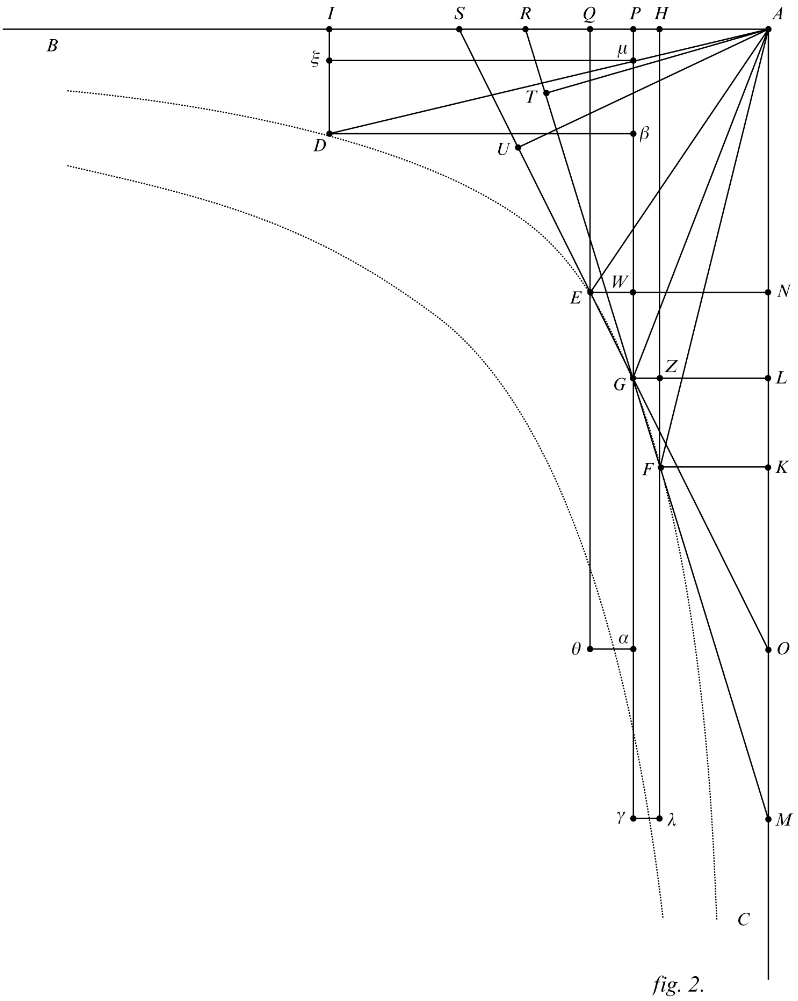


fig. 2.

Sunto in f i g. 2. rectae *AB*. *AC*. in infinitum productae, versus *B*. vel *C*. angulum in *A* constituentes rectum; et curva *DEF* eius naturae, ut versus *B*. vel *C*. continuata magis magisque ad rectas expositas accedat, non tamen nisi infinito ab *A* intervallo eas attingat; ut proinde si puncta *B*. et *C*. loca concursus esse intelligantur, rectas *AB*. vel *AC*. necesse sit esse longitudine infinitas, non quod eis nulli sint termini, sunt enim aliae etiam versus easdem partes, longiores seu quae ultra *B*. et *C*. procurrant, quod hoc loco ostendere nihil attinet (quanquam mire faciat, ad declarandam infiniti naturam falsis notionibus involutam), sed quod termini *B*. *C*. sint intervallo ab *A* dissiti, quod sit quolibet a nobis assignabili maius. Et has ob causas rectae *AB*. *AC*. a s y m p t o t i appellantur, quod nomen postea ipsi spatio longitudine infinito *BDEFCA*. utrinque, id est versus *B*. pariter et *C*. infinito, vel etiam portioni eius *BDEFH* aut *CFHA* ab altera parte infinitae, communicatum est.

Caeterum asymptotos habent conchoeis, cissoeis, item quam ego angulorum figuram, seu hyperbolam falsam appellare soleo, quod insigni plane proprietate eadem cum angulis proportione per applicatas secetur; aliaeque infinitae, sed inprimis hyperbole atque hyperboloeides, de quibus hoc loco solis dicendum est: et quarum haec est proprietas generalis, ut sumto curvae puncto quolibet, ut *D*. vel *F*. potestas quaedam certa abscissae, ut *AI*. vel *AK*. ducta in potestatem quandam certam applicatae *DI*. vel *AK*. certae potestati lineae cuiusdam invariatae, ac proinde eidem semper, vel quadrato, vel cubo, vel surdesolido, etc. pro curvae natura aequetur.

Quemadmodum ergo in paraboloeidibus, ita et in hyperboloeidibus (quae ex elementorum paraboloeides constituentium reciprocis conflantur) agnosci debent tum gradus curvarum, tum in gradu quolibet genera varia. Nam prout potestas rectae invariatae: quadratum, cubus, quadrato-quadratum etc. est, hyperboloeidem quoque quadraticam, cubicam, quadrato-quadraticam, appellare licet; sed prout abscissae atque applicatae potestates varie complicantur, hinc in eodem gradu genera multa existere possunt.

Sed ut verbis parcatur tabulam exponere operae pretium est, qualem paraboloeidum dedimus, ubi primum admonuerimus, perinde ut illic, rectam invariatam a nobis appellari *(a)*, asymptoto parallelam abscissamve inde a puncto concursus seu centro asymptotorum sumtam *(x)*, eidem vero perpendicularem sive applicatam *(y)*.

Atque ita eas primum ad paraboloeidum exemplum ordinemus.

[*Tabelle, s. S. 646*]

Sed haec tabula, etsi continua in speciem, indiget tamen reformatione. Semper enim species quaevis speciei alteri eiusdem gradus, permutatis y et x coincidit, sive homogenea est; ita y^2x et $x^2y = a^3$. homogeneae sunt, nec est cur altera potius quam altera simplex, aut quadratiformis appelletur. Sane et quae uni asymptotae parallela est, alteri est applicata, ideoque non est cur altera potius quam altera, abscissa potius quam applicata appelletur. Sumta portione ab utraque parte finita aut infinita, omnia quae de x aut y dici possunt, manifeste permutantur. Sumto spatio ab una parte infinito, ab altera finito, ut *FEDBIH*. fateor rectam BH infinitam, instar axis, et rectam HF instar basis considerari posse, quae ubilibet finiat. Sed compensatur haec consideratio, cum primum animadvertitur istud spatium velut alterius figurae *BDEFCA* portionem recta axi (pro quo in spatio utrinque infinito alterutram asymptotorum assumere licet) CA parallela FH ac per consequens ad basin AB abscissam, intelligi posse. Quare aliter ordinandae sunt hyperboloeidum species, et quoniam paraboloeidum reciprocis constant elementis, collationem instituere operae pretium videtur.

Exempli causa, paraboloeidi quadrato-quadraticae simplici hanc aequationem tribuo: $y^4 = a^3x$. erit $y = R\,④\; a^3x$. et posito $a = 1$. et $x = 1$. vel 2. vel 3. vel 4. etc. erit series ipsorum y in numeris:

1 f. (y). | Denominationes autem, ut in paraboloeidibus sumsimus ab x̲. potius quam ab a̲. ac paraboloeidem cuius haec aequatio est $y^4 = ax^3$. quadrato-quadraticam, quidem, ob y^4, sed ob x^3 cubiformem, neglecto a. appellavimus; et $y^4 = a^3x$. simplicem, ob x. nulla potestate affectam; *erg., streicht Hrsg.*, ita hoc loco denominationem ab y. potius quam ab a. sumimus; ac hyperboloeidem, cuius aequatio $a^4 = yx^3$. simplicem appellamus. Cum enim alterutra eligenda esset; x. potius eximenda visa est, quoniam naturalius est x. quam y. constituere abscissam; abscissae autem progressionis arithmeticae intelliguntur, ac proinde ipsi a. uniformi, propiores, saltem enim crescunt uniformiter, quod minime faciunt applicatae. Quod si nondum satisfacit, rationem mox aliam subiciemus, eamque convincentem. *erg. u. gestr.* | Atque *L* 15 ac per ... AB *erg. L* 17 f. videtur. | Si quis hanc dispositionem atque nomenclaturam nostram, velut arbitrariam, pertinacius impugnat, ei opinor satisfactum erit, ubi *(1)* quas ego hyperbolas nomine *(2)* hyperboloeides, ut a me appellantur, paraboloeidum cognominum reciproca habere elementa ostendero. At pro paraboloeidum dispositione ac nomenclatura, satis illa ipsa inde surgentis harmoniae concinnitas perorabit: *gestr.* | Exempli *L*

3 *Tabelle*: zum Aufbau und den Ergänzungen s. u. S. 648 Z. 15–18 sowie S. 649 Z. 24 f.

[Tabula Hyperboloeidum]

Hyperboloeides					Paraboloeides respondentes
quadratica seu hyperbola communis reciproca trianguli		$a^2 =$	yx	....	$a^0x = y$
cubica	quadratiformis reciproca para– bolae communis	$a^3 =$	y^2x	....	$ax = y^2$
	$\boxed{\text{simplex}}$		yx^2		
quadrato– quadratica	cubiformis	$a^4 =$	y^3x	....	$a^2x = y^3$
	quadratiformis		y^2x^2	$*$ (vel $a^2 = yx$)	$a^0x^2 = y^2$
	$\boxed{\text{simplex}}$		yx^3		
surdesolida seu quadrato – cubica	$\square^{to}$ $\square^{ti}$formis	$a^5 =$	y^4x	....	$a^3x = y^4$
	cubiformis		y^3x^2	....	$ax^2 = y^3$
	$\boxed{\text{quadratiformis}}$		y^2x^3		
	$\boxed{\text{simplex}}$		yx^4		
cubico – cubica	$\square^{to}$ cubiformis	$a^6 =$	y^5x	....	$a^4x = y^5$
	$\square^{to}$ $\square^{ti}$ formis		y^4x^2	$*$ (vel $a^3 = y^2x$)	$a^2x^2 = y^4$
	cubiformis		y^3x^3	$*$ (vel $a^2 = yx$)	$a^0x^3 = y^3$
	$\boxed{\square^{ti}\text{ formis}}$		y^2x^4	$*$ (vel $a^3 = yx^2$)	
	$\boxed{\text{simplex}}$		yx^5		

1 Tabula Hyperboloeidum *erg. Hrsg.*

$$R\,④\,1. \qquad R\,④\,2. \qquad R\,④\,3. \qquad R\,④\,4. \qquad \text{etc.}$$

Contra erit $x = \dfrac{y^4}{a^3}$, eodemque modo posito $a = 1.$ et $y = 1.$ vel 2. vel 3. vel 4. etc. erit series ipsorum x in numeris:

$$1 \qquad 16 \qquad 81 \qquad 256$$

Sumtis iam hyperboloeidibus quadrato-quadraticis duabus, altera cuius aequatio est: $a^4 = yx^3$, altera cuius aequatio est: $a^4 = y^3x$, videamus utra harum potius paraboloeidis alicuius simplicis reciproca dici mereatur; reducta ad numeros serie elementorum.

Ac primum ob aequationem $a^4 = yx^3$, erit $y = \dfrac{a^4}{x^3}$, et posita $a = 1.$ et $x = 1.$ vel 2. vel 3. vel 4. erit series omnium y in numeris

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{27} \qquad \frac{1}{64} \qquad \text{etc.}$$

Patet ergo elementa haec paraboloeidis, verum non quadraticae, sed cubicae simplicis reciproca esse.

Eodem modo $x = R\,③\,\dfrac{a^4}{y}$. hinc series omnium x in numeris:

$$\frac{1}{R\,③\,1} \qquad \frac{1}{R\,③\,2} \qquad \frac{1}{R\,③\,3} \qquad \frac{1}{R\,③\,4} \qquad \text{etc.}$$

Unde intelligi potest, quam in tabula nominaveram: hyperboloeidem quadrato-quadraticam simplicem cuius aequatio: $a^4 = yx^3$, esse paraboloeidis cubicae simplicis cuius aequatio: $y^3 = a^2x$, reciprocam.

Nunc alteram quoque hyperboloeidem quadrato-quadraticam aequationis $a^4 = y^3x$, quae sola priori controversioni de simplicitate movere posset, examinemus. In ea $y = R\,③\,\dfrac{a^4}{x}$, eritque series omnium y in numeris:

$$R\,③\,1 \qquad R\,③\,2 \qquad R\,③\,3 \qquad R\,③\,4$$

Habemus ergo seriem omnium y hyperboloeidis quadrato-quadraticae istius, homogeneam seriei omnium x hyperboloeidis quadrato-quadraticae prioris. Et contra hoc loco series omnium x seriei omnium y prioris, homogenea est; nam hoc loco $x = \dfrac{a^4}{y^3}$, id est in numeris:

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{27} \qquad \frac{1}{64} \qquad \text{etc.}$$

Non est ergo cur hae duae species distinguantur, aut cur altera prae altera simplex vocetur, cum curva utriusque eadem sit.

Iam ut species hyperboloeidum distinctius habeantur, ex paraboloeidibus reciproca earum elementa sunt indaganda.

Ita in prima seu communi parabola elementa axi parallela, seu omnia (x) sunt:

$$1 \qquad 4 \qquad 9 \qquad 16$$

horum reciproca:

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{16} \qquad \text{etc.}$$

Unde aequatio: $x = \dfrac{a^3}{y^2}$. vel $y^2x = a^3$.

Elementa basi parallela, seu omnia (y) sunt:

$$Rq\ 1 \qquad Rq\ 2 \qquad Rq\ 3 \qquad Rq\ 4$$

quorum reciproca

$$\frac{1}{Rq\ 1} \qquad \frac{1}{Rq\ 2} \qquad \frac{1}{Rq\ 3} \qquad \frac{1}{Rq\ 4}$$

Unde aequatio: $\sqrt{\dfrac{a^3}{x}} = y$, sive $y^2x = a^3$.

Igitur p a r a b o l a e q u a d r a t i c a e , reciproca est h y p e r b o l o e i s c u b i c a. Quod mirum videri non debet, quoniam h y p e r b o l a q u a d r a t i c a seu communis, non parabolae communi, sed t r i a n g u l o , quod iure omnium paraboloeidum primum intelligi potest, reciproca habeat elementa.

P a r a b o l o e i s c u b i c a quadratiformis, aequationis $y^3 = ax^2$, elementa habet radices quadratas ex numeris cubis, vel radices cubicas ex numeris quadratis; i l l a r u m reciproca

$$\frac{1}{Rq\ 1} \qquad \frac{1}{Rq\ 8} \qquad \frac{1}{Rq\ 27} \qquad \frac{1}{Rq\ 64} \qquad \text{etc.}$$

unde aequatio: $Rq\ \dfrac{a^5}{x^3} = y$. vel $y^2x^3 = a^5$.

H a r u m , radicum inquam cubicarum ex numeris quadratis, reciproca:

$$\frac{1}{R③\ 1} \qquad \frac{1}{R③\ 4} \qquad \frac{1}{R③\ 9} \qquad \frac{1}{R③\ 16}$$

Unde aequatio: $R③\ \dfrac{a^5}{x^2} = y$, vel $y^3x^2 = a^5$.

Ergo paraboloeidi cubicae quadratiformi, [hyperboloeides] surdesolida quadratiformis, vel quod idem est cubiformis, reciproca est.

Atque ut semper ex data aequatione paraboloeidis, aequationem hyperboloeidis reciprocae brevissime investigemus:
Esto aequatio paraboloeidis $y^3 = ax^2$. et ex y vel x eligatur utrumlibet, et si placet minori potestate affectum, ut hoc loco x. Ergo $x = Rq\,\dfrac{y^3}{a}$, et invertendo $Rq\,\dfrac{a}{y^3}$, quod ut possit esse = alicui x, seu lineae, per a multiplicandum, donec ad debitam dimensionem assurgat, hoc loco $\dfrac{a^5}{y^3}$, $Rq = x$. vel $\dfrac{a^5}{y^3} = x^2$, quod ab initio statim fieri poterat, extractione radicis omissa; nam aequatio paraboloeidis data convertatur in aliam, cuius unum latus continet, potestatem datam alterutrius variabilium (y vel x) solam, alterum fractionem, cuius denominator sit alterius variabilium potestas data, numerator potestas, invariabilis a, prout natura novae aequationis postulat, aucta. Unde patet potestatem linearum variabilium non mutari, at exponentem ipsius a novum summam exponentium x et y debere aequare, quorum antea tantum differentiam aequaverat; differentia autem inter summam et differentiam $a+b-a+b$ est minor terminus duplicatus. Ergo inventam habemus

„ regulam expeditam et generalem aequationem paraboloeidis datae mutandi in
„ aequationem hyperboloeidis reciprocae, si a ponatur ab uno latere aequationis expo-
„ nente eius duplo minoris variabilium exponente, aucto; contra data aequatione hy-
„ perboloeidis, datur aequatio paraboloeidis respondentis, si ab exponente a detraha-
„ tur exponens variabilium minoris, et maioris variabilium potestas ab uno aequatio-
„ nis latere, caetera ab altero collocentur. Vel brevius, retento exponente literae x et
„ y. ipsius a exponens erit differentia eorum.

Et secundum hanc regulam calculatas paraboloeides respondentes, margini hyperboloeidum in tabulam adiciemus, unde apparet sane fieri non posse, ut hyperboloeidum et paraboloeidum gradus sibi respondeant, quoniam aliqua hyperboloeis cubico-cubica habet cubicam paraboloeidem sibi respondentem, et contra una hyperboloeis surdesolida habet respondentem sibi paraboloeidem quadrato-quadraticam. Quare hyperboloeides nomina, quae imposuimus retinere possunt; sed quando eadem hyperboloeis diversa

1 paraboloeides *L ändert Hrsg.* 22 f. Vel ... eorum. *erg. L*

habet nomina, quod scilicet tantum literarum x et y permutatione varietur, retinebit maius. Ita hyperboleis surdesolida: quadrato-quadratiformis et simplex eadem est, sed nomen quadrato-quadratiformis retinebit, quoniam paraboloeis cui reciproca est, quadrato-quadratica est, ac proinde hyperboloeidis gradum ab exponente literae a. speciem ab exponente literae x vel y utra maior est, determinari.

Quaestio hoc loco obiter institui potest, quid illis seriebus faciendum sit, quae sane fractionum habent formam, sed in quibus numerator non minus ac denominator continue crescit, ut si series sit:

$$\frac{1}{Rq\ 1} \qquad \frac{2}{Rq\ 2} \qquad \frac{3}{Rq\ 3} \qquad \frac{4}{Rq\ 4} \qquad \text{etc.}$$

cuius aequatio est $\dfrac{ax}{\sqrt{ax}} = y$. vel $\dfrac{a^2x^2}{ax} = y^2$. vel $ax = y^2$. Unde apparet hanc seriem ad parabolam communem reduci.

Esto alia:

$$\frac{1}{Rq\ 1} \qquad \frac{2}{Rq\ 8} \qquad \frac{3}{Rq\ 27} \qquad \frac{4}{Rq\ 64} \qquad \text{etc.}$$

aequatio $\dfrac{x^{\cdot\cdot}}{Rq\ x^3} = Rq\ \dfrac{a^4x}{x^3} = y$. vel $a^4x = y^2x^3$. vel $a^4 = y^2x^2$. vel $a^2 = yx$. Hanc ergo manifestum est reduci ad hyperbolam communem.

Idemque de caeteris speciebus omnibus iudicandum est, sublata enim irrationalitate alterum ex $x^{\cdot\cdot}$ destruitur. Et divisio alicuius potestatis sive radicis per aliam, gignit potestatem aliquam vel radicem; ut: $\dfrac{3}{Rq\ 3} = Rq\ 3$. quia $3 = Rq\ 3 \frown Rq\ 3$.

Atque his ita de hyperboloeidum gradibus speciebusque, praelibatis, ad dimensiones ascendemus, usi perinde ut in paraboloeidibus, ratione productae ad abscissam, quae hoc quoque loco invariata est ac constans in eadem specie figurae. Et vero dudum a doctissimis viris, qui de maximis ac minimis, ac tangentium ducendarum ratione scripsere observatum est[:] sumta spatii concavi hyperboloeidis cuiuslibet, applicata qualibet asymptoto uni parallela, et a curvae puncto G ad alteram usque asymptoton producta, ut GL. fore abscissam AL ad productam LM (productam inquam ab L usque ad punctum M, in quo GM tangens curvae in G asymptoto AC occurrit), ut est exponens potestatis ipsius abscissae x vel AL. ad exponentem potestatis ipsius applicatae y vel GL.

15 reduci: in Wirklichkeit ergibt sich die quadratische Hyperbel $a^3 = y^2x$. Die Bezeichnung $x^{\cdot\cdot}$ bei der Rationalisierung ist mnemotechnischer Natur.

Cumque in hyperbola communi cuius aequatio $a^2 = xy$. exponentes isti sunt aequales, erunt rectae quoque AL et LM aequales. At in hyperboloeide cubica $a^3 = y^2x$, cum exponens y sit 2. et exponens x sit 1. etiam LM ipsius AL dupla erit. Idem est si applicata assumatur EN. abscissa AN. producta NO. tangens EO.
Notandum autem a b s c i s s a s hoc loco intelligi non a vertice sed a basi, et p r o d u c t a s non ultra verticem, sed trans applicatam.

Nunc tres intelligantur esse applicatae EN. GL. FK. quarum distantiae NL. LK. sint infinite parvae. Constat tangentem per duarum applicatarum distantiae infinite parvae extrema transire intelligi posse. Ea enim est natura tangentis, ut duas eiusdem curvae applicatas, nisi distantiae infinite parvae, ac quae pro eadem haberi possint, non attingat. Igitur tangentem GM ponamus transire per F, et tangentem EO per G. Iamque intelligamus spatium constare ex infinitis numero trapeziis ut $ENLG$; et $GLKF$ latitudinis infinite parvae; et curvam ipsam ex rectis numero infinitis, magnitudine infinite parvis, ut tangentium scilicet portionibus inter duas applicatas proximas interceptas velut polygonorum irregularium lateribus compositam; ex punctis curvae F. G. E. demittantur rectae perpendiculares in basin FH. GP. EQ. ac tangentibus quoque usque ad basin productis, MFG in R, et OGE in S. Ex puncto A. centro seu concursu asymptotorum demittantur perpendiculares in tangentes productas, quae occurrant in punctis T. U, tangentibus productis ut $MFGTR$, $OGEUS$. Denique puncta ut W. vel Z. quibus duorum punctorum curvae proximorum, tangentem communem habentium, ut E et G (vel G et F) rectae, ut EN et GP (vel GL et FH) ex uno quidem a basi remotiore G (vel F) in basin AB, ex altero ab axe remotiore E (vel G) in axem AC perpendiculares se intersecant.

Habebimus triangula rectangula EWG (vel GZF), quorum latus unum ut WG (vel FZ) est differentia abscissarum EQ, GP (vel GP. FH) aequalis NL (LK) distantiae applicatarum EN. GL (GL. FK) et latus alterum idem est inverso modo si applicatas abscissis permutes; EW (GZ) differentia applicatarum EN, GL (GL. FK) aequalis QP (PH) distantiae abscissarum vel intervallorum a basi EQ. GP (GP. FH). Basis autem seu hypotenusa, sit latus polygoni infinite parvum, seu portio tangentis inter duas applicatas abscissasve intercepta EG (GF).

Manifestum est autem triangulum AUO (ATM), intervallo tangentis a centro A. nempe AU (AT), portione tangentis OU (MT), et summa abscissae productaeque, AO

15 irregularium *erg. L* 28–30 Basis ... (GF). *erg. L*

(AM) comprehensum, esse simile triangulo EWG (GZF), et angulum EGW (GFZ) esse angulo UOA (TMA) aequalem. Unde sequitur ut est AU (AT) ad EW (GZ) ita esse AO (AM) ad EG (GF) ac proinde rectangulum ex AU in EG (AT in FG), rectangulo ex AO in EW, vel QP (AM in GZ, vel PH) aequari.

His ita positis sumatur portio curvae quantacunque $DEGF$ divisa in latera numero infinita, magnitudine infinite parva ut EG. GF. et ex puncto A ducantur ad horum laterum terminos, rectae AD, et post infinitas intermedias AE. AG. AF.

Manifestum est, totum sectorem concavum $ADEGFA$ infinitis triangulis AFG. AGE. etc. compleri. At vero haec eadem triangula duplicata aequari basibus eorum, id est tangentium portionibus EG vel GF in altitudines, id est tangentium intervalla AU, vel AT ductis, manifestum est.

Vicissim vero ostensum paulo ante, rectangula AU in EG, vel AT in GF, rectangulis AO in QP. vel AM in PH. aequari, ergo triangulum AGE, vel AFG duplicatum rectangulo AO in QP, vel AM in PH aequabitur.

Describantur rectangula haec, rectis AO in $P\alpha$ vel $Q\theta$, et AM in $H\lambda$ vel $P\gamma$ translatis, et basibus QP et PH impositis. Quod si idem fieri intelligatur in quolibet curvae $DEGF$ puncto, quod in punctis E. G. F. factum est, infinita numero rectangula eiusmodi, basi IH imposita, constituent spatium curvilineum concavum $ID\theta\lambda H$, sectori concavo $ADEGFA$, duplicato, id est omnibus illis triangulis numero infinitis ut AFG, AGE, etc. sectorem complentibus, duplicatis; aequale.

Manifestum est autem curvam $D\theta\lambda$ esse eiusdem speciei cum priori $DEGF$. quoniam enim applicatae sunt proportionales, seu λH ad FH, ut θQ ad EQ. figurae erunt homogeneae, duae autem figurae planae homogeneae sunt eiusdem speciei, nec nisi laterum rectorum, si qua habent, magnitudine differunt, uti ellipsis et circulus eadem certe aequatione possunt exprimi.

Datur ergo ratio spatii $IDEGFH$, ad spatium $ID\theta\lambda H$, quae scilicet applicatarum respondentium, sive quae abscissarum, ad summas ex abscissis et productis. Rationem sum-

24 differunt, *(1)* ac ut obiter dicam, similes sunt, *(2)* uti *L*

15–20 Bei der Konstruktion der Hilfskurve für die Transmutation weist Leibniz dem Punkt D unberechtigterweise eine Sonderrolle zu, so dass die Hilfskurve in seiner Handzeichnung wie die Ausgangskurve durch D läuft. Der Fehler beeinflusst die folgenden Betrachtungen nur unwesentlich.

mae ad abscissam vel exponentis a ad exponentem x, appellemus ☽. quae in hyperbola communi $= \frac{2}{1}$. Quare spatium $☽ \frown IDEGP =$ sectori concavo $ADEGA$ duplicato, seu $☽ \frown IDEGP = 2 \;\; ADEGA$.
Quoniam vero $IDEGP$ est aequale his duobus, trapezio $ID\mu P$, et sectori concavo μDEG, simul sumptis; ac eodem modo $ADEGA$ est aequale his duobus; triangulo $A\mu G$, et eidem sectori concavo μDEG, simul sumtis, ideo

$$☽ \frown ID\mu P + ☽ \frown \mu DEG = 2\; A\mu G + 2\; \mu DEG.$$

Et quia in hyperbola communi $☽ = 2$, ideo in ea aequatio ista sic interpretanda est:

$$2\; ID\mu P + 2\; \mu DEG = \; 2\; A\mu G + 2\; \mu DEG.$$

Unde cum $2\; \mu DEG$ utrinque destruatur, manifestum est in hyperbola communi aequationem propositam nihil conferre ad spatii curvilinei quadraturam, neque aliud inde sequi, quam

$$2\; ID\mu P = 2\; A\mu G \text{ vel } \; ID\mu P = A\mu G.$$

Unde, si utrique addatur triangulum μPA, fient duo triangula vel etiam, si duplicentur, $AID = APG$, vel rectangulum AID aequale rectangulo ALG. Quae nota est hyperbolae proprietas, omnia scilicet rectangula sub abscissa et applicata, ubicunque in spatio asymptoto assumtis, inter se, ac proinde quadrato cuidam certo ac perpetuo aequalia esse seu $a^2 = xy$, insigni documento veritatis tam eleganti harmonia demonstrationum comprobatae.

At vero in caeteris hyperboloeidibus omnibus (praeter eas quae ad communem revocantur, qualis est: $a^6 = x^3y^3$), quadraturam spatii curvilinei haberi necesse est. Ut enim ad aequationem propositam
$☽ \frown ID\mu P + ☽ \frown \mu DEG = 2\; A\mu G + 2\; \mu DEG$ vel $☽\; ID\mu P - 2\; A\mu G = 2\; \mu DEG - ☽\; \mu DEG$ redeamus, patet inde fieri

$$\frac{☽\; ID\mu P - 2\; A\mu G}{☽ - 2} = \mu DEG, \text{ et } \; ID\mu P + \frac{☽ \frown ID\mu P - 2\; A\mu G}{☽ - 2} = IDEGP$$

1 appellemus *(1)* β *(2)* ☽. *L* 2 Quare *(1)* ratio *(a)* quoque spatii IDEGFH *(b)* IDEGP ad sectorem concavum dabitur, $= \frac{2\beta}{1}$. Ac proinde spatium *(2)* spatium *L* 23 + 2μDEG *(1)* redeamus, vel ☽ est maior quam 2, vel minor, si maior erit *(2)* quam sic polien *(3)* vel *L*

24 inde fieri: anstelle von $☽ - 2$ müsste es umgekehrt $2 - ☽$ heißen. Der Fehler wirkt sich bis zum Ende des Stückes aus. — Im Zuge der anschließenden Rechnungen unterlaufen Leibniz weitere Flüchtigkeitsfehler, so dass er lediglich stellenweise richtige Zwischenergebnisse erreicht.

seu $$\frac{\rightmoon \frown 2\ ID\mu P - 2\ ID\mu P - 2\ A\mu G}{\rightmoon - 2} = IDEGP$$
id est spatio hyperboloeidis ad quadrandum proposito. Q.E.F.

Ut autem $ID\mu P$ et $A\mu G$ comparemus, recta $P\mu$ appelletur $= b$. recta $\mu G = c$. $PG = b + c$. et $PA = d$. $PI = e$. et $AI = d + e$. erit $\bigtriangledown^{\text{lum}}\ P\mu A = \dfrac{bd}{2}$. et $A\mu G = \dfrac{cd}{2}$. et $APG = \dfrac{bd + cd}{2}$.

Porro $ID = \dfrac{P\mu \frown AI}{PA} = \dfrac{bd + be}{d} = b + \dfrac{be}{d}$. Et constat $ID\mu P$ ex rectangulo $P\xi$, et triangulo $D\xi\mu$. Rectangulum autem $P\xi = be$, et quia $D\xi = ID - P\mu = b + \dfrac{be}{d} - b = \dfrac{be}{d}$. erit $D\xi\mu = \dfrac{be^2}{2d}$. Ergo $ID\mu P = be + \dfrac{be^2}{2d}$ vel $\dfrac{2dbe + be^2}{2d}$. Ergo per aequationem supra positam:
$$\frac{\dfrac{\rightmoon\ dbe + \rightmoon\ be^2}{2d} - \dfrac{cd}{2}}{\rightmoon - 2}, \text{ seu } \frac{\cancel{2}\rightmoon dbe + \cancel{2}\rightmoon be^2 - \cancel{2}cd^2}{\underset{2}{\cancel{4}}d\rightmoon - \underset{2}{\cancel{4}}d} = \mu DEG.$$
Positoque $\pi d = b$. fiet: $\dfrac{\rightmoon be + \rightmoon\pi e^2 - cd}{2\rightmoon - 2} = \mu DEG$.

et posito $2\rightmoon - 2 = \delta$. fiet: $\dfrac{\rightmoon be + \rightmoon\pi e^2 - cd}{\delta} = \mu DEG$.

Addatur utrobique $P\mu A = \dfrac{bd}{2}$. fiet: $\dfrac{\rightmoon bde + \rightmoon be^2 - cd}{2d\rightmoon - 2d} \overset{+}{\times} \dfrac{bd}{2} = IDEGP$.

Ergo $\dfrac{2\rightmoon bde + 2\rightmoon be^2 - 2cd^2 + 2\rightmoon bd^2 - 2bd^2}{4d\rightmoon - 4d} = IDEGP$.

Posito $\rightmoon = 3$. erit: $\dfrac{\overset{3}{\cancel{6}}bde + \overset{3}{\cancel{6}}be^2 - \overset{}{\cancel{2}}cd^2 + \overset{2}{\cancel{4}}bd^2}{\underset{4}{\cancel{8}}d} = IDEGP$.

Detrahatur utrobique rectangulum $DP =$ rectang. $P\xi$ $(= be)$ + rectang. $D\xi\mu$ $\left(\dfrac{be^2}{d}\right)$.

15 Posito ... IDEGP. *erg. L*

Residuum cognitorum hoc rectangulo detracto aequabitur spatio $DEG\beta$. Posito iam ☽ $= 3$, erit

$$\cancel{6bde} + \cancel{6be^2} - 2cd^2 + 6bd^2 - \underset{\underset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{12}}dbe + \cancel{4dbe} - \underset{\underset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{12}}be^2 + \cancel{4be^2}$$

In omnibus his aequationibus non determinatur utrum altero maius, seu utrum subtrahens an subtrahendum, nunc enim unum, nunc alterum maius. Fiet autem hoc loco:

$$\frac{6bd^2 - 2cd^2 - 2dbe - 2be^2}{12d - 4d}.$$

(Si D ponatur B. seu recta AD infinita seu coincidens ipsi AB. necesse est spatium $BDEGP$ aequari 2 ☽ $\frown BP$, quoniam recta BP infinite longa quoddam exhibet trapezium infinite longum, quale istud $ID\mu P$.)

Porro ad contrahendam aequationem adhibenda est figurae aequatio, in qua $a^{(\beta+\delta)} = x^\beta y^\delta$. sumendo scilicet β et δ pro exponentibus incognitis. Porro PA vel d potest cogitari ut x. quemadmodum et AI vel $d+e$. contra PG seu $b+c$. item ID seu $b+\dfrac{be}{d}$ possunt sumi pro y. Ergo: $PA^\beta \frown PG^\delta = AI^\beta \frown ID^\delta$. seu $d^{\beta} \frown \llcorner b+c \lrcorner^{\delta} = \llcorner d+e \lrcorner^{\beta} \frown \llcorner b+\dfrac{be}{d} \lrcorner^{\delta}$. Posito iam $\delta = 1$. et $\beta = 2$. erit:

$$d^2b + d^2c = bd^2 + be^2 + 2bde, + bed + \frac{be^3}{d} + 2be^2.$$

Ergo $$\cancel{d^3b} + d^3c = \cancel{bd^3} + 3be^2d + \overset{3}{\cancel{2}}bd^2e + \cancel{bed^2} + be^3 + \cancel{2be^2}d.$$

vel $$d^3c - 3be^2d + 3bd^2e = be^3.\ \text{vel:}\ \frac{d^3c}{3e^2d + 3d^2e + e^3} = b.$$

Quod in aequatione superiori ad $IDEGP$ in locum ipsius b substitui potest. Fiet in exemplo hyperboloeidis $a^3 = xy^2$. fiet inquam:

$$\frac{3d^4ec + \overset{2}{\cancel{5}}e^2d^3c - \cancel{3e^2d^3c} - 3d^4ce - e^3cd^2 + 2d^5c}{12e^2d^2 + 12d^3e + 4e^3} = IDEGP.$$

7 est *(1)* | *(a)* rectam *(b)* ID fieri infinite parvam, et ideo *erg.* | spatium BDEGP aequabitur *(2)* spatium *L* 10 *(1)* Porro PA ⌢ PG seu d ⌢ ⌞b + c seu db + dc = a² = *(2)* Porro *L*

40. DE FUNCTIONIBUS PLAGULAE QUATTUOR.
August 1673

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept mit Zusätzen: LH 35 VIII 3 Bl. 1–8. 4 Bog. 2°. $7\frac{1}{2}$ S. Bl. 2 vor dem Beschreiben unten beschnitten (Abschnitt ca 23,5 cm x 14,0 cm). Geringe Textverluste durch Randschäden (insbesondere Bog. 1), im Wesentlichen an Hand der Sicherheitsverfilmung (April 1967) behoben. Überschriften, Datierung, Bogennummerierung sowie Gesamttitel sukzessive ergänzt. Textfolge: Bl. 1 r° (Haupttext), Bl. 1 v° oben (bis S. 662 Z. 7), Bl. 1 r° (Randtext), Bl. 2 v°, Bl. 1 v° unten (ab S. 666 Z. 12), Bl. 2 r° sowie zwei Zusätze auf Bl. 1 v° in Zusammenhang mit dem zweiten Beispiel (S. 660 Z. 19 – S. 661 Z. 5) = N. 40_1; Bl. 3 und 4 = N. 40_2; Bl. 7 und 8 = N. 40_3; Bl. 5 und 6 = N. 40_4. (Reihenfolge von Teil 3 und 4 durch Kustode gesichert.)
Cc 2, Nr. 575

1673. August.

M e t h o d u s t a n g e n t i u m i n v e r s a seu D e f u n c t i o n i b u s.

De locis locorum inveniendis, seu de applicatis loci cuiusdam dati functionem in alio loco, qui quaeritur, facientibus.
Seu de inveniendo loco, in quo applicatae loci dati, faciunt functionem propositam.
Est haec methodus methodo tangentium opposita.

---

14 I n p a r t e 2^{da} e s t m i r a b i l i s o b s e r v a t i o d e e x p r e s s i o n i b u s, t a n g e n t i u m p e r i n f i n i t a s r e p l i c a t i o n e s, i t e m p a r t e [3^{tia}].

22 4^{ta} *L ändert Hrsg.*

---

14 Eine ausführliche Behandlung des Inhalts gibt D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 43–59.

40_1. PLAGULA PRIMA

P a r s   p r i m a

Methodus nova investigandi tangentes linearum curvarum
ex datis applicatis, vel contra applicatas ex datis
productis, reductis, tangentibus,
perpendicularibus, secantibus.

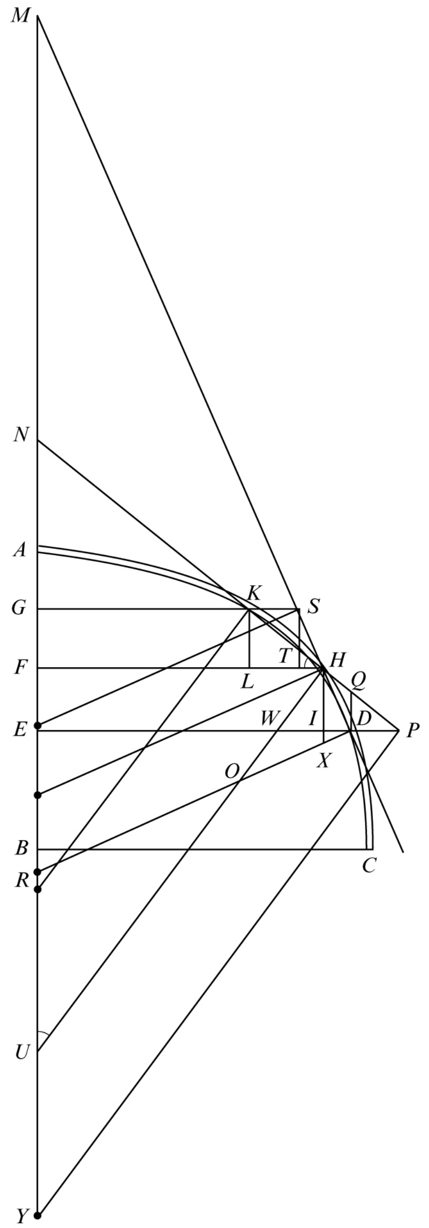
Esto figura curvilinea $ABCDA$ in qua relatio applicatae ED ad abscissam AE aequatione quadam nobis cognita explicatur: id enim utique necesse est, si modo figurae natura nobis nota est. Quod si figura geometrica non est, ut cycloeis, nil refert tamen, tractabitur enim ad geometricae exemplum fingendo rectarum cum curvis ex quibus factae sunt notam nobis esse comparationem; nec ideo minus tangens sive geometrica sive ageometrica ducetur, prout figura natura patitur.

Intelligatur abscissa AE dividi in partes aequales infinitas, quales sunt EF. FG. easque proinde infinite parvas, constat figuram intelligi posse compositam ex infinitis trapeziis quales sunt $EFHD$ et $FGKH$. Et curva ADC intelligi poterit constare ex infinitis lineis rectis velut lateribus, quae scilicet portiones sint tangentium, duas applicatas proximas (seu distantia infinite parva a se invicem remotas) iungentium; qualis recta est HD. portio tangentis MD. per puncta H. D extrema applicatarum FH et ED intervallo infinite parvo $\underline{EF}$ distantium, transeuntis; qualis item est KH. portio tangentis NH. per K et H extrema puncta applicatarum sibi proximarum GK. FH transeuntis.

Iam manifestum est triangula HID et MED. vel KLH et NFH. esse similia, ergo $\dfrac{ME}{ED} = \dfrac{HI}{ID}$. Iam $ID = ED - FH$. Ergo $ME = \dfrac{HI \frown ED}{ED - FH}$. Inventa autem ME, inventa est tangens, cum non nisi rectam MD duci opus sit, ex puncto M invento, ad punctum D datum.

Rem exemplo comprobemus, ut appareat an ad usum transferri possit.

2 P a r s   p r i m a *erg. L*   12 f. patitur. *(1)* Intelligatur figura ex infinitis parallelogrammis | aeque altis *erg.* | constare, et curva ex infinitis | numero *erg.* | rectis infinite parvis, quorum parallelogrammorum unum intelligatur esse EFGH. Eritque recta EF. vel GH. infinite parva, eademque erit infinitesima rectae AE. abscissae. Cum autem parallelogram *(2)* Intelligatur *L*   14 f. infinitis *(1)* parallelogrammis *(2)* trapeziis *L*



[*Fig. 1*]

Esto infinite parva $EF = b$. recta $AE = \xi b = x$. ipso ξ exprimente numerum infinitum portiuncularum b. Figura autem intelligatur esse parabola, in qua applicata est $\sqrt{ax}$ (a posito latere recto, et x abscissa). Erit $\sqrt{\xi ba} = ED$. et quia AF. abscissa applicatae FH. est $\xi b - b$. erit $FH = \sqrt{\llcorner \xi ba - ba \lrcorner}$ et $ID = ED - FH$. erit $\sqrt{\xi ba} - \sqrt{\llcorner \xi ba - ba \lrcorner}$. Et ME erit $= \dfrac{\sqrt{_q}\ \xi ba}{\sqrt{\xi ba} - \sqrt{\xi ba - ba}}$.

Porro ratio ipsius a ad x seu ξb data est, ea intelligatur esse $\dfrac{1}{\beta}$ fiet

$$ME = \frac{\sqrt{_q\ \xi b^3 \frac{\xi b}{\cancel{\beta}}}}{\sqrt{\xi b \frac{\xi b}{\cancel{\beta}}} - \sqrt{\xi b \frac{\xi b}{\cancel{\beta}} - \frac{b^2 \xi}{\cancel{\beta}}}} \qquad \frac{\xi b^2}{\xi b - \sqrt{\xi^2 b^2 - b^2 \xi}} \qquad \frac{b^2}{b - \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{\xi}}}$$

$$ME\xi b - \sqrt{\xi^2 b^2 ME^2 - b^2 \xi ME^2} = \xi b^2.$$

Ergo $\underbrace{ME^2 \xi^2 b^2 + \xi^2 b^2 ME^2} - b^2 \xi ME^2 - 2\sqrt{\xi^4 b^4 ME^4 - b^4 \xi^3 ME^4} = \xi^2 b^4$.

$$2ME^2 \xi^2 b^2 \qquad - b^2 \xi ME^2 - \xi^2 b^4 = 2\sqrt{} \ .$$

Ergo cum $b^2 \xi ME^2 - \xi^2 b^4$ tuto negligi, velut infinities minora quam $2ME^2 \xi^2 b^2$. fiet:

$$4ME^4 \xi^4 b^4 = 2, \frown \xi^4 b^4 ME^4 - b^4 \xi^3 ME^4.$$

Male[,] ergo $\xi^2 b^4$, etc. reici non debuerant, quanquam caeteris infinities minora, quadremus, qualia sunt, fiet:

$$\overset{2}{\cancel{4}} ME^4 \xi^4 b^4 - \overset{2}{\cancel{4}} ME^4 \xi^3 b^4 - 4ME^2 \xi^4 b^6 + b^4 \xi^2 ME^4 + 2b^6 \xi^3 ME^2 + \xi^4 b^8$$
$$= \cancel{2\xi^4 b^4 ME^4} - \cancel{2b^4 \xi^3 ME^4} \qquad 0.$$

Ponatur $ME = \delta \xi b$. fiet:
$2b^8 \xi^8 \delta^4 - 2b^8 \xi^7 \delta^4 - 4b^8 \xi^6 \delta^2 + b^8 \xi^6 \delta^4 + 2b^8 \xi^5 \delta^2 + \xi^4 b^8 = 0.$

8 *(1)* Ponatur ME $= \llcorner \sqrt{_q} \delta \lrcorner\ \xi$b. Ergo *(a)* ME$\xi^2$b^2 – EM *(b)* $\sqrt{\delta}, \frown \xi^2$b^2 – $\sqrt{}$ *(aa)* dξ^3b^3 – dξ^2b^3 = ξb^2. Ergo $\delta\xi^4$b^4 – d *(bb)* $\delta\xi^3$b^3 – $\delta\xi^2$b^3 = ξb^2. *(2)* MEξb *L*

---

12 Auf der rechten Seite müsste konsequent statt des Faktors 2 vielmehr der Faktor 4 stehen. Bei der nachfolgenden Korrektur bleibt dieser Fehler stehen; er beeinträchtigt die Rechnungen bis S. 660 Z. 2 und ist die Ursache für Leibniz' anschließende Bemerkung.

Nota b non est numerus, sed linea. ξ est numerus infinitus. δ est numerus finitus quaesitus. $2b^8\xi^8\delta^4 + b^8\xi^6\delta^4 + 2b^8\xi^5\delta^2 + \xi^4 b^8 = 2b^8\xi^7\delta^4 + 4b^8\xi^6\delta^2$.
Sed non video quomodo hinc veniatur ad solutionem. Imo videtur esse haec aequatio impossibilis, examinanda ergo omnia denuo.

Breviter res eo redit: Recta ED, applicata, divisa per ID, differentiam ab ipsamet et applicata praecedente, dat rectam ME.

$$\frac{\sqrt{a\xi b}}{\sqrt{a\xi b} - \sqrt{\llcorner a\xi b - ab \lrcorner}} = ME.$$

$$\begin{array}{llcll} \text{Ergo} & \sqrt{\cancel{a}\xi b} & = & ME \frown \sqrt{\cancel{a}\xi b} & - \; ME\sqrt{\llcorner \cancel{a}\xi b - \cancel{a}b \lrcorner}. \\ & & -1 & & = \\ & & & ME \frown \sqrt{\xi b} - \sqrt{\xi b} & = \; ME \frown \sqrt{\llcorner \xi b - b \lrcorner}. \end{array}$$

Ergo $\cancel{ME^2\xi b} + \xi b - 2ME\xi b = \cancel{ME^2\xi b} - ME^2 b$.
$2ME\xi b - \xi b = ME^2 b$. Ergo $2ME\xi b - \xi b = ME^2$. seu omittendo ξb et quoniam $AE = \xi b$. erit $2ME \frown AE = ME^2$. Ergo $2AE = ME$. quod erat demonstrandum. Idemque in parabola verissimum esse aliunde notum est.

Hinc intelligi potest puncta in geometricis esse velut numeros, dividere rectam per rectam infinite parvam esse aliquo numero multiplicare aut dividere.

Hinc apparet quam difficile futurum sit ex dato AM et AE invenire ED, ⟨–⟩ enim nec ED sumi possunt, nec satis patet an sufficiat sumere bina AM.

$$\frac{\dfrac{\cancel{a^2} \quad 1}{\sqrt{\llcorner 2ax - x^2 \lrcorner}}}{\dfrac{\cancel{a^2} \quad 1}{\odot\ \sqrt{\llcorner 2ax - x^2 \lrcorner}} - \dfrac{\cancel{a^2} \quad 1}{☽\ \sqrt{\llcorner 2ax - \cancel{2ab} - x^2 - \cancel{b^2} + \cancel{2xb} \lrcorner}}} = ME.$$

19 $x - b, \square = x^2 + b^2 - 2xb$.

15–18 Hinc intelligi ... sumere bina AM. *erg. L*

19 Zur Vernachlässigung der mit b behafteten Glieder, s. u. S. 661 Z. 6 ff.

Ergo $\dfrac{1}{\text{☿}\sqrt{2ax-x^2}} = \dfrac{ME}{\odot} - \dfrac{ME}{\text{☽}}$. Ergo $1 = \dfrac{ME\frown\text{☿}}{\odot} - \dfrac{ME\frown\text{☿}}{\text{☽}}$.

$\text{☿} = \odot$. Ergo $\dfrac{ME\frown\text{☿}\frown\cancel{\odot} - ME\frown\cancel{\text{☿}}\frown\text{☽}}{\cancel{\odot}\frown\text{☽}} = 1$. Ergo $ME\frown\odot - ME\frown\text{☽} = \text{☽}$. Ergo $ME\frown\sqrt{2ax-x^2} = \text{☽} + ME\frown\text{☽}$. Ergo $ME^2\frown\odot^2 = \text{☽}^2 + ME^2\,\text{☽}^2 + 2\,\text{☽}^2 ME$. Ergo $ME^2\frown\odot^2 - \text{☽}^2 - ME^2\,\text{☽}^2 = 2\,\text{☽}^2 ME$. Ergo $+ME^4\odot^4 - 2\odot^2 ME^2\,\text{☽}^2 - 2ME^4\odot^2\,\text{☽}^2 + \text{☽}^4 + 2\,\text{☽}^4 ME^2 + ME^4\,\text{☽}^4 = 2\,\text{☽}^2 ME, \square$.

Non est tutum ipsius infinite parvi b multiplos ab initio reicere, aliaque fieri enim potest, ut eorum cum aliis compensatione, in alium plane statum veniat aequatio. Illud tamen utiliter a Wallisio, quem in eadem incidisse video, admonitum est omnes terminos in quibus habetur b^2 posse reici[,] item eos qui neque b habent, neque in b ducentur, quippe aequales utrinque prodituri.

1 f. $\dfrac{\mathrm{ME}\frown\text{☿}}{\text{☽}}$. *(1)* $\dfrac{\mathrm{ME}\frown\text{☿}\frown\odot - \mathrm{ME}\frown\text{☿}\frown\text{☽}}{\odot\frown\text{☽}} = 1$. Ergo $\mathrm{ME}\frown\text{☿}\frown\odot - \mathrm{ME}\frown\text{☿}\frown\text{☽} = \odot\frown\text{☽}$. Ergo $\mathrm{ME} = \dfrac{\odot\frown\text{☽}}{\text{☿}\frown\odot - \text{☿}\frown\text{☽}}$. Iam $\text{☿} = \odot$. ergo: *(a)* $\mathrm{ME} = \dfrac{\odot\frown\text{☽}}{\odot^2 - \odot\frown\text{☽}}$.

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
\odot\frown\text{☽} = & 2ax & - & 2ab & - & x^2 & - & b^2 & + & 2xb & \\
 & & & & & & & 2ax & - & x^2 & (2ax-x^2 \\
\hline
 & -\ 2ax^3 & + & 2abx^2 & + & x^4 & + & x^2b^2 & - & 2x^3b & \\
 & -\ 2ax^3 & - & 4a^2xb & + & 4a^2x^2 & - & 2ab^2 & + & 4ax^2b &
\end{array}$$

$\sqrt{\ } + x^4 + 4x^2a^2 - 4ax^3 \boxed{-2x^3 + 6ax^2 - 4a^2x + x^2 - 2a} = \odot\frown\text{☽}$.

$2ax - x^2 = \odot^2$.

Ergo $\mathrm{ME} = \dfrac{\sqrt{x^4 + 4x^2a^2 - 4ax^3}}{2ax - x^2 - \sqrt{x^4 + 4x^2a^2 - 4ax^3}} = \mathrm{ME} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4a^2 - 4ax}}{2ax - x - \sqrt{x^2 + 4a^2 - 4ax}}$. seu $\mathrm{ME} = \dfrac{x - 2a}{\ }$ *(b)* $\mathrm{ME} = \dfrac{\odot\frown\text{☽}}{\odot^2 - \odot\frown\text{☽}}$. Ergo $\dfrac{1}{\mathrm{ME}} = \dfrac{\odot^2 - \odot\frown\text{☽}}{\odot\frown\text{☽}}$. Ergo $\dfrac{1}{\mathrm{ME}} = \dfrac{\odot}{\text{☽}} - 1$. *(2)* $\text{☿} = \odot$. *L*

3 $\mathrm{ME}\frown\text{☽}$. Ergo *(1)* $\cancel{\mathrm{ME}^2 2ax} - \cancel{\mathrm{ME}^2x^2} = 2ax - 2ab - x^2 - b^2 + 2xb + \cancel{2\mathrm{ME}^2ax} - 2\mathrm{ME}^2ab - \cancel{\mathrm{ME}^2x^2} - \mathrm{ME}^2b^2 + 2\mathrm{EM}^2xb$. Ergo $2ax - 2ab - x^2 - b^2 + 2xb - 2\mathrm{ME}^2ab - \mathrm{ME}^2b^2 + 2\mathrm{EM}^2xb = 0$. *(2)* $\mathrm{ME}^2\frown\odot^2$ *L*   9 qui neque *(1)* a *(2)* b habent *L*

2 Ergo ... = 1.: Auf der linken Seite der Gleichung müsste das Vorzeichen vertauscht werden. Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent weiter.   8 a Wallisio: *Epitome binae methodi tangentium.* In: *Philosophical Transactions* VII Nr. 81 vom 25. März/4. April 1672, S. 4011. Leibniz paraphrasiert, s. insbesondere Z. 9 (Variante) und S. 662 Z. 8, wo Leibniz die Wallis'sche infinitesimale Einheit a nennt.

Breviter: Wallisius alia licet via, aliisque ratiocinandi loquendique modis, in eandem ante me methodum incidit. Etsi ego id minime observassem, donec non constituissem tantum, sed et iam in parabola confirmassem, et video parabolae exemplo et Wallisium usum, quippe admodum expedito.

Sed magna iam quaestio est an hac methodo datis intervallis tangentium aut perpendicularium ab applicata in altitudine sumtis, inveniri possint applicatae. Hic puto assumi debere duo intervalla pro una applicata, ut antea duae applicatae pro una tangente.

$\langle$Iam$\rangle$ $\dfrac{a}{b}$ [=] $\dfrac{NF}{KL=1} = \dfrac{FH}{LH}$. $\dfrac{ME}{HI=b=1} = \dfrac{FH+ID}{ID} = \dfrac{FH}{ID} + \dfrac{ID}{ID}$ (= 1).
$ME \frown ID = FH\ (+ID)$. $NF \frown LH = FH$. Ergo $ME \frown ID(+ID) =\ NF \frown LH$.
Ergo $\dfrac{ME}{NF} = \dfrac{LH}{ID}$. Inventa ergo est ratio LH ad ID.
Ergo et ID ad $IP = ID$ ad $LH = ME$: ad NF :
Ergo data applicata una GK, aliaque $FL + LH$. dabitur tertia $ED = GK + LH + ID$.

Porro DQ dabitur absolute, quam $\dfrac{DQ}{HI} = \dfrac{DP}{IP}$. cognitis, datur iam HI. quippe 1, ergo datur $DQ = \dfrac{DP}{IP}$. Iam $\dfrac{MN}{QD} = \dfrac{MH}{HD} = \dfrac{ME}{HD} = \dfrac{ED}{ID}$ cognita. $\dfrac{ED}{ID} = \dfrac{ME}{HI} = ME$. nota est, item $\dfrac{FH}{LH} = NF$. Ergo nota $\dfrac{\frac{ED}{ID}}{\frac{FH}{LH}}$ seu $\dfrac{ED \frown LH}{FH \frown ID} = \dfrac{ME}{NF}$. Quae dividantur per

---

10 *Dazu:* male

14 *Unter dem zweiten* $\dfrac{ED}{ID}$: $\left(\dfrac{ED}{ID} = ME\right)$

8 = *erg. Hrsg.* 8 = $\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{ID}} + \frac{\mathrm{ID}}{\mathrm{ID}}$ (= 1) *erg. L* 9 (+ID) *zweimal erg. L*

8–663,7 Die folgende Betrachtung enthält mehrere Fehler bzw. Verschreibungen. Den Hauptfehler nennt Leibniz selbst; er versucht zunächst zu verbessern, begnügt sich dann aber mit bloßen Vermerken.

11 ME: bedeutet hier $\frac{1}{ME}$.

notum $\frac{LH}{ID}$. fiet nota tandem ratio $\frac{ED}{FH} = \frac{ME}{NF}$. ac proinde constructio applicatarum, ex data ratione p r o d u c t a r u m.

Ut rectam EM productam, ita rectam ER r e d u c t a m appellare possis, rectam RM secantem, RD radium, EB sinum complementi.

Hac methodo inverso modo investigare queas tangentem, datis applicatis, in quibus nota primum $\frac{ED}{FH}$. et $\frac{ED}{ID}$. et $\frac{FH}{LH}$. Ergo et $\frac{LH}{ID} = \frac{ME}{NF}$.

Eodem modo ex datis ER caetera investigabuntur.

⊙ Vera methodus ex data producta inveniendi applicatam.

Sunto duo latera inassignabilia curvae, sibi proxima KH. HD. ⟨− − −⟩ duo tangentes in H se secantes NH. MD. tresque applicatae, ad totidem duorum laterum extrema puncta K. H. D. ⟨descriptae⟩ GK. FH. ED. ex quibus FH attingit tangentem utramque in puncto intersectionis earum H. Reliquae duae applicatae producantur, ab una tangente ad alteram, GK. donec tangenti MH occurrat in S. et ED producatur, donec tangenti NH producto occurrat in P.

Iam suppono notam esse rectam AG eiusque infinitesimam $GF = a = \langle b\rangle = FE$ vel $HI = 1$. est enim unitas constructionis. Suppono et notam esse rectam FN vel GN non minus ac EM. Nam ex cognita progressione seu loco productarum, quaeritur locus applicatarum seu figura ipsa. Constat etiam, quemadmodum ST est $= HI$, ita TH esse $= ID$, et $SH = HD$.

Cumque sit: $\frac{LH}{FH} = \left[\frac{1 = KL}{NF}\right]$. erit $(LH) = \frac{FH}{NF}$. et eodem modo $\frac{ED}{ME} = (ID)$. Porro $IP = LH$ (quia $KL = HI$, unde et $KH = HP$). Ergo $(DP =) LH - ID = \frac{FH}{NF} - \frac{ED}{ME}$. Ergo posita FH applicata velut cognita, cuius iam sequens ED indaganda

---

1 *Zu* ratio: inutiliter[,] bis utimur eadem aequatione[,] seu $\frac{ME}{NF} \times \frac{NF}{ME} = 1$.

15–22 *Daneben, durch Trennstrich abgesetzt:* $\frac{3}{1} - \frac{3}{5} = a$. $3 = a \frown \llcorner 1 - 5 \lrcorner$. *(!)* $a = \frac{12}{5}$. $\frac{12}{5} \frown 1 - 5$ fit $\frac{12}{5} - 12$.

3 Ut rectam *(1)* AM *(2)* EM *L* 20 $\frac{1 = \mathrm{ST}}{\mathrm{MF}}$ *L ändert Hrsg.*

est, constat esse $\frac{EP}{EN} = \frac{FH}{FN}$. seu $EP = \frac{EN \frown FH}{FN}$. et ED esse $EP - DP$. erit

$$ED = \frac{EN \frown FH}{FN} - \frac{FH}{NF} + \frac{ED}{ME}.$$

Ergo $$ED - \frac{ED}{ME} = \frac{EN \frown FH}{FN} - \frac{FH}{NF} = \frac{ME \frown ED}{ME} - \frac{ED}{ME}.$$

Ergo $$\frac{\frac{EN \frown FH}{FN} - \frac{FH}{NF}}{1 - \frac{1}{ME}} = \frac{EN - 1 \frown \frac{FH}{FN} \frown ME}{ME - 1} = ED.$$

Utile est autem ipsam $[FH]$ applicatam datam, supponere aequalem ipsi $[AF]$ abscissae, ad inchoandum applicatarum calculum, quoties aequationem figurae, seu calculum applicatarum quaerimus.

Figurae sunt loci applicatarum. Alioquin fieri potest ut v. g. circulus sit locus applicatarum hyperbolae si considerentur ut chordae, hyperbola vel ellipsis locus applicatarum trianguli si considerentur ut reductae, parabola locus applicatarum parallelogrammi, si functionem reductae facere intelligantur.

Videndum an sint curvae, in quibus nunquam contingit, ut applicata aliqua sit abscissae aequalis vel maior. Nam si aliqua maior est, etiam aliqua aequalis est, cum certum sit semper aliquas esse minores; quare aequalis aliqua inter maiores et minores.

Sed ut aequationem coeptam absolvamus, datur ratio EN ad ME. ergo ME appellemus βEN. Datur et ratio FN ad ME. ergo idem ME alias appellabimus γFN. Fiet ergo aequatio haec ex praecedente:

$$\frac{EN \frown FH}{FN} - \frac{FH}{FN} = \frac{\beta EN \frown ED}{\gamma FN} - \frac{ED}{\gamma FN}.$$

ergo $EN \frown FH - FH = \frac{\beta EN \frown ED}{\gamma} - \frac{ED}{\gamma}$. et $\dfrac{EN \frown FH - FH}{\frac{\beta EN}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}} = ED$.

---

14 *Über* aliquas:

5 ipsam *(1)* ED *(2)* EH *L ändert Hrsg.* 5 AE *L ändert Hrsg.* 9 vel ellipsis *erg. L*

---

8 Alioquin: Zum Kreis s. o. S. 660 Z. 19; zu Hyperbel und Ellipse vgl. N. 35 S. 584 Z. 10 f.

Sed his ambagibus non est opus, sufficit ex aequatione superiore dicere:

$$\frac{\dfrac{EN \frown FH}{FN} - \dfrac{FH}{FN}}{1 - \dfrac{1}{ME}} = ED.$$

Unde notari potest, quoties ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis, applicatae quaeruntur, unam semper applicatam ponendam velut assumtam, et sequentem velut quaesitam. Quodsi enim ex una quadam applicata assumta proxime sequens aut antecedens determinari potest figura geometrice, id est per omnia puncta describi ac determinari potest.

Unum annotandum est, antequam hinc abeamus, ipsam DP $(= LT = KS)$, item ipsam QD et QP esse ipsis infinite parvis, ut HI, infinities minores. Nam cum triangula MNH et DQH sint similia, erit $QD = \dfrac{MN \frown HD}{MH}$. Iam MN est linea infinite parva eiusdem dimensionis cum FE. Saepe enim fit, ut MN sit $= FE$. ut in parabola, aut proportionale, ut in paraboloeidibus aut hyperboloeidibus; semper ut sit eiusdem dimensionis. Et certe si MN esset linea finita, seu assignabilis, non posset intelligi NH et MD eiusdem puncti tangentes esse, quod tamen supponimus, et si id punctum rursus cogitatione in partes, quibus certe non caret, discernamus. Lineam autem infinite parvam MN per aliam lineam infinite parvam eiusdem dimensionis HD multiplicari at per infinities maiorem seu assignabilem MH dividi, est eam reddi infinities infinite parvam, seu subcubicam. HD autem infinite parvam eiusdem dimensionis cum MN patet, quia est eiusdem dim. cum HI. quod ostendo, quia $ME : ID :: MH : HD$ [*sic!*]. Iam si

3 in figura ... facientium *erg.* L   10 $\dfrac{\mathrm{MN} \frown \mathrm{HD}}{\mathrm{MH}}$. *(1)* ⟨at⟩ *(2)* aliquot *(3)* infinite parvo, | ut MN *nicht gestr.* | *(a)* id enim suppono esse *(b)* homo *(4)* Iam *(a)* punctum *(b)* MN L   18 seu *(1)* subquadraticam *(2)* subcubicam L

---

18 subcubicam: In der Variante steht richtiger subquadraticam, genauer handelt es sich um Unendlichkleine zweiter Ordnung.   19 quod ostendo: Der Beweisversuch geht fehl, die Aussage hingegen ist richtig.

QD infinities infinite parva, ergo talia erunt etiam QP et DP quae eiusdem dimensionis, quia sunt proportionales lineis eiusdem dimensionis, nam $\frac{QD}{HI} = \frac{QP}{HP} = \frac{DP}{IP}$. Sunt autem lineae HI. HP. IP. eiusdem dimensionis, quia lineis NE. NP. EP. quas eiusdem dimensionis, quippe assignabiles finitas esse, ex constructione constat, sunt proportionales, nam $\frac{HI}{NE} = \frac{HP}{NP} = \frac{IP}{EP}$. Regula autem quod quantitates quantitatibus eiusdem dimensionis proportionales sint eiusdem dimensionis inter se, manifesta, aut certe facilis demonstratu est.

Notabilis est haec doctrina de l i n e a r u m d i m e n s i o n i b u s. Sunt enim lineae variarum dimensionum, prout sunt inassignabiles infinitae, aut infinite parvae. Sunt enim quae quadratis cubis etc. Sunt contra quae radicibus quadraticis cubicisque linearum finitarum assignabilium comparantur.

Invenimus (vide pag. seq. versam sub signo $\odot$) modum ex datis p r o d u c t i s inveniendi applicatas. Nunc operae quoque pretium est invenire applicatas ex datis r e d u c t i s. Facilis autem processus est priore invento, fere enim tantum pro punctis N et M substituuntur puncta R et U, ducta perpendiculari RD ad tangentem MD et perpendiculari UH ad tangentem $\langle NH\rangle$. Quare utile erit praecedentem processum hoc loco relegere, et ea tantum notare in quibus hic variatur, ne bis eadem dicere necesse sit.

---

1 *Zu QD auf der Gegenseite, gestr.:*

$EP = FH \frown \frac{EY}{FR}$. $QD = \frac{\overset{\frac{ER}{ED}}{DP = LH - ID}}{LH}$. Ergo $QD = 1 - \frac{ER}{ED \frown LH}$. Idem $QD = NE \frown \frac{DP = EP - ED}{EP}$. Ergo $QD = NE \frown \llcorner 1 - \frac{ED \frown FR}{FH \frown EY} \lrcorner = 1 - \frac{ER}{ED \frown LH}$. Ergo $\frac{ER}{\cancel{ED} \frown LH} = ED^2 \frown \frac{FR}{FH \frown EY}$. seu $\frac{ER \frown FH \frown EY}{LH \frown FR} = ED^2$. et quia $LH = \frac{FU}{FH}$. fiet: $\frac{ER \frown FH^2 \frown EY}{FU \frown FR} = ED^2$.

---

12 vide: s. o. S. 663 Z. 8.

Igitur, cum $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ KLH sit simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ HFU. erit: $LH = \dfrac{FU}{FH}$. et $ID = \dfrac{ER}{ED}$. et $DP = \dfrac{FU}{FH} - \dfrac{ER}{ED}$.

((Iam assumo FH velut notam, et invenio $EW = \dfrac{FH \frown EU}{FU}$. Iam $WI = \dfrac{EW}{EU}$. Ergo $WI = \dfrac{\frac{FH \frown EU}{FU}}{EU}$. Ergo $WI = \dfrac{FH}{FU}$. Porro $WI \frown IP = 1$. et $IP = ID + DP$. ergo $WI \frown ID + WI \frown DP = 1$. Ergo $\dfrac{FH \frown ER}{FU \frown ED} + 1 - \dfrac{FH \frown ER}{FU \frown ED} = 1$. Recte id quidem sed nullo fructu, cum sit aequatio inter eadem, nota tamen est calculi veri. Porro cum cognitae sint rectae FH et FU. cognita etiam erit recta HU. sed de ea non est cur laboremus.))

Ducatur recta PY parallela HU. Cum sit $KH = HP$. erit $RU = RY$. et ob triangula similia HFU et PEY, fiet

$$EP = \frac{FH \frown EY}{FR} = FH + LH = FH + \frac{FU}{FH}.$$

et
$$ED = EP - DP = \frac{FH \frown EY}{FR} - \frac{FU}{FH} + \frac{ER}{ED}.$$

((Ergo $ED - \dfrac{ER}{ED} = \dfrac{FH \frown EY}{FR} - \dfrac{FU}{FH}$. Ergo $ED^2 - ER = \dfrac{FH \frown EY \frown ED}{FR} - \dfrac{FU \frown ED}{FH}$. ($ED^2 = \dfrac{ED \frown FH \frown EY}{FR} - \dfrac{ED \frown FU}{FH} + ER$.) Ergo $ED^2 - \dfrac{ED \frown FH \frown EY}{FR}$ [+] $\dfrac{ED \frown FU}{FH} = ER$. Eadem $ED = FH + ID$. et $ID = \dfrac{ER}{ED}$. Ergo $ED = \dfrac{ER}{ED} + FH$. Ergo $ED^2 = ER + FH \frown ED$. Habemus ergo

$$\cancel{ER} + FH \frown ED - \frac{ED \frown FH \frown EY}{FR} \; [+] \; \frac{ED \frown FU}{FH} = \cancel{ER}.$$

5 $= 1$. *(1)* ergo $\mathrm{FH}^2 = \mathrm{FU}^2$. seu FH = FU. quod est absurdum, errorem ergo calculo inesse necesse est. Ergo *(2)* Recte *L* 11 f. $\dfrac{\mathrm{FU}}{\mathrm{FH}}$. | An ergo breviter: si applicata cognita per suam reductam dividatur, habebitur differentia eius a proxime maiorem. Eodem modo fere breviter de reducta, ut adeo aliis ambagibus non sit opus, si modo unam applicatarum velut cognitam assumere licet. *gestr.* | et *L* 14+17 *Vorzeichen ändert Hrsg. zweimal*

11 In der ersten Teilgleichung der Kette müsste es im Nenner anstatt von FR vielmehr FU heißen. Das Versehen wirkt sich bis S. 671 Z. 9 aus.

Nullum hinc, potius hoc consideremus: $HX = RU \frown \dfrac{HO}{[OU]}$. sed nihil hoc ad rem.))

Tandem cogitemus ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ sim. HIP et QDP esse

$$QD = \frac{DP = LH - ID}{LH} \overset{\dfrac{ER}{ED}}{=} 1 - \frac{ER}{ED \frown LH}.$$ Iam assumta NE pro cognita, ideo ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia NEP et QDP fiet:

$$QD = \frac{NE \frown {}_\llcorner DP = EP - ED}{EP} = NE - \frac{ED \frown NE}{EP = FH + LH}.$$

Ergo $1 - \dfrac{ER}{ED \frown LH} = NE - \dfrac{ED \frown NE}{FH + LH}$. (seu $NE - \dfrac{ED \frown NE \frown FR}{FH \frown EY}, + \dfrac{ER}{ED \frown LH} = 1$.) vel $NE - \dfrac{ED \frown NE}{FH + LH} + \dfrac{ER}{ED \frown LH} = 1$. et quia $ED = \dfrac{FH \frown EY}{FR} - \dfrac{FU}{FH} + \dfrac{ER}{ED}$. seu $c + \dfrac{ER}{ED}$. ideo $\dfrac{ED \frown NE}{FH + LH} = \dfrac{c \frown NE + NE \frown \dfrac{ER}{ED}}{FH + LH}$ seu $g + \dfrac{h}{ED}$. ⟨ut brevitatis⟩ causa facio ⟨$c.\ g.$⟩ h. in cognitarum locum substitutis.

Iam ergo: $NE - g - \dfrac{h}{ED} + \dfrac{ER}{ED \frown LH} = 1$. Ergo $\dfrac{ER}{ED \frown LH} - \dfrac{h}{ED} = 1 + g - NE$. Ergo $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{1 + g - NE}{\dfrac{ER}{LH} - h}$. Ergo denique $ED = \dfrac{\dfrac{ER}{LH} - h}{1 + g - NE}$. $Q.\,E.\,F.$

Quod si recedere, id est ex applicata data proxime minorem quaerere velimus, patet GK facile haberi, cum sit $FH + LH$. quae cognita sunt. Eodem modo GS ex inventa aut data ED innotescit, nam differentia inter ED et GS perinde innotescit, ut LH differentia inter FH et GK[,] vel aliter etiam sed longiori ambage, supposita scilicet non tantum ED sed et FH cognita, data enim ED pariter et FH datur EP. est autem $DP = KS$. quod addatur ad GK iam notam ex posita sola FH. (Idemque aliter si ab ED subtrahatur bis ID, seu 2 ID, quia $ID = HT$. fiet GS vel $FH - ID = GS$.) Ex his intelligi potest, cum duplici modo inveniatur GS. partim ex posita sola ED. partim ex positis ED et FH simul. Hinc si ipsa ED incognita intelligatur, patet aequationem haberi ad ipsam ED

1 HU *L ändert Hrsg.* 8 $\frac{\text{ER}}{\text{ED}}$. *(1)* Ergo haec omnia $\frown$ per LH $\smile$ ER = *(2)* seu *L*

inveniendam utilem, supposita ea velut cognita, et ipsa GS bis investigata. Quod statim comprobemus.

Cum cognita sit ER posita etiam ED velut cognita, habemus etiam $EM = \dfrac{ED^2}{ER}, -2 = GM$. Iam ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia MGS et MED. erit

$$GS = \frac{ED \frown MG}{ME} = \frac{ED \frown \dfrac{ED^2}{ER} - 2\ ED}{\dfrac{ED^2}{ER}} = \frac{ED^2 - 2\ ER}{ED} = ED - \frac{2\ ER}{ED} = GS.$$

Unde illud tantum sequitur $ED - GS = \dfrac{2\ ER}{ED} = 2\ ID$ ac proinde $ID = \dfrac{ER}{ED}$. (Quod iam ante habuimus, ut pateat veritas calculi, et resolutio aequationis huius in priorem.)

Inventa iam ID. datur FH. qua tamen nondum in hac aequatione usi sumus. Ergo $ED - \dfrac{ER}{ED} = FH$. Sed quia ED hoc modo replicatur in se ipsam et quidem partim per multiplicationem partim per divisionem, ideo nondum hinc absoluta aequatio est. Nam si sic fuisset $ED - \dfrac{ED}{ER} = FH$. habuissemus aequationem $ED = \dfrac{FH}{\left[1 - \dfrac{1}{ER}\right]}$. et tali methodo paulo ante cum ex productis applicatas investigaremus, usi sumus. Nunc vero porro eundum est.

Iam $GS = GK + KS$. Et $GK = \dfrac{FH \frown NG}{NF}$. Ergo

$$\overbrace{ED - \frac{2\ ER}{ED}}^{GS} - \frac{FH \frown NG}{NF} = KS = DP; +ID\ \left(= \frac{ER}{ED}\right) = LH = \frac{FU}{FH}.$$

Ergo $ED - \dfrac{ER}{ED} = \dfrac{FU}{FH} + \dfrac{FH \frown NG}{NF}$.

((Ergo $ED^2 - ER = \dfrac{FU \frown ED}{FH} + \dfrac{FH \frown NG \frown ED}{NF}$. quia autem $FH = ED - \dfrac{ER}{ED}$. erit

11 1 – ER *L ändert Hrsg.*

14–671,7 Im Folgenden versucht Leibniz zweimal, die Größe ED zu bestimmen. Dies gelingt nicht, da Leibniz die (unrichtige) Ausgangsgleichung von S. 667 Z. 12 bzw. S. 668 Z. 12 zugrundelegt, und beidemale zusätzliche Rechenfehler hinzukommen.

$$\frac{FU \frown ED}{FH} = \frac{FU \frown ED}{ED - \dfrac{ER}{ED}} = \underset{\odot}{\frac{FU}{1 - \dfrac{ER}{ED^2}}}.\ \text{et}\ \frac{FH \frown NG \frown ED}{NF} = \underset{☽}{\frac{ED^2 \frown NG - ER \frown NG}{NF}}.$$

Ergo $ED^2 = ER + \odot +$ ☽. Ergo $ED^2 - \dfrac{FU}{1 - \dfrac{ER}{ED^2}} - \dfrac{ED^2 \frown NG}{NF} = ER\ [-]\ \dfrac{ER \frown NG}{NF}$.))

Iam ex inventa supra aequatione $\dfrac{ER}{ED = \dfrac{FH \frown EY}{FR} - \dfrac{FU}{FH} + \dfrac{ER}{ED}} = \dfrac{ER}{ED}$. Sed haec nondum satis proclivia ad reductionem, nisi invertas.

$$(\text{☿})\ \frac{\dfrac{FH \frown EY}{FR} - \dfrac{FU}{FH}}{ER} + \frac{\left(\dfrac{ER}{ED}\right)}{ER}\quad \frac{1}{ED} = \frac{1}{\underset{(\text{♃})}{\dfrac{FU}{FH} + \dfrac{FH \frown NG}{NF}}, -ED}.$$

seu ☿ $+ \dfrac{1}{ED} = \dfrac{1}{\text{♃} - ED}$. multiplicatis omnibus per ED fiet: ☿ $\frown ED + 1 = \dfrac{ED}{\text{♃} - ED}$. Ergo ☿ $\frown ED \frown$ ♃ $-$ ☿ $\frown ED^2 + 1 = ED$. sed nulla ex his reductio.
Unde patet si eadem data paulo aliter tractentur omnem saepe reductionem impediri, quae alias facilis est. Quod in regulas fortasse cogi posset, sed quas hactenus apud neminem invenio. Ratio huius rei esse videtur, inter caetera, quod per binomia dividere non possumus ut de extractione radicum nihil dicam. Videndum an quadratura hyperbolae, et constructio logarithmorum geometrica huic malo remedium afferant.

Sed nos hoc loco inventa solutione possumus esse contenti. Tantum h et g explicabimus in aequatione supra inventa. Ergo:

3 + *L ändert Hrsg.* 4 *(1)* Quam aequationem reducemus ut ante pro ED *(2)* Iam *L* 4 $\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{ED}}$. *(1)* Iam $\mathrm{ED} - \frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{ED}^2 - \mathrm{ER}}{\mathrm{ED}}$. *(2)* Sed *L*

$$ED = \frac{\dfrac{ER}{\dfrac{FU}{FH} = LH} - \dfrac{NE \frown ER}{FH, \frown LH \left(= \dfrac{FU}{FH}\right)}}{1 + \dfrac{\dfrac{FH \frown EY \frown EN}{FR} - \dfrac{FU \frown EN}{FH}}{\cancel{FH}, \frown LH \left(\dfrac{FU}{\cancel{FH}}\right)}}$$

$$= \frac{\dfrac{ER \frown FH}{LH} - \dfrac{NE \frown ER \frown \cancel{FH}}{\cancel{FH} \frown FU}}{1 + \dfrac{FH \frown EY \frown EN}{FR \frown FU} - \dfrac{EN}{FH}}$$

$$\frac{FR \frown FU + FH \frown EY \frown EN}{FR \frown FU} + \frac{EN}{FH}$$

$$= \frac{\dfrac{ER \frown FH \frown FU - NE \frown ER \frown LH}{LH \frown FU = \dfrac{FU^2}{FH}}}{\dfrac{FR \frown FU \frown FH + FH^2 \frown EY \frown EN + EN \frown FR \frown FU}{FR \frown FU \frown FH}}$$

$$= \frac{ER \frown FH^2 \frown FU \frown FR - NE \frown ER \frown LH \frown FR \frown FH}{FR \frown FU^2 + \underbrace{FH \frown EY \frown EN \frown FU} + \dfrac{EN \frown FR \frown FU^2}{FH}}$$

Hoc videtur tuto reici posse, cum divisio per ipsum faciat nimis parvum, at divisio per reliqua producit differentiam duorum planorum proximorum, id est lineam.

Nota producta ex lineis per lineas assignabilem differentiam habentes divisis, eiusdem sunt dimensionis cum differentiis linearum inassignabilibus.

[*Zusätze auf Bl. 1v°*]

Zusatz 1:

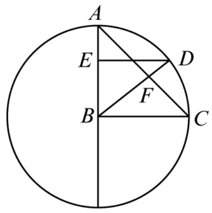
Nota si qua figura describi non possit geometrice ut figura sinuum circuli aut figura sinuum parabolae ad arcum, possint tamen omnes eius portiones abscissae quadrari. Tunc hac ipsa methodo tangentium etiam descriptio eius geometrica, seu ductus eius tangentium applicatarumque omnium inveniri potest, descripta earum figura quadratrice, et ductis lineis datis functionem obtinentibus; ergo hae omnes applicatae duci poterunt.

Praecaeteris utile est methodum adhibere in qua functionem facientes sunt applicatarum partes. Ex hac autem geometrica hoc modo mechanicarum alioquin linearum descriptione quadratura curvilinearum ex quibus pendent sequitur.

Quod si aliqua abscissarum portionum tantum quadrari potest, ut in cycloeide (exemto semicirculo) seu figura arcuum, portio sectione per medium abscissa, aut altera cuius quadraturam invenit Hugenius, etiam illa pars tantum describi poterit, id est recta inveniri poterit, arcui quadrantis aequalis, non arcubus omnibus, ex istius quidem figurae quadratura.

Zusatz 2:

An si logarithmi construi possint geometrice ex data ratione partium possit inveniri ratio totorum, v. g. $\frac{a}{x}$ et $\frac{a}{y}$ datis invenire $\frac{a}{x+y}$. Seu si sit $\frac{a}{a+b}$, an haec fractio possit a binomio liberari. Quod videtur sequi ex quadratura hyperbolae. Sufficit autem a binomio ⟨liberari⟩ aut in plures numero fractiones resolvi, dummodo eae non sint numero infinitae, nec ulla ⟨fractionum⟩ binomio ⟨affecta⟩.



[*Fig. 2*]

Datur ratio $\dfrac{ABDA}{ABCD} = \dfrac{AFB + BFDA}{ABC + ADCA}$. Datur et ratio $\dfrac{AFB}{ABC}$. Sed nondum tamen datur ratio $AFDA$ ad $ADCA$, nam si daretur[,] eadem ratione porro concluderem addendo $A[B]F$ ad $AFDA$ et ABC ad $ADCA$, cum nota sit ratio $A[B]F$ ad ABC et, ex

18–673,2 E *L ändert Hrsg. viermal*

4 in cycloeide: s. N. 17 S. 344 Z. 2 – S. 346 Z. 2 sowie Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 79 (*HO* XVIII S. 205); vgl. auch *LSB* III, 1 N. 29 (Leibniz für [Huygens?], vermutlich Sommer 1674) S. 115 f. und N. 30 (Leibniz an Oldenburg, 15. VII. 1674) S. 119 f.

hypothesi $AFDA$ ad $ADCA$, ideo etiam notam fore

$$\frac{A[B]F + AFDA = A[B]DA}{ABC + ADCA = ABCD}.$$

Data autem ratione alicuius segmenti seu noti sectoris, ad circulum, datur et ratio segmenti ad suum sectorem, et proinde quadratura eius sectoris seu circuli ex his positis daretur.

Definita tamen res est fateor. Satis enim patet ex datis partium rationibus determinari et rationes totorum. Quod statim experiri licet, quoties in numeris dantur, ex illis enim possumus colligere quantitatem totorum.

Quod si hoc unum ad Gregorii a. S. Vincentio quadraturam desiderabatur, et ex hyperbolae quadratura effici potest, ⟨daretur nobis⟩ quadratura circuli ex nota hyperbolae quadratura. ⟨Sed omnium⟩ portionum abscissarum ⟨quadratura⟩ non ideo daretur ⟨—⟩ sectione angulorum universali ⟨—⟩.

---

9 hoc unum: s. Chr. Huygens, *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli … Quibus subiuncta est* Ἐξέτασις *cyclometriae … Gregorii a S. Vincentio*, 1651 (*HO* XI S. 281–337, insbesondere S. 319–329).

40_2. PLAGULA SECUNDA

August. 1673.

Methodus tangentium inversa seu De functionibus. Pars 2^{da}

Ostendi folio de functionibus, id est parte prima (ubi figuram inspice) ED, applicatam quaesitam, data FH praecedente, datisque duabus productis FN et EM inveniri posse.

Exempli causa: Esto locus productarum, triangulum, et producta $2x$. posita x abscissa AF. erit $AE = x+1$. et $ME = 2x+2$. FH esto y. $EF = FG$ etc. $= 1$. erit $EN = FN + 1 = 2x+1$. $FM = 2x+1$.

Aequatio autem illic inventa est haec: $ED = \dfrac{EN - 1. \frown \dfrac{FH}{FN}, \frown ME}{ME - 1.}$.

Caeterum semper verum est EN esse $= FN + 1$. quaecunque sit figurae species, fiet ergo: $EN - 1. = FN + 1. - 1. = FN$. et $EN - 1. \frown \dfrac{FH}{FN} = FN \frown \dfrac{FH}{FN} = FH$. fietque $ED = \dfrac{FH \frown ME}{ME - 1.} = \dfrac{FH \frown ME}{FM} = \dfrac{y \frown 2x+2}{2x+1.} = y \frown 1 + \dfrac{1}{2x+1.} = y + \dfrac{y}{2x+1.}$. differentia: $\dfrac{y}{2x+1.} = \dfrac{ED \frown 1}{[EM]}$.

$\sqrt{ax+a}, - \sqrt{ax} = \dfrac{\sqrt{ax}}{2x+1}$. Ergo $ax + a + ax - 2\sqrt{a^2x^2 + a^2x} = \dfrac{ax}{4x^2+1+4x}$.

12–15 NB. ex his intelligitur frustra introductam duplicem tangentem, cum ea rursus e medio tollatur.

5 functionibus, | *(1)* quod inscriptum Methodus tangentium inversa seu de functionibus. August. 1673. *(2)* id est parte prima *erg.* | (ubi *L* 12 *(1)* quae ex hypothesi assumti trianguli | valorumque FN et ME *erg.* | reformata, dabit: *(2)* Caeterum *L* 15 FM *L ändert Hrsg.*

16–675,18 In den folgenden beiden Rechnungen begeht Leibniz einige Flüchtigkeiten (z. B. sollte es ab S. 675 Z. 12 anstelle von $\dfrac{a^2}{16x}$ durchweg $\dfrac{a^2}{16x^2}$ heißen), diese haben aber keinen Einfluss auf die Schlussbemerkung.

Ergo $2ax + a - \dfrac{ax}{4x^2+1+4x} = 2\sqrt{a^2x^2+a^2x}$, quadrataque utraque aequationis parte: $4a^2x^2+4a^2x - \dfrac{4a^2x^2}{4x^2+1+4x} + a^2 - \dfrac{2a^2x}{4x^2+1+4x} = 4a^2x^2+4a^2x$. Reiectisque utrobique $4a^2x^2+4a^2x$, fiet: $a^2 = \dfrac{4a^2x^2-2a^2x}{4x^2+1+4x}$, fietque $4\cancel{x^2a^2} + a^2 + 4xa^2 = 4\cancel{a^2x^2} - 2a^2x$, $a^2 + 6a^2x = 0$. Quod cum sit absurdum, hinc dignosci potest, errorem alicubi in calculo latere. Imo minime, ut post dicetur.

Si simpliciter ex data MG, GS, ST, invenire velimus FH, ita procedi potest, cum sit $\dfrac{TH}{ST} = \dfrac{GS}{MG}$, erit $TH = \dfrac{GS \frown ST}{MG}$, positaque $GS = y$, $ST = 1$, et $MG = 2x$, fiet: $TH = \dfrac{y}{2x}$, differentia ipsius y ab applicata sequente. Quod an verum sit statim experiri possumus in parabola. Posita $GS = y = \sqrt{ax}$, et FH esse $\sqrt{ax+a}$, erit $\sqrt{ax+a} - \sqrt{ax} = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{\sqrt{ax}}{2x}$, et quadrata aequatione[:] $ax + a + ax - 2\sqrt{a^2x^2+a^2x} = \dfrac{y^2}{4x^2} = \dfrac{ax}{4x^2} = \dfrac{a}{4x}$. Ergo $2ax + a - \dfrac{a}{4x} = 2\sqrt{a^2x^2+a^2x}$, ergo quadrata rursus aequatione: $4a^2x^2 + 4a^2x - a^2 + a^2 - \dfrac{a^2}{2x} + \dfrac{a^2}{16x} = 4a^2x^2 + 4a^2x$. Ergo $\dfrac{a^2}{16x} - \dfrac{a^2}{2x} = 0$, vel $\dfrac{a^2}{16x} = \dfrac{a^2}{2x}$, vel $2a^2x = 16a^2x$, seu $14a^2x = 0$. Quod absurdum, et tamen error in calculo latere non potest. Dicendum ergo, sufficere aequationem dimensionum altiorum, minoribus neglectis. Ea vero semper reperta est, nempe $4a^2x^2 + 4a^2x = 4a^2x^2 + 4a^2x$, inferiora ergo ut $\dfrac{a^2}{2x}$, item $\dfrac{a^2}{16x}$, aliaque similia, quae scilicet ad eandem dimensionem non ascendunt, reicienda sunt. Cuius rei ratio est, quod ipsa hypothesis, quod scilicet in parabola sit $MG = 2x = 2AG$, simili reiectione nata demonstrataque est.

Tota iam quaestio est, quomodo ex datis ID, seu differentiis duarum applicatarum (huc enim semper redit constructio), ipsae inveniri queant applicatae. Posita enim applicata minore y. differentia eius a maiore sequente est $\dfrac{y}{MG}$, ac proinde invenienda est

---

2 An fortasse quae velut inutilia reicimus ad haec ipsa problemata solvenda inservire possent.

figura, cuius ordinatarum series haec v. g.:

$\frac{y}{2}$, posita x minima $= 1$, et posita y applicatarum minima, inde $\underbrace{\frac{y}{2}+\frac{\frac{y}{2}}{4}}$, deinde $\underbrace{\frac{y}{2}+\frac{\frac{y}{2}}{4},+\frac{\frac{\frac{y}{2}}{4}}{6}}$, atque ita in infinitum, ita ut problema propositum solvere, sit invenire eiusmodi seriei summam.

Termini ipsi quorum summa quaeritur, seu differentiae sunt hoc loco: $\frac{y}{2}+\frac{y}{8}+\frac{y}{48}+\frac{y}{384}$ etc, vel $\frac{y}{1}\;\;\frac{y}{4}\;\;\frac{y}{24}\;\;\frac{y}{192}$ etc, vel divisis omnibus per 4 seriem hanc $\frac{y}{1}\;\;\frac{y}{6}\;\;\frac{y}{48}$ et ita porro. Si x posita fuisset $\frac{1}{2}$, $2x$ fuisset 1, et habuissemus seriem

$$\frac{y}{1}\quad\frac{y}{2}\quad\frac{y}{6}\quad\frac{y}{24}\quad\frac{y}{[120]}\ \text{etc.}$$

Eiusmodi ergo seriei sane admirabilis, semperque variantis, ut nec in aequationem revocari possit, summa iniri potest, ope parabolae, scilicet in infinito, ita enim crescunt differentiae inter parabolae applicatas, scimus enim primam seu minimam eius applicatarum. Sed et differentiarum harum series iniri potest, si y seu prima assumta ponatur esse linea assignabilis. Atque ita habemus modum aequationes explicandi serierum replicatarum in se ipsum, ut hoc loco $\frac{y}{MG}$, quando scilicet y explicatur per x et aliud y praecedens. Sed ubi in seriem res reducta est, y est semper eadem.

---

1 In hyperbola primus terminus est $a^2 = y$. a quo decrescitur, in parabola $\sqrt{a}$, a quo crescitur.

8 125 *L ändert Hrsg.*

---

1 Bei der Berechnung der Reihe verwendet Leibniz irrtümlich die Ordinatendifferenz anstelle der Ordinaten (s. aber unten z. B. S. 683 Z. 7 f.), zudem sind die Umformungen der Reihe nicht ganz korrekt. Die Schlussfolgerungen sind aber im Wesentlichen richtig. Insbesondere erkennt Leibniz den fundamentalen Zusammenhang seiner Reihe mit der der reziproken Fakultäten.

Hoc modo infinitae aliae series haberi possunt, ut si MG ponatur $x + \dfrac{xq^2}{q^2+x^2}$, etc., aliisque modis infinitis.

Sed ut datae seriei summa reperiatur, idem est cum problemate, ex dato loco functionum invenire locum ordinatarum.

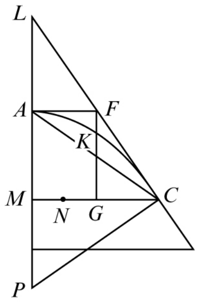


fig. 1.

$AM = x. \quad MC = y. \quad PC = s. \quad PA = v. \quad PM = v - x.$
$PC^2 = MC^2 + PM^2, = MC^2 + \underbrace{PA, -AM,}\square$, vel $s^2 = y^2 + v^2 + x^2 - 2vx$.

Ponatur iam $v = \dfrac{a}{2} + x$. erit $v^2 = \dfrac{a^2}{4} + x^2 + ax$. et $2vx = ax + 2x^2$.

fiet: $s^2 = y^2 + \dfrac{a^2}{4} + x^2 + ax + x^2 - ax - 2x^2$. fietque $s^2 = y^2 + \dfrac{a^2}{4}$. Quod statim ab initio poterat sine ambagibus dici.

$\dfrac{y^2}{\sqrt{ax}} = \dfrac{x^3}{a^2}$, ergo $\dfrac{y^4}{ax} = \dfrac{x^6}{a^4}$, vel $\dfrac{y^4}{x} = \dfrac{x^6}{a^3}$, vel $y^4 = \dfrac{x^7}{a^3}$, contra $y^4a^3 = x^7$. Unde fit $4y^4a^3 = 7x^6l$, eritque $l = \dfrac{4y^4a^3}{7x^6}$.

$ax^2 - a^3 = y^3$, vel $ax^2 = y^3 + \cancel{a^3}$, unde $2axl = 3y^3 + \cancel{a^3}$, vel $l = \dfrac{3y^3}{2ax}$.

12–678,1 $\frac{3y^3}{2ax}$. *(1)* $\frac{x^2a}{2a^2+y^2} =$ l. reddatur, fiet: $2a^2l + y$ *(2)* $\frac{y^2a}{2a^2+2x^2}$ *L*

10 Unde fit: l bezeichnet hier und im Folgenden die nach dem Sluse'schen Verfahren bestimmte Subtangente.

$\dfrac{y^2a}{2a^2+2x^2}=l.\qquad \dfrac{2y^2a^2+2y^2x^2}{x^2a}$ [*Formel bricht ab*]

Videtur regressus functionum problema esse quod pertineat ad algebram illam mirabilem, reflexam in se ipsam de qua et alibi monui. V. g. invenire aequationem, quae certo quodam modo tractata, producat aliquid datum. V. g. aequationem invenire, loci cuiusquam naturam exprimentem, in quo differentia inter duo semiquadrata applicatarum, sit data.

Esto l data: $\dfrac{y^2a}{a^2+x^2}=l.\quad \dfrac{\dfrac{2y^2a}{2}}{a^2+\dfrac{3x^2}{3}}=l$, fiet $la^2+\dfrac{3lx^2}{3}$, et restituto x in locum l, abiectisque exponentibus multiplicantibus, fiet: $a^2x+\dfrac{x^3}{3}=\dfrac{y^2a}{2}$. Atque ita exemplum habemus data functione inveniendi figuram, quod facit, ut nec de reliquis desperem.

Difficultatem mihi pati videtur regula Slusiana quoad regressum in certae cuiusdam speciei aequationibus: v. g. in hyperbola $y^2=x^2-a^2$. Reiecto a^2 ab aequatione caeterisque ut iubet factis, fiet: $2y^2=2xl$. fietque $\dfrac{2y^2}{2x}=l=\dfrac{y^2}{x}$, positoque $y^2=x^2-a^2$, fiet: $l=x-\dfrac{a^2}{x}$. Quod videtur utique verissimum, sed regressus in his difficilis, videtur tamen agnosci posse quoniam non potest y^2 esse $=x^2$, fieret enim locus linea recta, contra hypothesin, regressus hic foret difficillimus. Eligenda nimirum aequatio, quae hoc modo tractata sibi ipsi consentiat. In eo etiam regressus difficilis, quod bis saepe ponendi termini, iidem, qui se non debent mutuo tollere, sed alter eorum abici.

Nota[:] Non tantum hac methodo summae serierum quarundam sane mirabilium haberi possunt, sed et notari potest, figuram ipsam, cuius applicatarum differentia quaeritur, esse aequalem illis differentiis in numeros arithmeticae progressionis ductis.

Item hoc enuntiandi modo figurae omnes paraboloeides fiunt harmonicae, item omnes hyperboloeides.

6 f. data. Invenire l. esto l. data invenienda = *L ändert Hrsg.* 16 f. In eo ... abici. *erg. L*

3 alibi monui: s. z. B. *LSB* VI,3 N. 41 S. 408.

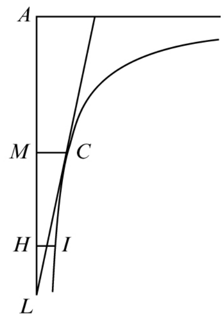


fig. 2.

Est semper in hyp. $AM = ML = x$. Ergo in hyperbola erit

$$\frac{y}{1}\quad a^2 \qquad \frac{y}{2}\quad a^2-1 \qquad \frac{y}{6}\quad a^2-2 \qquad \frac{y}{24} \qquad \frac{y}{[120]} \qquad \text{etc.}$$

Ergo hyperbola et parabola omnesque hyperboloeides ac paraboloeides hoc quidem modo[,] si istae series in distantias ipsas, seu x ducantur[,] videntur homogeneae esse; imo res exactius investiganda. Sequeretur enim inde esse ut sinus angulorum contingentiae; seu ut minimas applicatas. Sed haec accuratius rimanda. Latet enim in his quiddam mirabile.

Minima omnium applicata in hyperbola infinite abest. Sed nihil refert, si cum parabola conferri non potest, poterit conferri cum hyperboloeide altiori, quarum omnium quadratura habetur.

Inspice hic figuram 1. Ducatur AF parallela MC, et FG parallela AM. F autem est in tangente LC. Summa omnium AF ad AM applicatarum aequatur segmento $AKCA$ duplicato, ut alibi demonstratum est. Igitur summa omnium GC aequatur triangulo AMC. Haec alibi a me inventa ac demonstrata, convertere hoc loco tentemus in rem nostram.

13 *Zur Variante:* rectius mox

2 a^2, a^2-1, a^2-2 *erg. L* 2 125 *L ändert Hrsg.* 4 si istae ... ducantur *erg. L* 8 cum *(1)* paraboloeide *(2)* hyperboloeide *L* 13 AMC | duplicato *gestr.* |. Haec *L*

Quaeritur figura, cuius producta ML, sit semper dupla AM, seu $2x$. Manifestum est applicata aliqua posita y, eius differentiam ab applicata sequenti esse $\frac{y}{2x}$. Quare minima applicata posita y, erit pene minima $y + \frac{y}{2x}$, et posita abscissa x, minima $= 1$, erit pene minima applicata: $y + \frac{y}{2}$. Iam posita MC applicatarum minima $= y$. et $AM = 1$. erit $AF = \frac{y}{2}$. et $GC = \frac{y}{2}$. Porro alibi a me demonstratum est omnium $\frac{MG}{2} = \frac{AF}{2}$ summam aequari segmento $AKCA$. Ergo posito $NG = \frac{AF}{2}$. summa omnium NC aequabitur triangulo AMC. Ergo hoc loco

$$\underbrace{GC = \frac{y}{2} \; + \; NG = \frac{y}{4}}_{NC} \quad = \frac{3y}{4}.$$

ductum in $AM = 1$. seu $\frac{3y}{4} \frown x = x$ in $NC = \frac{3}{4}y$. triangulo.

9 seu *(1)* $\frac{3\mathrm{y}}{4} \frown 1 = \mathrm{AMC} = \frac{\mathrm{y}}{2} \frown 1$ *(2)* $\frac{3\mathrm{y}}{4} \frown \mathrm{x} =$ *(a)* $\mathrm{AMC} = \frac{\mathrm{y}}{2} \frown \mathrm{x}$ *(b)* x in *L*

7 hoc loco: Leibniz unterscheidet nicht hinreichend zwischen oberer Grenze und Integrationsvariabler; er erhält daher einen Widerspruch, der einen Neubeginn erzwingt.

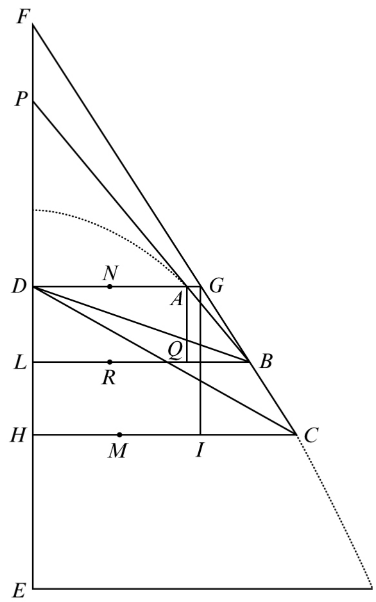


fig. 3.

Si sit polygonum quotcunque laterum AB. BC. etc. sumtaque directrix ad quam latera omnia referantur DE. Ducatur tangens CBF quae rectam DA ipsi DE perpendicularem productam secet in G. Recta $DG = HI$, applicata ad HL, aequatur triangulo DBC duplicato, ut alibi demonstratum est, et ideo HI dimidiata in M, ducta in LH, seu rectangulum LHM triangulo DBC aequatur. Eodem modo $LDN = DAB$.

Data iam $LD = AQ$, et DP, quaeritur $DA = LQ$, et QB.

Esto $LD = x$. $DP = p$. $DA = y$. erit $QB = \frac{yx}{p}$. Sed ad ipsam y cognoscendam opus foret alia adhuc aequatione; sed cuius ego principium invenio nullum. Verum est quidem summam omnium RB posita [$2RQ = LQ$.] semper aequari triangulo. Sed non video quid inde duci queat, tentandum tamen.

9 RQ = 2LQ *L ändert Hrsg.*

Esto quaedam recta sumta pro applicata $= b$. positaque minima $x = \xi$. fiet $\frac{b\xi}{p} = b - y$. posito y esse applicatam sequentem quae quaeritur. Erit $b - \frac{b\xi}{p} = y$. positoque $\xi = 1$. et $p = 2x$. fiet $b - \frac{b}{2x} = y$. Iam fiat $DG = g$. patet esse $\frac{DG = g}{DF = x} = \frac{LB = b}{LF = p = 2x}$. fiet $g = \frac{bx}{p}$. hoc loco $= \frac{b}{2}$. et $LR = \frac{b}{4}$. Eritque $QB = \frac{b}{2}$, et $RB = \frac{3}{4}b$, et erit summa omnium $RB = \frac{bx}{2}$.

(At si, sumta sit non b, sed proxime minor nempe $y = b - \frac{b}{2x}$, erit pro x ponendum $x - 1$, et pro p ponendum $2x - 2$, et pro $\frac{yx}{p}$ fiet $b - \frac{b}{2x}, \frown \frac{x-1}{2x-2} = \frac{b}{2} - \frac{b}{4x}$. Subtrahatur ab $y = b - \frac{b}{2x}$, restat $\frac{b}{2} - \frac{b}{4x}$, cui addatur prioris dimidium $\frac{b}{4} - \frac{b}{8x}$, fiet: $\frac{3b}{4} - \frac{5b}{8x} = DG$.)

At summa omnium RB, demta ultima RB, seu demta $\frac{3}{4}b$, aequatur $y \frown \frac{x-1}{2} = b - \frac{b}{2x} \frown \frac{x-1}{2}$. seu $\frac{b \frown x}{2} - \llcorner b - \frac{b}{2x}, \frown x - 1, \lrcorner = \frac{3}{4}b$. sive $\frac{x}{2} - \llcorner 1 - \frac{1}{2x}, \frown x - 1 \lrcorner = \frac{3}{4}$. Ita evanescit b et cum eo calculus. Si relinquas $\frac{b \frown x}{2} - \llcorner y \frown x - 1 \lrcorner = \frac{3}{4}b$, vel $\frac{bx}{2} - \frac{3}{4}b = y \frown x - 1$, vel $y = \frac{\frac{b \frown x}{2} - \frac{3}{4}b}{x - 1} = y$. Ergo $\frac{\frac{x}{2} - \frac{3}{4}}{x - 1} = \frac{y}{b}$. Unde nihil novi sed idem fit quod supra $y = b - \frac{b}{2x}$.

8 $-\frac{5b}{8x}$ *(1)*, et ducatur in x − 1, fiet: $\frac{3bx}{4} - \underbrace{\frac{5b}{8} - \frac{3b}{4}} + \frac{5b}{8x} = \frac{xy}{2}$. *(2)* = DG.) *L*

1–13 Die folgende Betrachtung leidet unter unklarer Bezeichnungsweise, vor allem die Z. 6–8, welche Leibniz deshalb auch eingeklammert, d. h. aus dem laufenden Text herausgenommen hat. Außerdem enthält sie verschiedene Ungenauigkeiten, insbesondere wiederholt Leibniz in Z. 10 den vorherigen Rechenfehler.

Esto in fig. 2. portio hyperbolae vel hyperboloeidis cuiusdam $MCHI$. maxima applicata assumta $MC = m$. minima assumta $HI = h$. $AM = c$ (vel etiam $AH = AM + MH = c + x$). et semper $AM = ML$. erit differentia inter duas quaslibet applicatas proximas $\dfrac{y}{c+x}$, et quia $y = \dfrac{a^2}{c+x}$, fiet differentia inter duas applicatas proximas $\dfrac{a^2}{c^2+x^2+2cx}$. Unde patet differentias duplicem in modum exprimi posse, vel per modum loci, vel terminis semper in se reflexis, ut si nesciremus esse $y = \dfrac{a^2}{c+x}$.

Prima y nota est, nempe (1) m, fiet (2) $m + \dfrac{m}{c+x}$ proxime maior, (3) $\dfrac{m + \dfrac{m}{c+x}}{c+x}$, (4) $\dfrac{m + \dfrac{m}{c+x}}{c+x}$ *(!)*, vel potius erunt differentiae:

---

7 *Zu* nempe *am Rande:*

$$\begin{array}{l}
\dfrac{m}{-} + \dfrac{m}{c+x} \\
\overline{\phantom{m + \dfrac{m}{c+x}}} + \dfrac{m + \dfrac{m}{c+x}}{c+x} \\
\overline{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} + \dfrac{\overline{\ldots\ldots\ldots}}{c+x}
\end{array}$$

3 = ML. | eritque differentia inter duas quaslibet applicatas proximas c + x *streicht Hrsg.* | erit *L*

7–684,4 Die mnemotechnische Darstellung der Folge ist in sich konsequent, nicht aber die explizite Ausrechnung. Setzt man, wie Leibniz, $c + x = g$ sowie $m = m_o$, ergibt sich für das allgemeine Glied $m_n = \dfrac{m_o\,(g+1)^n}{g^n}$ und für die Differenz $m_n - m_{n-1} = \dfrac{m_o\,(g+1)^{n-1}}{g^n}$. Der Fehler wirkt sich bis zum Ende von Teil 2 aus.

$$\frac{m}{c+x} \qquad \frac{m}{c^2+x^2+2cx} \qquad \frac{m}{c^3+3cx^2+3c^2x+x^3} \qquad \text{etc.}$$

$$\text{Vel} \quad m \quad \frac{mc+mx+m}{c+x} \quad \boxed{\frac{mc+mx+m}{c+x} + \frac{\frac{mc+mx+m}{c+x}}{c+x} \quad \text{vel}}$$

$$\frac{\llcorner mc+mx+m, \smallfrown c+x \lrcorner + mc+mx+m}{c^2+x^2+2xc}$$

seu posito $c+x=g$, fiet: $m \quad \dfrac{mg+m}{g} \quad \dfrac{mg^2+mg+m}{g^2} \quad \dfrac{mg^3+mg^2+mg+m}{g^3}$

Memorabilis haec est observatio, si qua unquam: applicatas hyperbolae ita crescere: Et quoniam idem manet m, eo omnia possunt dividi, atque ipsum omitti, salva seriei ratione. Quoniam autem x semper crescit, arithmetica progressione, etiam g semper arithmetica ratione descrescere putandum est.

Fietque series haec:

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{a^2}{c} \ \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \smallfrown m & 1=m. \text{ id est, omnia ducunda in } m & & \odot \\
\dfrac{a^2}{c-1} \ldots\ldots\ldots \dfrac{g+1}{g} \smallfrown m & (g=c-x=c-1. \text{ quia } x \text{ hic } =1.) & =1+\dfrac{1}{g} & \\
\dfrac{a^2}{c-2} \ldots\ldots \dfrac{g^2+g+1}{g^2} \smallfrown m & (g=c-2. \text{ quia } x=2.) & =1+\dfrac{1}{g}+\dfrac{1}{g^2} & \\
\dfrac{a^2}{c-3} \ldots \dfrac{g^3+g^2+g+1}{g^3} \smallfrown m & (g=c-3.) & =1+\dfrac{1}{g}+\dfrac{1}{g^2}+\dfrac{1}{g^3} & \\
\dfrac{a^2}{c-4} \ldots \dfrac{g^4+g^3+g^2+g+1}{g^4} \smallfrown m & (g=c-4.) & =1+\dfrac{1}{g}+\dfrac{1}{g^2}+\dfrac{1}{g^3}+\dfrac{1}{g^4} &
\end{array}$$

etc.

10–15 *Zum Schema:* Error

4 *(1)* Ecce ergo regulam progressionis[:] semper m, ducta in potestatem aliquam ipsius c + x, et aucta eadem m, ducta in potestatem proxime inferiorem ipsius c + x, divisaque per potestatem *(2)* seu *L*

Seriei huius ut fiat additio:

$$\left.\begin{matrix}1\\[2ex]\dfrac{g+1}{g}\end{matrix}\right\}\dfrac{2g+1}{g}$$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{2g+1}{g}\\[2ex]\dfrac{g^2+g+1}{g^2}\end{matrix}\right\}\dfrac{3g^2+2g+1}{g^2}$$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{3g^2+2g+1}{g^2}\\[2ex]\dfrac{g^3+g^2+g+1}{g^3}\end{matrix}\right\}\dfrac{4g^3+3g^2+2g+1}{g^3}$$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{4g^3+3g^2+2g+1}{g^3}\\[2ex]\dfrac{g^4+g^3+g^2+g+1}{g^4}\end{matrix}\right\}\dfrac{5g^4+4g^3+3g^2+2g+1}{g^4}$$

et ita in infinitum.

Sed sciendum est hanc additionem decipere, nisi caveamus, quoniam scilicet g semper mutat valorem, resumenda ergo

$$1+\frac{g+1}{g}=\frac{2g+1}{g}$$

$$\frac{2g+1}{g}+(2)\frac{g^2+g+1}{g^2}=\frac{2g(2)g^2+(2)g^2,,+g(2)g^2+g(2)g+g}{g(2)g^2}=$$

$$=\frac{3g(2)g^2+(2)g^2+g(2)g+g}{g(2)g^2}$$

$$\frac{3g(2)g^2+(2)g^2+g(2)g+g}{g(2)g^2}+(3)\frac{g^3+g^2+g+1}{g^3}=$$

$$=3g(2)g^2(3)g^3+(2)g^2(3)g^3+g(2)g(3)g^3$$

Sed haec prolixiora, sufficit ergo repraesentatio sub signo ⊙

Caeterum ne labamur, aut potius ne supra forte lapsi simus, resumendus est calculus.

11–15 Die geklammerten Zahlen des Schemas bezeichnen Indices, sie stellen einen der frühesten Versuche Leibniz' zu einer Indexschreibweise dar; s. dazu E. Knobloch, *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672–1676)*, 1978, S. 29–31.

$$m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m+\frac{m}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{} + \frac{m+\dfrac{m}{g}}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{} + \frac{m+\dfrac{m}{g}+\dfrac{m+\dfrac{m}{g}}{g}}{g} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ m$$
$$\ldots\ldots\ \frac{mg+m}{g}$$
$$\ldots\ldots\ \overline{} + \frac{mg+m}{g(2)g} = \frac{\overbrace{mg^2(2)g+mg^2+mg(2)g+mg}^{\text{☿}}}{g^2(2)g}$$
$$\ldots\ldots\ \text{☿} + \frac{\text{☿}}{(3)g} = \frac{\begin{array}{l} mg^4(2)g^2(3)g+mg^4(2)g^2,,+mg^4(2)g(3)g+mg^4(2)g,,+ \\ +mg^3(2)g^2(3)g+mg^3(2)g^2,,+mg^3(2)g(3)g+mg^3(2)g \end{array}}{g^4(2)g^2(3)g}$$

Patet ergo supra fuisse erratum, diversis $\underline{\underline{g}}$ inter se confusis.

Summam huius seriei inire est hyperbolam quadrare; ut tamen inde tentemus approximationes derivare in summam inquirendum est.

Ponatur autem $g = c-x$. vel $c-2x$. vel $c-3x$. ac decrescere semper g eo usque donec plane evanescat. Tunc manifestum est unumquemque terminum per idem g multiplicari per quod dividitur, seu toties poni quot in g sunt unitates; ac proinde

---

1+4 *Neben den g der Hauptnenner jeweils:*
Dazu am Rande: g simplex $= c \mp x$. g nominator binomii significat $c \mp 2x$. trinomii $c \mp 3x$. etc.

$$mg \quad + \quad m \quad + \quad m+\frac{m}{g} \quad + \quad m+\frac{m}{g}+\frac{m+\frac{m}{g}}{g} \quad \text{etc.} \qquad \text{vel}$$

$$2mg-m \quad + \quad \frac{m}{g} \quad + \quad \frac{m}{g}+\frac{m+\frac{m}{g}}{g} \quad \text{etc.}$$

aequari summae omnium, ac proinde ipsi spatio hyperbolae asymptoto. Atque hoc iterum repeti potest, nisi quod notandum g quod abicitur hoc modo fore maius unitate numero repetitionum termini a quo abicitur. Si iterum repetitur postea abiectio, g erit debito maior binario. Semper autem quoties abiectio fit, toties addi potest mg. Sed g est minor unitate quam proxima ante (Caeterum quod omnium maxime notandum, summa ipsa differentiarum inter applicatas: $m \quad \frac{m}{g} \quad \frac{m+\frac{m}{g}}{g}$ etc. esse $= a^2$ seu ipsi asymptoto.), fiet summa

$$mg, \frown g, + \frac{m}{g} \frown 1 + \frac{m}{(2)g} \frown 2 \text{ etc.}$$

Id alias peculiari tabula accuratius deducendum.

---

1 f. 1) restat mg
2) .... $+m$
3) .... $+m+\frac{m}{g}$
4) .... $+m+\frac{m}{g}+\frac{m+\frac{m}{g}}{g}$
etc.
Summa omnium applicatarum.
Sed semper appropinquari ad hanc summam potest si ista multiplicatio per g continuetur.

40_3. PLAGULA TERTIA

August ⟨1673⟩

Pars [III$^{\text{tia}}$]

Methodi tangentium inversae et de functionibus.

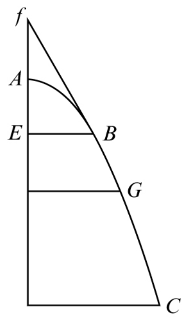
Regressus an haberi possit a tangentibus, aut aliis functionibus ad ordinatas, quaestio est magna.

Exempli gratia[:]

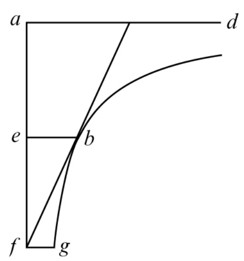
$ax = y^2$, unde fit $al = 2y^2 = 2ax$. Ergo $l = 2x$. Data ergo hac aequatione $l = 2x$, multiplicetur utrumque per a, fiet $al = 2xa$ etc. Si sit $l = x$. $al = ax$.

$a^2 = yx$. Ergo $yx = yx$. Ergo $yl = yx$.

Res est accuratissime investiganda, per canones aequationum, ut appareat quot modis aliquid produci possit ex aliis aequationibus, et quaenam postea ex illis eligi debeat. Est quaedam ipsius analyseos analysis. Sed in qua profecto consistit apex scientiae humanae, in hoc quidem genere rerum.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Si sit parabola, $ABGC$. et spatium hyperbolae asymptoton $adbgf$. ita ut minima seu prima parabolae sit punctum, prima seu maxima hyperbolae sit infinita seu asymptotos. Ante omnia minimae atque maximae applicatarum investiganda quantitas. Nimirum in

3 IV$^{\text{ta}}$ *L ändert Hrsg.* 9 ax. | Ergo ax = ax. a = a. *gestr.* | *L* 10 yx. | $\frac{a^2y}{xy}$ = l. Ergo $a^2y = x^2y$. *gestr.* | *L* 16 adbgf. *(1)* sumanturque in utraque ordinatae duae, EB, FG, et *(2)* ita *L*

parabola, ob $ax = y^2$, posita x minima $= \frac{1}{2}$, fiet $\frac{a}{2} = y^2$, et $y = \sqrt{\frac{a}{2}}$. In hyperbola, ob $a^2 = yx$, posita x minima $= 1$, fiet $a^2 = y$.

Sumatur abscissa in parabola $\underline{AE}$, eiusque dupla in hyperbola $\underline{ae}$. indeque ducta applicata $\underline{EB}$, vel $\underline{eb}$. ad abscissam perpendiculari ad punctum B vel b. ducatur tangens $\underline{Bf}$. vel $\underline{bf}$. quae axi seu directrici assumtae occurant in f. Constat in parabola $\underline{Ef}$ esse $= 2\underline{AE}$, et in Hyperbola $\underline{ef}$ esse $= \underline{ae}$. et quoniam in hypothesi nostra semper $\underline{ae}$ duplum est $\underline{AE}$, erit $\underline{Ef} = \underline{ef}$.

Porro alibi demonstratum est, differentiam inter duas applicatas proximas seu infinite parvo dissitas intervallo esse, a p p l i c a t a m alterutram in minimam x ductam, et per p r o d u c t a m suam divisam. Ideoque cum utrobique producta sit x, et in parabola minima x sit $\frac{1}{2}$, in Hyperbola minima x sit 1. hinc ut a prima applicata ordiamur, series differentiarum in parabola haec erit:

$$0 \qquad \sqrt{\frac{a}{2}} \qquad \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}\;\frac{1}{2}}{1} \qquad \frac{\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}\;\frac{1}{2}}{1}\;\frac{1}{2}}{2}$$

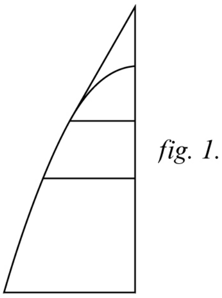
$$0 \qquad \sqrt{\frac{a}{2}} \qquad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}}{1} \qquad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{2}}}{1}}{2} \qquad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{2}}}{1} + \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{\frac{1}{8}\sqrt{\frac{a}{2}}}{1}}{2}}{3} \qquad \text{etc. in infinitum.}$$

$$0 \qquad \boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} \qquad \frac{1}{2}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} \qquad \frac{1}{4}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} + \frac{1}{8}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} \qquad \frac{1}{6}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} + \frac{1}{12}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} + \frac{1}{24}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} + \frac{1}{48}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}}$$

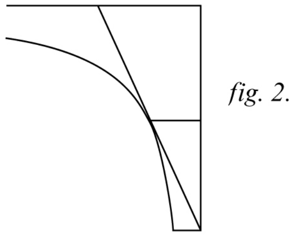
Si sit hyperbola, pro $+$ adhibendum $-$. fietque[:]

$$a^2 \qquad \frac{a^2}{1} \qquad \frac{a^2 - \frac{a^2}{1}}{2} \qquad \frac{a^2 - \frac{a^2}{1} - \frac{a^2 - \frac{a^2}{1}}{2}}{3}$$

8 Porro: s. o. N. 40_1 S. 660 Z. 5 f.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

Si sumatur non asymptotos ut fig. 2. sed axis hyperbolae, vid. fig. 1. pro directrice, applicata omnium minima sic habebitur[:] $2ax + x^2 = y^2$, vel $\sqrt{2a+1} = y$. cum in parabola sit $\sqrt{a} = y$. In circulo erit $\sqrt{2a-1} = y$. Porro $2al \mp 2xl = 2y^2$, fiet $l = \dfrac{y^2}{a \mp x} = \dfrac{2ax + x^2}{a \mp x} = x + \dfrac{ax}{a \mp x}$.

Ergo posita $\sqrt{2a \mp 1} = y$, fiet:

$$y \qquad \frac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1} \qquad \frac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1}}{4a \mp 2} \qquad \frac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1} + \dfrac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1}}{4a \mp 2}}{6a \mp 3} \qquad \text{etc.}$$

Quoniam autem differentiae in distantias a vertice 1. 2. 3. 4. ... ductae dant summam complementi figurae, hinc[:]

$$y \qquad \frac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1} \qquad \frac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1}}{2a \mp 1} \qquad \frac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1} + \dfrac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1}}{4a \mp 2}}{2a \mp 1}$$

Complementum circuli aut hyperbolae latus rectum transverso aequale habentis ad quadratum circumscriptum.

2 *(1)* An fortasse comparatio *(2)* Si *L*

6 fiet: Die Nenner in der Folge sind bis auf den Nenner des zweiten Gliedes unrichtig: anstelle von $2an \mp n$ müsste es jeweils $2an \mp n^2$ heißen. Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent weiter.

Inventum hoc est universalissimum, cuiusque ope progressio ordinatarum cuiuscunque figurae exhiberi potest geometrice infinita serie numerorum rationalium, ita ut habeatur m e t h o d u s u n i v e r s a l i s, exhibendi quadraturas a r i t h m e t i c a s, prorsus exactas, et m e c h a n i c a s quantumlibet g e o m e t r i c i s propinquas, usui cuilibet suffecturas; data figura quacunque.

Hoc autem in qualibet figura succedere cuilibet manifestum est, quia in qualibet figura $\underline{l}$ exprimi potest fractione quam nulli ingrediuntur termini irrationales. At inquies interdum si alterutram indeterminatarum eleminare velis, non poteris carere terminis irrationalibus. Respondeo non esse necessariam hanc eliminationem, etsi quando fieri potest salva rationalitate, utilis sit. Quoniam enim ipsa y non variatur, contenti enim prima sumus, quam cognitam suppono. Caetera omnes ex ipsa pariter et x analytice componuntur. Opus autem est ad hunc calculum y p r i m a m assumere non minimam maximamque applicatarum, finitam, aut infinite parvam quoties illa non potest explicari, nisi per irrationalitatem; sed potius aliquam finitam, assumtam, pro arbitrio. Imo nil refert aliquando etsi eligas minimam vel maximam applicatarum, licet irrationales; quoniam statim eliminari potest, omnibus per eam divisis; quoties scilicet illa ex valore ipsius $\underline{l}$ eliminari potuit.

Q u a d r a t u r a a r i t h m e t i c a est aream figurae exacte ac geometrice exhibere infinita serie numerorum rationalium. G e o m e t r i c a ac plane perfecta est quadratura, quoties finita magnitudine exacte exhiberi potest area; denique m e c h a n i c a est cum area finita exhiberi potest magnitudine, cuius differentia a vera tam parva est, ut in praxi negligi possit.

Quadratura circuli arithmetica a nemine ante me data est, mechanica, quae ad partes quoque eius geometrice designabiles extendatur, ita absoluta.

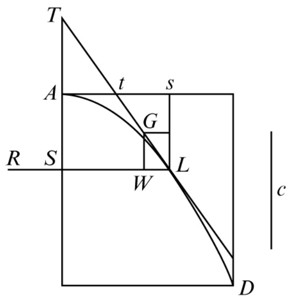
Hactenus de arithmetica figurata tam multa post Diophantum scripta sunt, sed ita ut ultra quadrata, cubos, etc. tum trigona, pentagona, pyramides etc. breviter ultra figuras rectilineas itum non sit. At parabolam, hyperbolam, quod parum est, imo circulum et ellipsin repraesentare in numeris, et quidem non per approximationem sed exacte ac geometrice, imo generaliter omni figurae geometrice arithmeticam respondentem exhibere rationalem (nam irrationalem cuilibet facile quivis exhibuerit); res fortasse a nemine ne

15 aliquando *erg. L* 18 est *(1)* exhibere infinitam seriem *(2)* aream *L* 20 exacte *erg. L*
23 f. Quadratura ... extendatur, *(1)* a tabulis ⟨—⟩ *(2)* ita (*a*) per (*b*) absoluta. *später erg. L*

sperata quidem aut suspicione libata est. Adeo ut etiamnum plerisque impossibilem visum iri, non dubitem.

Vieta numerosam aequationum omnium resolutionem et expressionem mechanicam absolvit, et mathematicam practicam ingenti beneficio sibi aeternum devinxit. Restabat quadratura figurarum omnium arithmetica, et mechanica areae cuiusque expressio, sed methodo facili et universali. Huius ego problematis maximi, si quod aliud in geometria, si ad usum vitae inventa exigantur, detectionem mihi arrogare possum.

Sed hinc videtur sequi aliquid absurdum; nimirum seriem aliquam terminorum inter se asymmetrorum posse exprimi serie terminorum rationalium, homogenea. Exempli causa sinus circuli rectos seu ordinatas nemo negabit esse saepe sinubus versis, sive abscissis asymmetros. Sed credibile est portiones abscissas saepe esse abscissis asymmetras. Hoc tamen loco dicitur eas serie numerorum rationalium explicari. Sed respondendum est primum resolutione in minima facta rationalia ab irrationalibus differe non nisi magnitudine infinite parva; deinde considerandum est terminum cuiuslibet seriei (non infinite parvum) explicari aliis terminis infinitis in dimensiones usque infinite parvas usque extenuatis.



[*Fig. 5*]

Sit curva LD, cuius s i n u s (id est ordinata normalis) SL, abscissa AS, tangens TL, triangulum characteristicum GWL. Sique fiat ut ST ad SL, vel GW ad WL, ita recta quaedam constans alterius cuiusdam figurae eiusdem axis sinum respondentem

2 f. dubitem. *(1)* Stevinus *(2)* Vieta *(a)* numerosam aequationum omnium resolutionem primus absolvit *(b)* mechanicam aequationum omnium resolutionem absolvit *(c)* numerosam *L* 4 mathematicam *(1)* mechanicam ingenti *(2)* practicam *L* 10 saepe *erg.* *L*

(respondentem inquam[,] id est eiusdem abscissae) SR, portio quaelibet ab altera figura abscissa per sinum eius, aequabitur rectangulo SL in c.

Cuius rei demonstratio haec est perfacilis: $\frac{TS}{SL} = \frac{GW}{WL}$ vel $\frac{g}{w}$ per constructionem; $= \frac{c}{RS = r}$ ex hypothesi, ergo $cw = rg$. Quod rerum harum intelligentibus sufficit ad demonstrationem.

Exemplo utamur, si figura sit parabola erit $ST = 2x$, posita $AS = x$, et $SL = \sqrt{ax}$, erit $\frac{g}{w} = \frac{2x}{\sqrt{ax}} = \frac{c}{r}$. Ergo $r = \frac{c\sqrt{ax}}{2x} = y$, fiet: $2yx = c\sqrt{ax}$, vel $4y^2x^2 = c^2ax$, vel $4y^2x = b^3$. Hyperbola cubica, cuius proinde habetur quadratura. Quare omnium figurarum haberi potest quadratura, quarum sinus sunt ad rectam quandam constantem, ut sunt sinus alterius cuiusdam figurae cognitae ad suam tangentem; seu ratio sinuum trianguli characteristici figurae cognitae.

Contra si complementum parabolae sumatur, cuius applicata Ls, abscissa As, tunc producta st ita habetur: $ax = y^2$, unde $ax = 2yp$, unde fit $\frac{ax}{2y} = p$, vel $\frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2}$. Est ergo $As = 2ts$. Sed nec opus erat ista quaeri; sufficit esse sL ad st, ut g ad w, vel $\frac{y^2}{a}$ ad $\frac{y}{2} = \frac{g}{w} = \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{ax}} = \frac{\cancel{2}y^2}{ya}$. Ergo $\frac{xay}{y^2\sqrt{ax}} = 1$. Quod est verissimum. Tantum ergo sine novo calculo inverti sufficit superiorem, et duplicem ei valorem accommodari.

12 si *(1)* supplemen *(2)* com *(3)* supplementum *(4)* complementum L

$\dfrac{g}{w} = \dfrac{2r}{\sqrt{ax}} = \dfrac{c}{r}$. Ergo $r = \dfrac{c\sqrt{ax}}{2x}$, unde locus hic: $4x^2y^2 = \underbrace{c^2a}_{b^3}x$, vel locus: $xy^2 = a^3$.

Hyperbola cubica.

$\rule{3cm}{0.4pt} = \dfrac{r}{c}$. Ergo $r = \dfrac{2cx}{\sqrt{ax}}$. Unde locus hic: $y^2ax = 4c^2x^2$, vel locus hic: $y^2 = ax$.

Parabola ipsa.

$- = \dfrac{2y}{a} = \dfrac{c}{r}$. Ergo $r = \dfrac{ca}{2y}$. Unde locus hic: $yx = a^2$. Hyperbola.

$\rule{3cm}{0.4pt} = \dfrac{r}{c}$. Ergo $r = \dfrac{2yc}{a}$, unde locus: $ax = ya$. Triangulum.

Ergo semper duplex tantum locus, $\dfrac{g}{w} = \dfrac{c}{r}$, et $\dfrac{g}{w} = \dfrac{r}{c}$, ita ut semper c sit differentiae abscissarum proportionalis.

Si figura data sit hyperbola, et axis sit asymptotos, aequatio est: $a^2 = yx$. Unde $yl = xy$. Ergo $l = x$, vel $yx = xl$, ergo $l = y$. Ergo $\dfrac{g}{w} = \dfrac{x}{\frac{a^2}{x}} = \dfrac{x^2}{a^2}$. Idemque est etsi y assumas, substituto tantum y in locum x. Hinc duplex sufficit constructio, loco quadruplicis:

$\dfrac{g}{w} = \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{c}{r}$. Ergo $r = \dfrac{ca^2}{x^2}$. Unde locus: $x^2y = a^3$. Hyperbola cubica.

$- = \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{r}{c}$. Ergo $r = \dfrac{cx^2}{a^2}$. Unde locus: $ay = x^2$. Parabola.

Si pro axe spatii assumatur ipse hyperbolae axis, aut basis ei perpendicularis, aequatio est (sumta hyperbolae specie in qua latus rectum transverso aequale): $ax + x^2 = y^2$.

---

4 *Zu* Parabola ipsa: Error ut mox dicetur.

5 *Zur linken Seite:* $x = \dfrac{y^2}{a} \times \dfrac{y}{2}$ fiet $\dfrac{2y}{a}$.

Zu Hyperbola: Imo error quoniam si y arithmetice crescit, tunc, r erit applicata hyperbolae, sed ipsae GW quibus applicatur erunt inaequales. Sin y est $= \sqrt{ax}$, fiet $y = \dfrac{a^2}{\sqrt{ax}}$, $y^2 = \dfrac{a^4}{ax}$, et $y^2x = a^3$, ut supra.

6 *Zu* Triangulum, *gestr.:* Error, ut paulo ante.

Sed ut calculi similis repetitionem vitemus, et circulum (vel ellipsin) et hyperbolam simul complectamur, fiet aequatio: $2ax \mp x^2 = y^2$.

Sed antequam huc veniamus, subit animum experiri aliquid quod circa parabolam tentare obliti sumus, aequatio ibi fuit $ax = y^2$. Unde si abscissa est x, seu cum directrix est axis, fit $al = 2y^2$. Ergo $l = \dfrac{2y^2}{a}$, eritque ratio $\dfrac{g}{w}$, vel $\dfrac{l}{y} = \dfrac{al}{2y^2}$, quod fieri potest $= \dfrac{r}{c}$, unde fieret $\dfrac{alc}{2y^2} = r$. Sed inde non potest fieri locus, quia sic una tantum habetur incognitarum in aequatione, nisi ea explicetur. Sed si explicetur incidemus in loca iam exposita. Nihil ergo praetermissum fuit.

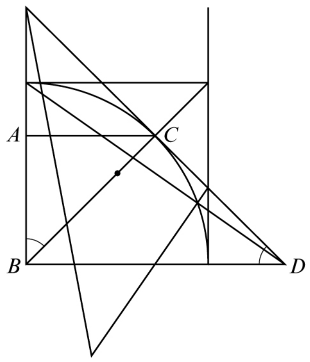
Ut ergo ad circulum (vel ellipsin) et hyperbolam nunc pergamus, duplex ineundus valor ipsius p. Primum ex x abscissa, deinde ex y abscissa.

Ex x ita: $2ax \mp x^2 = y^2$, unde fit $2ap \mp 2xp = 2y^2$, vel $p = \dfrac{y^2}{a \mp x} = \dfrac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$. Sed si x sit abscissa, fiet: $2ax \mp 2x^2 = 2yp$, vel $p = \dfrac{ax \mp x^2}{y}$. Iam ut pro x substituamus eius valorem, considerandum est, esse $2ax \mp x^2 \mp a^2 = y^2 \mp a^2$, atque ideo $a^2 + x^2 \mp 2ax = a^2 \mp y^2$, ergo $\left.\begin{array}{r} a \mp x = \\ \\ x \mp a = \end{array}\right\} \sqrt{a^2 \mp x^2}$.

14–16 NB. Haec dubitatio alio signo exprimenda.

---

5 eritque: Die anschließende Rechnung ist nicht konsequent durchgeführt, die Schlussfolgerung bleibt davon unberührt.



[*Fig. 6*]

Et si subsistamus intra quadrantem circuli, quia tunc x, sinus versus, nunquam maior fit quam a, radius, possumus tuto dicere: $a \mp x = \sqrt{a^2 \mp y^2}$ et $\mp x = \sqrt{a^2 \mp y^2} - a$, vel $x = \mp \sqrt{a^2 \mp y^2} \mp a$. Ergo $x^2 = + 2a^2 \mp y^2 \boxed{+a^2} - 2a\sqrt{a^2 \mp y^2}$, $x^2 = 2a^2 \mp y^2 - 2a\sqrt{a^2 \mp y^2}$, ergo $p = \dfrac{\mp a\sqrt{a^2 \mp y^2} \mp a^2 + 2a^2 \mp y^2 - 2a\sqrt{a^2 \mp y^2}}{y}$. Ergo iuxta primum ipsius p valorem erit: $\dfrac{g}{w} = \dfrac{2ax \mp x^2}{a \mp x, \frown \sqrt{2ax \mp x^2}} = \dfrac{\sqrt{2ax \mp x^2}}{a \mp x} = \dfrac{c}{r}$. Ergo $\dfrac{ca \mp cx}{\sqrt{2ax \mp x^2}} = r = y$. Unde locus talis: $2y^2ax \mp y^2x^2 = c^2a^2 + c^2x^2 \mp 2c^2ax$. Ergo $y^2 = \dfrac{c^2a^2 + c^2x^2 \mp 2cax}{2ax \mp x^2}$, vel $y = \dfrac{a - x, \frown c}{\text{sinus} \begin{cases} \text{circuli} \\ \text{hyperbolae} \end{cases}}$.

Positoque $c = a$, et aequalitate resoluta in proportionem, fiet $\dfrac{y}{a} = \dfrac{a - x \text{ sinus compl.}}{\text{sin. rect.}}$, seu in circulo, figura proxime adiecta, $\dfrac{CD = r}{BC = a} = \dfrac{AB = a - x}{AC = \text{sin. rect.}}$. Quod est verissimum, et exhibet nobis quadraturam tangentium complementi.

1 [*Fig. 6*]: Die Figur hat Leibniz an einer freien Stelle des Randes ergänzt; sie ist mittels eines Verbindungsstriches mit dem Wort figura in Z. 10 verbunden.

$\dfrac{y}{p}\quad \dfrac{\sqrt{2ax \mp x^2}}{} \frown \dfrac{a \mp x}{2ax \mp x^2}$ fiet $\dfrac{a \mp x}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$. Unde patet quod hic dicitur idem esse, quod differentias invenire applicatarum, divisa qualibet per eius tangentem productoque per rectam constantem c vel a multiplicato.

Iuxta posteriorem valorem ipsius p erit in circulo

$$\frac{g}{w} = \frac{\mp ay\sqrt{a^2 \mp y^2} \mp a^2y}{3a^2 - y^2 - 3a\sqrt{a^2 \mp y^2}} = r$$

cuius figurae habetur quadratura hoc modo, sed ipsius r constructio investiganda.

1–3 $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{p}}$ ... multiplicato. *erg. L*

4 erit in circulo: Bei der Berechnung von r fasst Leibniz die Doppelvorzeichen nicht richtig zusammen; außerdem hat er nicht völlig zu Ende gerechnet. Richtig sollte es heißen: $r = \dfrac{a^2y - ay\sqrt{a^2 - y^2}}{y^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - y^2}}$.

40_4. PLAGULA QUARTA

August. 1673

Pars [quarta]

M e t h o d i   t a n g e n t i u m   i n v e r s a e   s e u   d e   f u n c t i o n i b u s

Si sit figura $\dfrac{a^3}{a^2+y^2} = x$, fiet $a^3 = a^2x + y^2x$, unde fiet ad p habendam assumta primum x abscissa: $-2y^2x = a^2p + y^2p$, et $p = \dfrac{2y^2x}{a^2+y^2}$, et quia $y^2 = \sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}}$, fiet $\dfrac{2xa\sqrt{ax-x^2}}{a^2 + a\sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}}} = p$, et quia $\dfrac{g}{w} = \dfrac{p}{y}$, $\dfrac{g}{w} = \dfrac{2ax\sqrt{ax-x^2}}{a^2\sqrt{\dfrac{a^3x-a^2x}{x}} + a \frown \dfrac{a^3x-a^2x}{x}} = \dfrac{c}{r}$, et erit $r = c\cancel{a} \frown \dfrac{a\sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}} + \dfrac{a^3-a^2x}{x}}{2\cancel{a}x\sqrt{ax-x^2}} = \dfrac{ca\sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}} + \dfrac{ca^3-ca^2x}{x}}{2x\sqrt{ax-x^2}}$, vel

$r = y \; = \dfrac{a^2\sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}} + \dfrac{a^4-a^3x}{x}}{2x\sqrt{ax-x^2}}$, vel

3 tertia *L ändert Hrsg.* 6 $\frac{2y^2x}{a^2+y^2}$, | quod est memorabile, unde posi *gestr.* | et *L* 7 f. $\frac{c}{r}$, *(1)* vel multiplicata functione per x, r = $ca^3\sqrt{ax-x^2} + ca^2 \frown \llcorner a - x$ *(2)* et erit *L*

5–700,9 In direkter Fortsetzung von Teil 3 versucht Leibniz weitere Beispiele zu behandeln, kommt aber aufgrund von Rechenfehlern sowie unklarer Bezeichnungsweise kaum zu schlüssigen Ergebnissen.

$$y^2 = \frac{a^4 \frown \dfrac{a^3 - a^2x}{x} + \dfrac{a^8 + a^6x^2 - 2a^7x}{x^2} \;\Big|\; + \;\; 2a^2\sqrt{\dfrac{a^3 - a^2x}{x}} \frown \dfrac{a^4 - a^3x}{x}}{\boxed{4x^2 \frown \llcorner ax - x^2 \lrcorner} \;\Big|\; \boxed{4x^2 \frown \llcorner ax - x^2 \lrcorner}}$$

$$4x^2y^2ax - 4x^4y^2$$

$$- \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$\frac{a^3}{a^2 + y^2} = x. \text{ Ergo } \frac{\dfrac{a^6}{a^4 + y^4 + 2a^2y^2} = x^2}{\dfrac{2y^2x}{a^2 + y^2} = p} = \frac{\dfrac{a^6}{a^2 + y^2}}{2y^2x = \dfrac{2y^2 \frown a^3}{a^2 + y^2}} = \frac{a^6}{2y^2a^3} = \frac{a^3}{2y^2}.$$

$\dfrac{a^3}{y^2} = x$. Ergo $a^3 = y^2x$. Unde si fiat: $\cancel{y^2}x = 2ylx = y^2x$, fiet $2l = x$, vel $l = \dfrac{x}{2} = p$.

Iam $\dfrac{y^2}{\frac{x}{2}} = \dfrac{2a^3}{x^2}$. Unde res sequitur memorabilis in hyperboloeide cubica reductas esse figuras homogeneas. Quod me credere facit, peculiarem aliquem huius figurae usum esse.

---

8 *Dazu am Rande:* $\dfrac{a\sqrt{\dfrac{a^3}{x}}}{\dfrac{x}{2}} = y, \quad \dfrac{4a^5}{x^3} = y^2.$

$\dfrac{a^4}{y^3} = x$. Ergo $a^4 = y^3x$, unde si fiat $\cancel{y^3}x = 3y^2lx = y^3x$, et $p = \dfrac{x}{3}$. Iam $y = \sqrt{③}\ \dfrac{a^4}{x}$, et $\dfrac{y^2}{p} = \dfrac{\sqrt{③}\ \dfrac{a^8}{x^2}}{\dfrac{x}{2}} = e = 2\sqrt{③}\ \dfrac{a^8}{x^5}$, vel $e^3 = \dfrac{a^8}{x^5}$, unde locus $y^3x^5 = a^8$.

Paraboloeis: $a^2x = y^3$. Ergo $a^2p = 3y^3 = 3a^2x$, ergo $p = 3x$. $y = \sqrt{③}\ a^2x$, et $\dfrac{y^2}{p} = \dfrac{\sqrt{③}\ a^4x^2}{3x} = e$. Ergo $\sqrt{③}\ a^4x^2 = 3ex$, et $a^4x^2 = 27e^3x^3$, fietque locus: $a^4 = y^3x$.

$ax^2 - x^3 = y^3$, est momentum [quadratorum] sinuum circuli, ex vertice. $2axp - 3x^2p = 3y^3$. Ergo $p = \dfrac{3y^3}{2ax - 3x^2} = \dfrac{3ax^2 - 3x^3}{2ax - 3x^2} = \dfrac{3ax - 3x^2}{2a - 3x}$, hoc dividatur $y = \dfrac{\sqrt{③}\ ax^2 - x^3 \frown 2a - 3x}{3ax - 3x^2} = \dfrac{ax^2 - x^3 \frown 8a^3 - 36a^2x + 54ax^2 - 27x^3}{}$ [*bricht ab*]

$\dfrac{a^2}{\sqrt{ax}} = y$, fiet $a^2 = y\sqrt{ax}$, et $a^4 = y^2ax$, et $a^3 = y^2x$.

---

1 *Dazu am Rande:* $\dfrac{ay}{p} = \dfrac{a\sqrt{③}\dfrac{a^4}{x}}{\dfrac{x}{2}} = y, \quad 2a\ \sqrt{③}\dfrac{a^4}{x} = yx$. Ergo $\dfrac{8a^{\cancel{5}\,7}}{\cancel{x}} = y^3x^{2\,\cancel{3}}$. [*sic!*]

8

$$\begin{array}{l}
2a \quad - \quad 3x \\
2a \quad - \quad 3x \\
\hline
4a^2 + 9x^2 - 12ax \\
\qquad 2a - 3x \\
\hline
\qquad\qquad 36 \\
8a^3 + 18x^2a - \cancel{24}a^2x - \cancel{12a^2x} - 27x^3 + 36ax^2
\end{array}$$

1 $\cancel{y^3}$x = *(1)* $2y^2lx = y^3x$, et $p = \frac{x}{2}$ *(2)* $3y^2lx$ *L* 6 quadratorum *erg. Hrsg.*

Aequatio curvae quam Cartesius post conicas simplicissimam putat, lib. 2 pag. 37. haec affertur:

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy. \quad \text{vel} \quad x = \frac{y^2}{a} - 2y - a + \frac{2a^2}{y}.$$

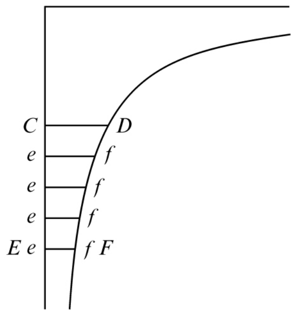
Sed si hoc est, tantum nascetur ex [compositione] in unum quatuor aliarum linearum, ordinatae rectanguli, ordinatae trianguli, ordinatae parabolae, et ordinatae hyperbolae. Ita conchoeis ex ordinata circuli et hyperbolae ad asymptoton, componitur.

Ait Cartesius lineas altiorum graduum potius a mechanica quam geometria fore repudiandas, ob difficilem earum descriptionem. Id nimis verum est: etsi enim excellens sit earum contemplatio ob pulchritudinem admirandae rerum harmoniae, fatendum est tamen usum mechanicum non respondere. Quare illud utile futurum est, modum investigare quo linea quaelibet altior, ex ordinatis inferiorum composita intelligi possit. Sed quoniam descriptiones eiusmodi non fierent nisi per puncta, cogitavi an non vocata in subsidium optica, descriptae separatim inter se iungi possint. Idque duabus datis facile fieri potest, si oblique aspiciantur, ut non possit agnosci inter eas intervallum. Atque ita etiam in chartam aliam oblique reflecti possunt, *où ils passent pour chefs, à present, comme les cadets dans un pays estranger ne brisent plus leurs armes*. Et ita iam transferri possunt in situm perpendicularem, prout inspiciuntur. Et his rursus alia addi figura. Ita ut optice sine ullo motu, nec per puncta describi possint.

Statica mea, novae scilicet librae genere adhibito, figura data quaelibet secari potest in quavis ratione data. Unde sequitur, descripta figura angulorum, posse ope huius instrumenti angulum secari in quavis ratione data: non per puncta nec arithmetice; sed geometrice, ita ut etiam exhiberi possint huius instrumenti ope partes irrationales inter se.

4 comparatione *L ändert Hrsg.* 10 est, *(1)* | efficere *streicht Hrsg.* |, ut l *(2)* modum *L*

1 Cartesius: *Geometria*, *DGS* I S. 37 f. 7 Ait Cartesius: s. insbesondere den Beginn des 2. Buches der *Géométrie*, *a. a. O.* S. 17.



[*Fig. 1*]

Eadem methodo iam facile habentur quotcunque mediae proportionales. Sed quod attinet medias proportionales quotcunque, idem rectius fieri potest figura logarithmorum sive harmonica, id est hyperbola vera, ut angulorum sectio, falsa. Ita quoniam, ut ex inventis a Gregorio a S. Vincentio constat, $CDef$ sunt ut logarithmi arithmetice proportionalium CE. Sumta ergo portione eiusmodi spatii hyperbolici $CDEF$, statim per staticam in ea exhiberi potest constructio logarithmorum geometrica; sectioque rationis, et inventio quotcunque mediarum proportionalium.

Potest ergo in eiusdem tabulae orichalcinae una facie describi figura angulorum, seu hyperbola falsa, et in altera figura logarithmorum sive hyperbola vera. Si maior sit tabula plures aliae figurae utiles inscribi possent, quod usum haberet ad plura problemata simul solvenda. Solutio autem plurium problematum simul, usum haberet admirabilem, ad solvenda quaedam problemata, quae alioquin superare videntur vires humanas, neque redigi posse in aequationem. Imo si non realiter at saltem optice plures simul figurae delineari possent in eadem tabula, si aliquid illuminans, simul descenderet, figuramque in ea describens. Ita plura simul solvi possent problemata in illa.

Archimedes videtur staticae usum introduxisse in geometriam, non tantum ob contemplationem centrorum gravitatis, atque inde manantes solidorum ac superficierum revolutione genitorum mensuras; sed et quod eius ope problemata infinita solvi posse viderentur sine calculo: exempli causa, manifestum est aream cuiuslibet figurae haberi posse, si prisma habeatur ei aequiponderans; neque opus est, ut alias foret, figuram datam in

21 si *(1)* cylinder *(2)* prisma *L*

4 f. ex inventis a Gregorio: *Opus geometricum*, 1647, S. 594–597. Auf diese Stelle spielt Leibniz S. 703 Z. 30 noch einmal an.

massam quandam informem atque inde in prisma vel cubum redigere, ut eius amplitudo habeatur. Cum ope ponderum duplicata quodammodo, ac bis habeatur diversarum figurarum; quarum statim datur comparatio.

Sed maximae difficultates in praxi obiectae sunt; primum quod ponderare corpora incommodum, quoties magna sunt; deinde quod ponderatis etiam corporibus, exacta non potest haberi mensura; sed velut cum figurae per puncta describuntur; intervalla negliguntur; quaeriturque additis ablatisque ponderibus donec attingatur vera; quod si more Archimedis immergere corpora liquori, atque ita liquorem ponderare velis; patet cum multis esse difficultatibus conflictandum. Denique ad corpora non nisi homogenea ponderanda adhiberi statica potest. Ac quod duas attinet primam ac postremam, eas nec a me sublatas fateor, nec a quoquam tolli posse arbitror.

Sed et ideo staticae geometricae usum esse quoque debere arbitror; non ad quarumlibet figurarum datarum areas metiendas, cum plerumque neque ponderari possint, neque sint homogeneae; verum ad metiendas atque dividendas figuras quasdam in corporibus quibusdam ad eam rem commodis, a nobis pro arbitrio assumtis, quae deinde pro instrumentis servire possint.

Atque si his limitibus vota nostra includantur, superest tantum media incommoditas; quae vero ope bilancis meae autometrae [superatur], quae sibi ipsi aequipondium definit. Ita ergo instrumenta duo statim elaborari possunt, quorum ope possint anguli ac ratio in data ratione secari, at pro aliis figuris innumeris modulus velut quidam constitui, unde eas proportionaliter dimetiamur. Cum proportionalis ista divisio postea ope opticae fieri possit. Sed etsi figura data non sit modulo similis, modo sit eiusdem speciei, alius praesto est plerumque calculus, quo ad eum redigatur, ut in circulo, et ellipsi, hyperbola circulari et alia quavis.

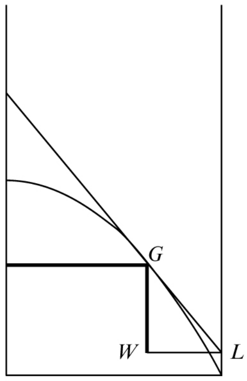
Quod attinet duo illa instrumenta, quibus anguli ac ratio secentur, fateor utrumque etiam sine statica ope chordarum flexibilium absolvi posse. Nimirum si arcus circuli et arcus parabolae in rectas extendantur. Etsi quoad arcum parabolae res paulo sit difficilior, quoniam is non quadrilineo hyperbolico, sed ipsi hyperbolae proportionalis est.

Quoniam tamen elegantissima visa est demonstratio figurarum geometricarum quarum altera a Gregorio a S. Vincentio, altera a me inventa est, quarum illa rationi, haec angulo syntomos est; dignissimas putavi quae afferrentur.

1 in *(1)* quadratum redigere; ut eius area *(2)* prisma *L* 14 quasdam *(1)* in eam rem commodas, a nobis pro arbitrio assumtas *(2)* in *L* 18 superatur *erg. Hrsg.*

Porro data qualibet figura fieri potest figura segmentorum, item figura arcuum, cuius ope tum segmenta eius tum curvae in data ratione secari possint.

Nota: tabulas eiusmodi aquae immergendas posse ex ligno esse, orichalco obducto.



[*Fig. 2*]

Duae quaestiones: una de invenienda descriptione curvae ex eius elementis, altera de invenienda figura ex datis differentiis, altera redigi potest in eandem.

Quoniam semper elementum curvae GL intelligi potest $Rq.$ ex $GW^2 + WL^2$ vel $l = \sqrt{g^2 + w^2}$, et quia g^2 semper eadem, tunc fiet $l = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$.

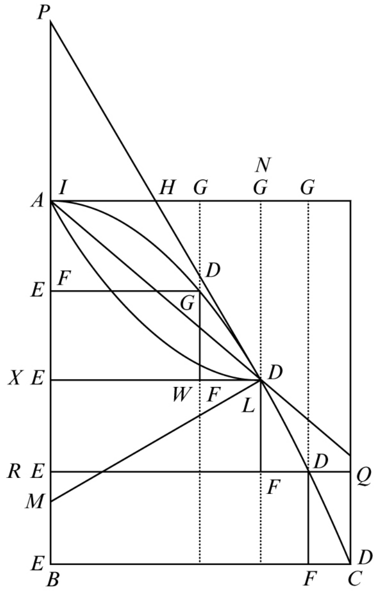
Data ergo v. g. $\dfrac{a}{x} = w$. fiet: $\sqrt{\alpha^2 + \dfrac{a^2}{x^2}} = GL$ vel l. eaque aequatio progressionem ipsorum GL exprimet. Potest et posita $\alpha = 1$. exprimi $\sqrt{1 + \dfrac{a^2}{x^2}}$. Sed et a significare potest 1. Sed et a posito $= 1$. erit $\alpha = \dfrac{a}{a}$, ergo $= 1$. tantum inferioris dimensionis, fietque $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$. Quaerenda ergo est descriptio huius curvae.

Contra[:] quaestio de invenienda curvae descriptione ex datis elementis, in alteram reduci potest. Posito enim eius elementa esse $\dfrac{\sqrt{ax + x^2}}{a}$, vel $\dfrac{\sqrt{x + x^2}}{1}$. ut curvae paraboli-

13 Contra: Die Berechnung des Bogenelements der Parabel und der Reihe der Differenzen ist fehlerhaft. Die bedeutsame Schlussfolgerung bleibt davon unberührt.

cae[,] subtrahenda $\sqrt{1}$. vel 1. fiet w differentia, eaque ergo erit $\sqrt{\sqrt{x + x^2 - a^2}}$ vel $\sqrt{\sqrt{2} - a^2}$. $\sqrt{\sqrt{6} - a^2}$. [etc.]

Hinc intelligi potest, fere totam doctrinam de methodo tangentium inversa revocabilem videri ad quadraturas.



[*Fig. 3*]

Esto figura quaelibet orthogonia $ABCDA$, ductisque applicatis quotcunque ED, ad abscissas AE arithmetice crescentes, et signatis FD applicatarum differentiis; manifestum est ductis FG in FD, seu ductis differentiis applicatarum in abscissas, momentum hoc differentiarum esse complementum figurae datae ad rectangulum isoparallelum.

Sunto exempli causa differentiae istae: $\frac{x^2}{a^2}$, ducantur in x, fiet $\frac{x^3}{a^2}$. Quaeritur progressio ipsarum ED continue descrescentium, nam, unam ex ipsis pro arbitrio assumtam pono, id est figura talis, cuius summa summae omnium $\frac{x^3}{a^2}$ complemento sit ad rectan-

2 etc. *erg. Hrsg.*

gulum factum ex maxima AE assumta, nempe AB, in maximam ED assumtam, nempe BE.

Si vel hoc solum problema solvi posset, data producta invenire figuram haberetur tetragonismus universalis. Cum enim data sit figura cuius summa quaeritur $\frac{x^2}{a}$, ac proinde differentia applicatarum figurae quaerendae $\frac{x^2}{a^2} = WD$, et constat esse $GW = \frac{a}{a} = 1$, fiet $\frac{PX}{XD} = \frac{\frac{a}{a}}{\frac{x^2}{a^2}} = \frac{[a^2]}{x^2}$. Imo ergo erratum, neque enim ita datur [PX, sed tantum ratio], seu trianguli figurae characteristici natura.

Ita ergo duo habemus, p r i m u m triangulum figurae characteristicum, d e i n d e figuram quaesitae complentem. Tentandum an ex his erui possit figura, accedentibus aequationibus, et methodo tangentium Cartesiana, Huddeniana, Slusiana.

Porro rectanguli GFD, altitudo est $x = GF$, latitudo $\frac{x^2\beta}{a^2}$, et area $\frac{x^3\beta}{a^2}$. Dividatur per $DF = \beta$, fiet eius longitudo $\frac{x^3}{a^2}$, latitudo β, unitas scilicet constructionis ut dictum est. Quod si iam figurae huius $\frac{x^3}{a^2}$ quadratura haberi potest, utique caetera videntur haberi, puto tamen non semper. Ut si sit $\frac{a\beta}{x}$, ductis omnibus in x, fiet $a\beta$. At a ductam

3 f. *Über* data producta *und* tetragonismus *jeweils:* male

6 a *L ändert Hrsg.* 6 $\frac{\mathrm{PX}}{\mathrm{XD}}$, sed tantum eorum ratio *L ändert Hrsg.* 7 f. natura. *(1)* Ecce ergo problema: *(2)* Ita *L*

10 methodo tangentium: Descartes, *Geometria*, *DGS* I S. 40–50. Hudde, *De reductione aequationum*, *DGS* I S. 433–439 (insbesondere S. 436) sowie *De maximis et minimis*, *DGS* I S. 507–516; s. a. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, *DGS* I S. 255 f. De Sluse veröffentlichte seine Methode zuerst in den *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1672/73, S. 5143–47 und VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059.

in x vel AB esse semper quadrabilem constat. Cumque et data sit BC, ergo datur quadratura omnium ED, unde et ipsa videntur dari debere. Quod alias examinabimus.

D a t i s p r o d u c t i s i n v e n i r e a p p l i c a t a s, est invenire seriem, quae ad differentias suas ⟨rationem⟩ habeat datam, datur enim PE, et GW, at $\frac{PE}{GW} = \frac{ED}{WL}$.

Eodem casu datur $\frac{PA}{AE}$, vel $\frac{PA}{PE} = \frac{AH}{ED}$. Datur ergo ratio rescissae AH ad applicatam ED. Ergo et dimidiae rescissae $\frac{AH}{2}$ ad applicatam ED, seu $\frac{IH}{2ED}$. Ergo et $\frac{ED - \frac{IH}{2}}{ED} = 1 - \frac{IH}{2ED}$. Ergo et ratio applicatarum ad $ED - \frac{IH}{2}$, quarum summa semirectangulo sub abscissa et applicata aequatur. Sed ex datis partium rationibus, rationes totorum, vel contra, nemo collegerit cognitis hactenus artibus.

Breviter[:] semper datur GW, semper datur AE, hoc loco datur et PE, ergo datur et PA. Sed et datur ratio AH ad ED, nempe rescissae ad applicatam, item $\frac{ED}{WL}\left(= \frac{PE}{GW}\right)$ applicatae ad differentiam.

$\frac{a}{a-b}$ $\frac{b}{b-c}$ $\frac{c}{c-d}$. Ergo datur et $\frac{a-b}{a}$ etc. $= 1 - \frac{b}{a}$. etc. Datur ergo ratio applicatae datae ad sequentem. Unaque ex illis prima scilicet qualibet pro arbitrio assumta, dantur caeterae omnes.

Ergo ex datis productis datur series figurae. Etsi inde aequationem reperire figurae naturam exprimentem, nondum fortasse sit in promtu. Sed illud tamen adhuc excutiendum an prima assumi possit pro arbitrio, et hoc loco puto posse.

---

2 *Zu* dari debere: Imo nondum res datur.

9 f. artibus. | De caetero est $\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EM}}$. datur ergo $\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EM}}$. item $\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{ED}}$. ergo datur et $\frac{\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{ED}}}{\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{ED}}}$. ergo et $\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EM}}$. *Absatz*. Patet porro ex his *(1)* data ratione *(2)* datis productis dari et reductas. *gestr.* | Breviter *L*

At si d i f f e r e n t i a e WL datae sint, seu quod idem est, si data sint trianguli characteristici latera rectum angulum comprehendentia, quia data $\frac{GW}{WL}$, tunc non potest prima applicata assumi pro arbitrio, quia prima est omnium differentiarum summa.

Porro datur et differentia productae et abscissae ad rescissam, seu differentia inter has duas rationes[:] productae ad rescissam, et abscissae ad rescissam, seu

$$\frac{PE-AE}{AH}=\frac{PA}{AH}=\frac{GW}{WL}=\frac{PE}{ED}=\frac{PA+AE}{ED}=\frac{ED}{EM}.$$

Porro cum detur $\frac{PE}{ED}$, dabitur et $\frac{ED}{PE}$, datur et $\frac{ED}{EM}$, dabitur ergo et $\dfrac{\frac{ED}{PE}}{\frac{ED}{EM}}$, ergo et $\frac{PE}{EM}$ seu $\frac{PA+AE}{EM}$.

NB. Si dantur WL, datur ut paulo ante ostensum $\frac{PE}{EM}=\dfrac{\frac{ED}{WL}=\frac{a}{a-b=e}}{\frac{a^2-b^2}{2}}=\beta$ $\frac{1}{\beta}\dfrac{\frac{a^2-b^2}{2}}{\frac{a}{a-b}}$. Ergo ductis omnibus in $a-b$, fiet:

$$\frac{a^3-ba^2-ab^2+b^3}{2a}=\frac{1}{\beta}. \qquad \frac{2}{\beta}=\frac{a^2}{\cancel{2}}-\frac{ba}{\cancel{2}}-\frac{b^2}{\cancel{2}}+\frac{b^3}{\cancel{2}a}=ea-b^2+\frac{b^3}{a}.$$

---

7 $\frac{PE}{1}=\frac{ED}{WL}$.

11

$$\begin{array}{l} a-b^2 \\ a-b \\ -b^2\overline{a+b^3}+a^3 \\ -ba^2 \end{array}$$

9–709,3 NB. ... NB. *erg. L*

---

9 $EM=\frac{a^2-b^2}{2}$: Dies ist ein Näherungswert; vgl. dazu S. 710 Z. 19.

H a e c   a e q u a t i o   e x a m i n a n d a.

Vel quia $a = b + e$, fiet: $\dfrac{2}{\beta} = eb + e^2 - b^2 + \dfrac{b^3}{b+e}$, vel

$2b + 2e = \cancel{eb^2\beta} + 2e^2b\beta + \cancel{e^2b\beta} + e^3\beta - \cancel{b^3\beta} - \cancel{b^2e\beta} + \cancel{b^3\beta}$. NB.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a & & b & & c & & d & & a^2 & & b^2 & & c^2 & & d^2 \\
 & a-b & & b-c & & c-d & & & & a^2-b^2 & & b^2-c^2 & & c^2-d^2 & \\
 & e & & f & & g & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
a-b \frown a-b = a^2+b^2-2ab, -a^2+b^2 & = & 2b^2-2ab,, \\
 & & [2] \frown \llcorner b^2 - ab \lrcorner \quad = \quad 2 \frown \llcorner b^2 \underbrace{- a^2 + ae}_{a^2 - ae} \lrcorner
\end{array}$$

Ergo differentia inter differentiarum quadrata, et differentias quadratorum, est, differentia inter quadratum termini posterioris, et rectangulum terminorum, duplicata, seu est differentia inter quadrata terminorum inversa (seu differentia quadratorum directa a nihilo subtracta), rectangulo termini prioris in differentiam, aucta; summa duplicata.

Esto quadratum differentiae e^2, differentia inter quadrata terminorum $a^2 - b^2 = h^2$, erit $b^2 - a^2 = 0 - h^2 = 0 \underbrace{- a^2 + b^2}_{a^2 - b^2} = b^2 - a^2$, erit ergo $e^2 - h^2 = 2 \frown \llcorner 0 - h^2 + ae \lrcorner$ seu

---

7–10 *Nebenrechnungen:*

[*Gültig*]

$$\begin{array}{lll}
 & + \;\; a - b & \\
 & \underline{- \;\; a + b} & \\
-a^2 + ba & + \; ba - b^2 & \qquad -a^2 - b^2 + 2ba
\end{array}$$

$$\frac{a^2 - \cancel{b}^2 + \cancel{2}\cancel{b}^2 - 2b^2 + b^2}{a-b} = a + b + \frac{b^2 - 2b^2}{a-b} = a + b - \frac{2b^2}{a-b}.\ [sic!]$$

[*Gestrichen*]

$$\frac{a^2 - b^2 + 2ba - 2ba}{+a - b} = -a + b.$$

8 -2 *L ändert Hrsg.*

$\frac{e^2-h^2}{2} = ae - h^2$, vel $e^2 - h^2 = 2ae - 2h^2$, eritque $e^2 = 2ae - h^2$. Ac proinde $e^2 - 2ae = -h^2$. Ergo $a^2 + e^2 - 2ae =[a^2 - h^2]$. Ergo $\overset{a-e}{\underbrace{e-a}_{\mp a \mp e}} = \sqrt{[a^2-h^2]}$, ergo $\mp\, e = \mp\, a + \sqrt{[a^2-h^2]}$. Sed de his alias.

Nunc observo, data laterum orthogoniorum trianguli characteristici ratione triangulum characteristicum plene dari, quia semper unum eius latus GW datur. Cumque detur et WL, dabitur et GL. Ergo in alio quolibet triangulo, quod characteristico simile est, dato unico latere dabuntur omnia. Ergo triangulum DNH penitus dabitur, quia unum eius latus DN datum est, datur ergo HD, et NH. Ergo cum summa omnium AH semper aequetur segmento duplicato; ideo summa omnium HN semper aequatur trilineo concavo $AXLFA$ vel $ANLGA$ [duplicato]. Figurae ergo quaesitae etsi adhuc ignotae reperiri potest hoc modo aequivalens. Assumta et pro arbitrio qualibet RQ invariabili, dabuntur semper et RP, et PQ. Ideo patet problema illud alibi a me propositum, data qualibet figura reperire curvam ὁμότομον, pendere ex illo problemate, datis differentiis reperire summas.

N B. cum sit $\frac{GW}{WL} = \frac{DE}{EM}$, patet esse ut unitas constructionis ad differentias, ita applicatas ad differentias semiquadratorum, vel ut unitas ad ordinatas, ita differentias ad differentias semiquadratorum, vel $\frac{1}{a} = \frac{a-b}{\frac{a^2-b^2}{2}}$, eritque $1 = \frac{2a^2-2ba}{a^2-b^2}$. Sed haec non absolute quidem vera[,] tamen in arithmetica infinitorum.

---

14 f. Datis differentiis invenire summas, et datis reductis invenire figuram, semper eodem redit.

3+4 $a^2 + h^2$ *L ändert Hrsg. dreimal.* 11 duplicato *erg. Hrsg.*

---

12 qualibet RQ: In seiner Handzeichnung hat Leibniz RQ auf eine bereits vorhandene Strecke gelegt. Damit Q auch auf die Tangente zu liegen kommt, müsste RQ näher an die Basis BC gelegt werden. 13 alibi a me propositum: vgl. dazu N. 39_1 S. 621 f. (Scholion zu Prop. 2.).

41. EX DATIS TANGENTIBUS INVENIRE FIGURAM
[Herbst 1673]

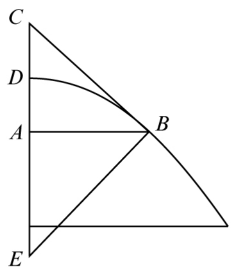
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1. Bl. 180–181. 1 Bog. 2°. 4 S. Spätere Ergänzungen und Zusätze in verändertem Duktus seitlich und oben auf Bl. 180 v°, 181 r°, 182 v°. Cc 2, Nr. 625

Datierungsgründe: In einem Gespräch, das nach der Entstehung des infinitesimalen Dreiecks vermutlich im Sommer 1673 stattfand (s. *LSB* III, 2 S. 933; *LMG* III S. 73), hat Huygens Leibniz die Lektüre der *Géométrie* Descartes' zusammen mit den Kommentaren von Fr. v. Schooten sowie der einschlägigen Studien von de Sluse empfohlen. Eine Frucht dieser Lektüre ist das vorliegende Stück, in welchem Leibniz die Tangentenmethode Descartes' rezipiert. Aufgrund des Wasserzeichens des Papiers ist die Studie nach N. 40 vom August 1673 anzusetzen.

Grandis illa quaestio:

e x d a t i s t a n g e n t i b u s i n v e n i r e f i g u r a m s i v e o r d i n a t a s etiam replicari potest, ita ut data aliqua aequatione, quaeratur figura cuius tangentium tangentes aequationem habeant datam.

Regula de tangentibus investigandis breviter rememoranda est:



[*Fig. 1*]

16 Regula | Slusii *gestr.* | de *L*

16 Regula: s. dazu N. 6. Die Streichung des Namens ist darauf zurückzuführen, dass Leibniz — wohl durch Mitteilungen Huygens' — mittlerweile Zweifel an der Priorität von de Sluse bekommen hatte. Vgl. dazu J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris*, 1974, S. 72–74; s. a. Huygens an Oldenburg, 27. Sept. 1672 (*HO* VII N. 1912, S. 228–229 = *OC* IX N. 2066, S. 247–251).

Esto curvae ordinata $[AB,]$ tangens BC. Quaeritur AC, ex data BC. Ante omnia aequatio figurae ordinatarum AB ad abscissas $[DA]$, rationem explicans ita poliatur, ut non nisi duae restent quantitates incognitae: $AB = y$. et $DA = x$. Termini incogniti a fractionibus ac surdis liberentur. Aequatio iam hac ratione inventa ita formetur, ut ab uno latere omnes termini ponantur ipsa x, ab altero omnes ipsa y affecti. Quod si idem terminus utroque affectus est, utrobique ponatur, ita quasi alterubi non esset positus. Qui neque y neque x habent omittentur. Hoc facto cuilibet termino praefigatur numerus tot unitatum, quot graduum est potestas quae terminum incognitum eius lateris afficit. Denique in latere ipsius x. unus x mutetur in $p = AC$. Aequatio ita reformata ipsius $p = AC$. quantitatem dabit.

Ipsa y per productam p dividatur erit $\dfrac{y}{p} = \dfrac{b}{a}$, posito $\dfrac{b}{a}$ = differentiae ipsarum y, seu posito ipsas y esse ipsarum b quadratrices. Exempli causa:

$2ax - x^2 = y^2$. Ergo $2ap - 2xp = 2y^2$. sive $p = \dfrac{y^2}{a-x} = \dfrac{2ax - x^2}{a-x}$. Ergo

$$\frac{y}{p} = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{\sqrt{2ax - x^2}, \frown \sqrt{2ax - x^2}} \frown a - x = \frac{a-x}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Sed nimis longae fuerint hae ambages ex datis differentiis quaerere summas, seu figuram, rectius ducta perpendiculari BE, utemur ipsis AE.

Quaeritur ergo problema:

data AE invenire figuram.

Insistamus in hunc finem methodo Cartesiana, ubi ellipsin proponit in exemplum, et ex AB invenit AE, nos tentabimus postea regressum. Ita autem ille.

Esto $DA = y$. $AB = x$. $DE = v$. $EB = s$. Ergo $AE = v - y$, ideoque $AE^2 = v^2 - 2vy + y^2$, et $EB^2 = s^2 = v^2 - 2vy + y^2 + x^2$. Et quia in ellipsi $x^2 = ry - \dfrac{r}{q}y^2$, unde tollendo x^2, fit:

1 AB, *erg. Hrsg.* 2 ordinatarum ... rationem explicans *erg. L* 2 CA *L ändert Hrsg.* 6 f. Qui ... omittentur. *erg. L*

19 methodo Cartesiana: *Geometria*, *DGS* I S. 40 f. u. 45 f. In S. 713 Z. 9 unterläuft Leibniz ein Vorzeichenfehler, der aber S. 713 Z. 11 korrigiert wird. Bei dem Versuch das Problem umzukehren vergisst Leibniz in seiner Schlussgleichung (S. 714 Z. 1) das Glied $+\dfrac{r^2}{4}$. Mit dem Fehler wird später (ab S. 716 Z. 24) konsequent weitergerechnet.

$$\begin{array}{lll} -\dfrac{r}{q}\,y^2 + & r\,y + & v^2 = 0, \\ +\,1 & -\,2v & -\,s^2 \end{array}$$

et ut y^2 ab omni alio liberetur fiet:

$$y^2 \qquad \frac{+r-2v}{-\dfrac{r}{q}+1}\,y \qquad \frac{+v^2-s^2}{-\dfrac{r}{q}+1} = 0.$$

Iam posito EB esse perpendicularem seu minimam, aequatio proposita duas habebit radices aequales. Ideoque ponendo $y = e$. eandem habebit formam aequatio, quam illa quae fit ducendo in se $y - e$. Unde $y^2 - 2ye + e^2$. Cumque haec aequatio eandem habet formam cum priore, et unus terminus sit idem, erunt reliqui quoque aequales.

Ergo $\dfrac{+r-2v}{-\dfrac{r}{q}+1}\cancel{y} = 2\cancel{y}e$. Ergo $+r - 2v = -\dfrac{2er}{q} + 2e$. $\quad -2v = -\dfrac{2er}{q} + 2e - r$. sive $2v = \dfrac{2yr}{q} + r - 2y$. sive $v = \dfrac{yr}{q} + \dfrac{r}{2} - y$.

Credo me per errorem invertisse, debet enim esse: $v = y - \dfrac{r}{q}y + \dfrac{r}{2}$. vel $\begin{array}{l} +1 \\ -\dfrac{r}{q} \end{array} y + \dfrac{r}{2}$.

Iam inverso modo cognita v, ignotaque x, quaeritur quomodo inveniri queat x. Resumenda aequatio prior: $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, pro v ponatur eius aequivalens. Iam

$$v^2 = \begin{array}{l} +\,1 \\ -\,\dfrac{2r}{q} \\ +\,\dfrac{r^2}{q^2} \end{array} y^2 \quad \begin{array}{l} +\,r \\ -\,\dfrac{r^2}{q} \\ \end{array} y + \frac{r^2}{4}, \quad \text{et} \quad -2vy = \begin{array}{l} -\,2 \\ +\,\dfrac{2r}{q} \end{array} y^2 - ry.$$

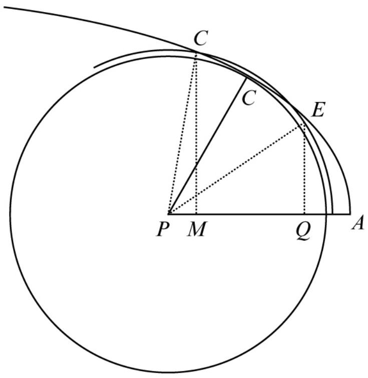
$$\text{Ergo fiet: } s^2 = x^2 \quad \begin{array}{ll} \cancel{+1} & y^2 \\ /\!/ \ \cancel{-\dfrac{2r}{q}} & \\ +\dfrac{r^2}{q^2} & \\ \cancel{+1} & \\ \cancel{-2} & \\ /\!/ \ \cancel{+\dfrac{2r}{q}} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} +\ r & y, \\ -\ \dfrac{r^2}{q} & \\ -\ r & \end{array}$$

sive $$s^2 = x^2 + \frac{r^2}{q^2}\,y^2 - \frac{r^2}{q}\,y.$$

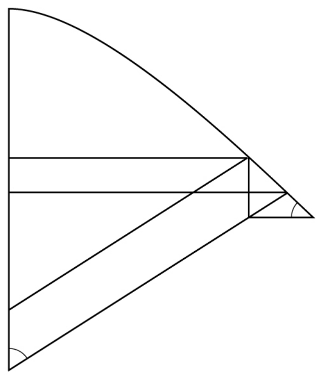
Et haec aequatio $s^2 = x^2 + \dfrac{r^2}{q^2}y^2 - \dfrac{r^2}{q}y$ non minus determinata est, ac illa qua Cartesius utebatur supra relata, cum ex x et y ipsam v vel s quaerebat. Sublata enim x restabant in aequatione tres indeterminatae: $s.\ v.\ y$. Ita nos ex v et y datis quaerentes x et s, elisa iam v per aequationem quam de ea habebamus, ad y, habemus indeterminatas restantes $s.\ x.\ y$.

Iam vestigiis Cartesii presse insistemus: verbis ipsius eius fin. pag. 43 et pag. 44 *Geom.* relatis, mutatis mutandis. Cuius et figuram hic adscribimus:

13 vestigiis Cartesii: Im Folgenden zitiert Leibniz bis auf wenige unwesentliche stilistische Änderungen wörtlich die Betrachtungen von S. 43 Z. 2 v. u. bis S. 45 Z. 21 und versucht, sie (s. die Klammereinschübe) auf das umgekehrte Problem zu übertragen, hat aber keine großen Hoffnungen auf Erfolg (s. u. S. 716 Z. 23).



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Descripto circulo ex centro P qui curvam in punctis C et E secet ex quibus in PA demittantur perpendiculares CM, EQ. iunctis radiis PC, PE inter se aequalibus.

Ita ergo ille[:] Postquam ergo invenimus talem aequationem non ea utemur ad cognoscendas quantitates x vel y. quae hic datae sunt quia punctum C (non minus quam M) est datum, sed ad inveniendam quantitatem v vel s. quae quaesitum punctum P determinant. Ego contra: non utemur ea ad cognoscendas quantitates v et y quae hic datae sunt quia punctum P (non minus quam M) est datum sed ad inveniendam quantitatem x vel s. quae quaesitum punctum C determinant.

In quem finem (pergit Cartesius) considerari debet, si punctum P (substitue C) tale est quale desideratur quod circulus cuius id ipsum est centrum (substitue, quod circulus, cuius centrum est P) quique per punctum C transit tangat ibidem curvam lineam CE neque eam secet. Sed quod si idem punctum P propius aut remotius sumatur a puncto A (hic substitui etiam, puto potest[:] sed quod si punctum C aliud a vero assumatur), circulus hic non solum in puncto C. sed et in alio quodam puncto E curvam CE sit secturus.

Deinde considerandum est quoque, quando hic circulus curvam CE secat, aequatio per quam quantitas x vel y vel quaedam alia similis (substitue: per quam quantitas v vel y vel quaedam alia similis) quaeritur supponendo PA, et PC. seu s, v (quaesitas: substitue x, s seu CM, seu EQ et AQ vel AM) cognitas necessario duas contineat radices inaequales. (Hic iam substitutio incipit difficilis reddi, ac cessat inversio, igitur continuabimus tantum exscribere verba autoris.)

Nam si e. g. circulus hic secet curvam CE in punctis C et E ac ducatur EQ parallela ipsi CM nomina quantitatum indeterminatarum x et y, aeque bene convenient lineis EQ et QA atque ipsis CM et MA. existente $PE = PC$. propter circulum. Adeo ut quaerendo lineas EQ et QA per PE et PA quae tanquam cognitae supponuntur eandem habituri simus aequationem quam si quaererentur CM et MA per PC et PA. Unde liquido constat ipsius x vel y valorem fore duplicem, hoc est aequationem duas admissuram radices quae sint inaequales, quarum quidem una futura est CM altera EQ, si fuerit x quam quaerimus: aut quarum una futura est MA, altera QA, si fuerit y quae quaeritur. (Videtur etiam in nostra inquisitione dici posse, assumto puncto C vero, tunc valorem ipsius EP, et CP. fore aequalem, ac proinde si ope aequationis a nobis inventae, ex data x et y quaeratur s, aequationem habere duas radices aequales.) Verum equidem est, quod cum punctum E non ad eandem curvae partem reperitur cum puncto C una tantum harum radicum sit vera, altera falsa, sed quo haec puncta C et E sibi invicem sunt propiora, eo differentia inter has radices est minor, quae denique omnino aequales futurae sunt, si bina haec puncta in unum punctum cadant, hoc est si circulus qui per C transit curvam ibidem tangat nec omnino secet:

Praeterea considerandum quod aequatio in qua duae sunt radices aequales necessario eandem formam habeat ac si in seipsam multiplicetur quantitas quam velut incognitam supponimus, multata quantitate cognita sibi aequali: et denique haec ultima summa si non tot dimensiones habeat quot praecedens, rursus per aliam summam totidem quot alteri desunt dimensiones habentem, sic ut separatim aequatio inter singulos unius atque singulos alterius terminos haberi possit.

(Haec iam imitari tentabimus; etsi vix putem hic successurum.[])]

Aequatio nostra est: $$\frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y \begin{matrix}+x^2\\ -s^2\end{matrix} = 0.$$

Unde fieri potest $$y^2 - \frac{\frac{r^2}{q}}{\frac{r^2}{q^2}}y \quad \frac{+x^2 - s^2}{\frac{r^2}{q^2}} = 0,$$

vel $$y^2 - qy + \frac{q^2x^2 - q^2s^2}{r^2} = 0.$$

Conferatur cum aequatione eiusdem formae, $y^2 - 2ey + e^2 = 0$, fiet $q = 2e$. Quod est

23 etsi *(1)* difficile sit *(2)* vix *L*

absurdum, cum q sit determinata, e indeterminata. Malum ergo in eo est quod indeterminatae in se invicem non sunt ductae.

Aequatio est $x^2 = s^2 - \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y$, sive $x = \sqrt{s^2 - \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y}$.

Sumatur alia x paulo maior priore, $x+\beta$, fiet $x^2+2\beta x+\beta^2 = s^2 - \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y$. Sed nihil hinc.

An ergo per y. fiat: $\frac{r^2}{q^2}y^2 = s^2 - x^2 - \frac{r^2}{q}y$, et pro altero y substituatur $y+\beta$, fiet $\frac{r^2}{q^2}y^2 + \frac{2r^2\beta}{q^2}y + \frac{r^2}{q^2}\beta^2 = s^2 - x^2 - \frac{r^2}{q}y$.

Totum artificium est, ita effingere aequationem, ut aliqua inde sequatur destructio mutua, inde enim nova haberetur aequatio.

Aequatio ipsius v, nihil aliud nos docet, quam terminum qui in aequatione quaesita ipsum v multiplicabit.

E. g. in proposito exemplo, ubi aequatio haec

$$\begin{array}{llll} y^2 & \dfrac{+r-2v}{-\frac{r}{q}+1}y & \dfrac{+v-s^2}{-\frac{r}{q}+1} & =0 \\ y^2 & -2ye & +e^2 & =0 \end{array}$$

datur valor ipsius v, ad y. Ergo vicissim si caeteris non datis, detur tantum valor ipsius v ad y aequationis illius quaesitae unus terminus quodammodo fingi potest.

$$s^2 - x^2 - \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y = 0.$$

8–16 *Daneben später ergänzt:* Ope geometriae series quoque arithmeticae sive finitae sive infinitae inibuntur. E. g. pro his: $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. multum productis, summa haberi potest per appropinquationem scilicet ope quad. hyp.

17 *Neben der Gleichung großes* NB.

---

3 Aequatio: Hier unterläuft Leibniz ein Übertragungsfehler: bei konsequenter Rechnung müsste $\frac{r^2}{q}y$ Plus als Vorzeichen haben. Der Fehler vererbt sich weiter.

Cum tres sint quantitates indeterminatae, manifestum est locum esse solidum. Is ergo locus solidus ponatur descriptus. Eligatur iam aliquis locorum planorum hunc solidum componentium, qui residuae problematis conditioni satisfaciat; residua autem problematis conditio est, ut $\underline{s}$ hoc modo inventa, sit minima omnium, quae ex puncto P. quo $s = \underline{PC}$ rectam pro mensura assumtam, in qua ipsae y assumuntur, secat, ad loci huius plani terminationem seu curvam CE duci possint. Sive, ut data positione AP, indefinita, sumtaque pro arbitrio magnitudine ipsarum $AM = y$, et $PC = s$. sumatur ipsa $MC = x$ talis, ut ipsa CP fiat omnium possibilium minima, id est, ut alia aliave x assumtis, ipsa s fiat maior.

Nescio an hoc ita dici debeat[:] Habemus aequationem quae nos doceat, data x, et y, quanta futura sit s. Superest alia praeterea conditio, quae nos doceat, ipsam x talem assumendam, ut si alia x eodem modo ex alia y composita assumatur, ipsa s sit minima quae ad earum terminationes ex puncto P duci possit. Unde apparet quod est difficillimum, non ipsam x sed regulam aliquam ipsas x inveniendi ex datis y quaeri, quae proposito satisfaciat. Quae regula nec semper aequatio erit.

Non negligenda tamen quae hic de loco solido observata sunt. Forte enim sequitur solidi inventi sectionem quandam per quoddam planum qualiscunque ea sit proposito satisfacere. Quod si demonstrari posset, hinc consequentias alias rursus duceremus, nimirum si data esset aequatio ipsarum v, eam in aliam quandam transmutaremus eiusmodi naturae, ut ipsarum v, summa aliquando, haberi possit, uti videmus contingere in certis quibusdam segmentis cycloeidis. Idem forte comminisci liceret semper, quo facto aliquas saltem rectas loci plani quaesiti ex solidi sectione inveniendi haberemus; atque ita rursus posset fortasse ipsum illud planum determinari ope unius eiusmodi rectae inventae aut plurium.

Adde aliud artificium; adhibeatur alia quaedam figura aliarum v. ut alicubi vel etiam aliquo demto additoque, semper summa earum summae priorum aequalis sit, atque huius

2 iam *(1)* aliqua indeterminatarum eiusmodi ut *(2)* aliquis *L* 13 possit *(1)* . Sed haec conditio *(2)* vel ipsam x talem assumendam *(3)* . Unde *L* 14 sed | aequationem sive *erg. u. gestr.* | regulam *L*

21 segmentis cycloeidis: vgl. dazu *LSB* III, 1 N. 29 S. 115 f. sowie Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 69 (*HO* XVIII S. 205); s. a. N. 17 S. 344 Z. 2 – S. 346 Z. 2.

locus solidus itidem describatur: Videndum est an horum duorum, imo quia id quoque comminisci licet, plurium quoque locorum solidorum intersectio communis quaesitum nobis patefaciat. Videndumque an alibi se intersecare possint, sive an aliud habere possint planum commune, quam quaesitum. Et quod si duo possint, certe tria, 4, 5, etc., possumus enim habere eiusmodi loca solida ad propositum facientia quotlibet; unam eandemque intersectionem communem habere non poterunt, nisi unicam. Nimirum: inter aliqua plana cuiuslibet est aliquod quod proposito satisfacit, seu quod continet omnes x ad rem aptas; ita enim arbitror sequi ex dictis, etsi supersit dubitandi ratio quaedam; nondum enim forte demonstratum est omnes x ad rem pertinentes in aliquod loci solidi planum cadere, idque axi assumto perpendiculare. Nimirum puncta omnia, quae ipsis C aequivalere queant, erunt in ipsius solidi superficie. Est ergo l o c u s a d s u p e r f i c i e m omnes x, seu ex punctis in axem demissae perpendiculares aequationi (scilicet seclusa illa conditione, quae in aequationem redigi non potest), satisfaciunt. Sit alia quaedam figura aliarum v, quarum summa vel semper (e. g. in figura segmentorum si quid ipsi addatur item sufficit convexa concavis comparari), vel aliquo modo pure (ut in fig. segmentorum tota, aut cissoeide tota, aliterve), vel semper pure (ut ni fallor certo quodam figurae genere a me inventum) datae aequetur; huius quadratricis puncta C itidem superficiei solidi cuiusdam alia quadam ratione describendi, continebuntur. Punctum C quod quae-

---

1–3 *Dazu später ergänzt:* Nota doctrinam serierum convergentium a Iac. Gregorio stabilitam, hoc quoque loco utilem esse posse, ad intersectiones sive per aequationem, sive per numerum exprimendas.

15 item . . . comparari *erg. L*

---

19 doctrinam serierum convergentium: vgl. dazu *LSB* VII, 3 N. 20 [Spätes Frühjahr – Sommer 1673] S. 249 f.

sito cuidam, ubi scilicet aliquando aequales sunt duae summae, satisfaciat, erit in harum duarum superficierum intersectione communi.

Sed duae superficies istae se secare possunt multis locis, et quolibet loco intersectio communis erit linea: hic primum ex variis locis excludi poterunt alieni a re praesenti, ope appropinquationum, quodam velut dioristicae genere, sed, ut in ipsa linea intersectionis communi punctum quaesitum plene definiatur, adhibeantur rursus aliae v (retento scilicet semper eodem axe, et ipsis y et s. arithmetice seu continue proportionaliter inter se, et secum ipsis uniformiter crescentibus) sygnotae, quarum scilicet locus solidus eodem plane modo describatur; necesse est hunc locum solidum, rursus priorem in multis locis secare; et quidem, in loco per dioristicen appropinquationum iam definito. Cumque trium superficierum intersectio communis sit punctum, ita tandem punctum habebimus. Et quoniam methodus a me ostensa est, cuilibet figurae quotlibet alias sygnotas exhibendi, hinc ad eandem solutionem infinitis modis pervenire poterit, semperque idem reperietur punctum intersectionis; ut adeo hanc methodum etiam examen sui secum ferre, manifestum sit.

Unde sequitur quadraturas esse universaliter loquendo, p r o b l e m a t a a d s u p e r f i c i e m quemadmodum inventiones rectarum curvis aequalium, vel contra, centra gravitatis, sectiones curvarum in qualibet data ratione. Unde patet etiam logarithmorum constructionem geometricam per loca ad superficiem fieri posse. Unde porro sequitur, eas [curvas] quarum longitudo per rectam curvae aequalem determinatur, sive

---

2 *Nach* intersectione communi *später ergänzt:*
Sequi videtur sufficere figuras omnino duas isometros, sive quae aliquando data aequali altitudine sint aequales. Nihilominus enim tertia habebitur determinatio ab ipsa y determinata. Nimirum planum ad axem duorum locorum solidorum communem perpendiculare ipsam y abscindat. Punctum quo planum hoc per duorum locorum solidorum intersectionem communem transit, erit quaesitum. Ideo sufficit a nobis adhiberi ipsum circulum, et figuram angulorum, sumto utrobique quadrante, seu figura ad quadrantem aequali, et y posito $=$ radio.

19 rectas *L ändert Hrsg.*

---

12 sygnotas: zur Terminologie s. a. *LSB* VII, 3 N. 23 [Herbst 1673] S. 264–270.

per fila, amplius [mechanicas censendas]; sed mechanicam debere videri determinationem punctorum appropinquatoriam, et descriptionem figurarum per puncta seu discontinuam.

Interea tamen per accidens evenit, ut saepe numero quadraturae per solas lineas sive aequationes duarum quantitatum indeterminatarum definiri queant, tunc nimirum quando constans quaedam ratio est tangentium ad abscissas; aut cum pro arbitrio, eiusmodi figuras comminiscimur.

Videndum item an diversis eiusmodi aequationibus inter se comparatis, quarum una e. g. ipsam x explicat cum v, sunt ordinatae circuli, altera cum ordinatae figurae segmentorum; sumendoque y arbitrariam talem, ut in uno constituat totum e. g. semicirculum, in altero altitudo sit figurae segmentorum portionis semicirculo aequalis; necesse est ipsam x esse aequalem utrobique. Atque ita videtur determinari problema, atque alterutra ex duabus indeterminatis x vel y elidi.

Sed nova tamen videtur nasci difficultas ex eo quod etsi x diversarum illarum aequationum sint aequales, tamen $\underline{s}$ sint inaequales, neque cognitae inter se rationis. Equidem verum est esse cognitam rationem v ad $\underset{..}{v}$, et $x = \underset{..}{x}$, et esse $s^2 = x^2 + v^2$, vel $\underset{..}{s}^2 = x^2 + \underset{..}{v}^2$. Ergo

$$\left[\frac{\underset{..}{s}^2}{s^2}\right] = \frac{x^2 + \underset{..}{v}^2}{x^2 + v^2} = 1 + \frac{\underset{..}{v}^2}{x^2} - \left[\frac{v^2}{x^2 + v^2} + \frac{v^2 \underset{..}{v}^2}{x^2 \frown x^2 + v^2}\right].$$

satis apparet non ideo haberi $\underset{..}{s}^2$ ad s^2. Frustra ergo s resolvitur in x et v, neque inde aliquid amplius discitur. Unde apparet nondum ex his dari rationem deprimendi haec problemata, et ex superficiariis reddendi linearia.

13–20 *Dazu später ergänzt:* Etsi ex duarum istarum aequationum collatione non possit problema reduci ad duas incognitas, quia tamen hoc modo intersectione determinatur penitus punctum aliquod quaesitum, geometrice; poterit ea determinatio postea calculo exhiberi, et rectae ex puncto in axem perpendiculariter demissae quaesitae valor, analytice opinor enuntiari.

1 mechanicam censendam *L ändert Hrsg.* 17 $\frac{s^2}{\underset{..}{s}^2}$ und $\frac{v^2 - \underset{..}{v}^2 v^2}{x^2 + v^2}$ *L ändert Hrsg.*

---

15 $\underset{..}{v}$. $\underset{..}{x}$: Zu dieser Bezeichnung vgl. N. 51_3 S. 821 Z. 12.

Idem est si quotcunque eiusmodi aequationes congerantur, quia etsi earum omnium x sint aequales; esse tamen ipsas $\underline{s}$ iterum novas. Quoniam tamen hinc novam quandam conditionem innotescere patet, hinc mirum non est, si superficierum saltem intersectionibus problema resolvatur. Equidem si plures adhuc aliae accedant aequationes, identicae sunt fateor et ex eodem principio ductae. Utiles sunt tamen, contra quam prima fronte videri possit. Equidem fateor si semel omnes problematis conditiones inclusae sint aequationi, alias omnes esse supervacuas (nisi forte ad reductiones), sed hoc loco non potuimus unquam conditionem problematis residuam plene in aequationem redigere, unde aliquot conditionibus eiusmodi semiplenis utendum est.

Superest quaerere modum describendi aliquam superficiem curvam aequatione quadam tres indeterminatas quantitates habente expressam; neque enim id a Cartesio explicatum est. Id optime opinor[:] fingi potest planum quoddam rectae cuidam velut axi affixum descendere, atque interim ex aequationis legibus crescere atque decrescere. Sed non est hoc commodum praxi.

[*Spätere Zusätze*]

[*Zusatz 1*]

Examinandum in numeris quantum intersit terminus maximus seu basis an vero altitudo in aequales partes divisa intelligatur.

Loco reductarum aliae quaedam functiones quoque ad quadraturas inveniendas serviunt. Et quas facilius ad numeros transferas.

Si geometrica ad numeros tranfers, error est aliquis, sed qui nunquam est maior termino maximo in unitatem, seu intervallum terminorum ducto. Ideoque utile est assumere intervallum terminorum minus unitate, fractionem nempe talem, ut maximus terminus in eum ductus sit tamen valde exiguus. Imo nihil prodest ni fallor haec suppositio, cum omnia eodem proportione reveniant.

5 ductae *(1)* , sed faciliorem tamen usum reddunt; ac aequationem quod alioqui ea obtineri nequeat facilius *(2)* . Utiles *L* 12 opinor[:] *(1)* fieri potest fingendo *(2)* fingi *L*

0	1	4	9	16	16	25	36	49	64
	1	3	5	7		9	11	13	15
	0	3	20	63		144	275		
	1	12	45	112		225	396		

				3		
		112		20		405
	16	45		63	170	2
16	112	12	86	144	225	$\overline{810}$
7	32	1	2	275	396	791
$\overline{112}$	$\overline{144}$	$\overline{170}$ NB.	$\overline{172}$ NB.	$\overline{405}$ *(!)*	$\overline{791}$	$\overline{19}$

Vide quam parum haec duo producta distent a duplis. Haec ultra indaganda, ductis terminis in suas differentias, summaque earum tum cum aliis, tum cum semiquadrato termini maximi.

[*Zusatz 2*]

$v = \sqrt{4ay - 4y^2}$. duplus sinus circuli

$v = \dfrac{\left[\frac{1}{2}\right] a^2}{\sqrt{ay - y^2}}$. dupla ordinata figurae angulorum

$v = \dfrac{[a]y}{\sqrt{ay - y^2}}$ vel $\dfrac{[a]\sqrt{y}}{\sqrt{\llcorner a - y \lrcorner}}$. [dupla] ordinata figurae segmentorum.

Eligatur y eiusmodi, ut portio in una quaque figura abscissa sit aequalis, nimirum quadrans, unde figura segmentorum dimidia, licet infinite longa assumenda; imo potius omnis duplae.

15 *(1)* $\mathrm{x} = \sqrt{2\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}$ *(2)* $\mathrm{v} =$ *L* 16 *(1)* $\mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\sqrt{2\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}}$ *(2)* $\mathrm{v} = \dfrac{2\mathrm{a}^2}{\sqrt{\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}}$ *L ändert Hrsg.* 17 *(1)* $\mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{ay}}{\sqrt{2\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}}$ | vel $\dfrac{\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{y}}}{\sqrt{\llcorner 2\mathrm{a} - \mathrm{y} \lrcorner}}$ *erg.* | *(2)* $\mathrm{v} = \dfrac{2\mathrm{ay}}{\sqrt{\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}}$ vel $\dfrac{2\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{y}}}{\sqrt{\llcorner 2\mathrm{a} - \mathrm{y} \lrcorner}}$ ordinata *L ändert Hrsg.*

Hinc iam si valores v in aequationem $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$ inserantur,

fiet: $s^2 = x^2 + 4ay - \overset{3}{\cancel{4}}\,y^2 - \sqrt{16ay^3 - 16y^4}$.

vel $s^2 = x^2 + 4ay - 3y^2 - 4y\sqrt{ay - y^2}$.

vel $s^2 - x^2 - 4ay + 3y^2 = [-]\ 4y\sqrt{ay - y^2}$.

vel $\dfrac{s^2 - x^2}{4y} - a + \dfrac{3}{4}y = [-]\sqrt{ay - y^2}$.

$$\text{vel}\ \frac{s^4 - 2s^2x^2 + x^4}{16y^2} \quad \frac{-as^2 + ax^2}{2y} \quad \frac{+\dfrac{3}{16\ \cancel{4}}s^2\cancel{y} - \dfrac{3}{16\ \cancel{4}}x^2\cancel{y}}{\cancel{4}\cancel{y}}\ [2] + a^2$$

$$-\frac{3}{2}ay + \frac{9}{16}y^2 = ay - y^2.$$

$$\text{fiet: } \frac{s^4 - 2s^2x^2 + x^4}{16} \quad \frac{-as^2y + ax^2y}{2} + \left[\frac{3}{8}\right] s^2y^2 - \left[\frac{3}{8}\right] x^2y^2 + a^2y^2 - \left[\frac{5}{2}\right] ay^3 + \frac{25}{16}y^4 = 0.$$

Eodem modo et caetera v investigari possunt et horum locorum ad superficiem intersectio communis dabit punctum, ex qua demissae ad axem y perpendicularis quadratum dimidium aequabitur semicirculo, modo y assumatur in omnibus aequalis, ipsa nempe diameter. Id enim ad leges harum constructionum pertinet; ut figurae aequales eiusdem sunt altitudinis, ita ut eadem sit y ac determinata. Unde illud quoque.

4 f. $-$ *erg. Hrsg. zweimal* 6 2 *erg. Hrsg.* 8 $+\frac{3}{16}\mathrm{s}^2\mathrm{y}^2 - \frac{3}{16}\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 + \mathrm{a}^2\mathrm{y}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{ay}$ *L ändert Hrsg.*

42. PRIMA CIRCULI QUADRATURA
[Herbst 1673]

Datierungsgründe: Die beiden Stücke dieser Nummer bildeten zunächst eine Einheit. Dies beweisen die Bogenmarkierungen sowie der kustodengesicherte Textübergang. Später hat Leibniz den Zusammenhang aufgehoben und N. 42_1 nach Umarbeitung des Schlusses, unter Beibehaltung der Markierung (1) dem eigentlichen Haupttext (Druck in einem späteren Band der Reihe VII) Cc 2, Nr. 1233A Bog. (2) u. (4) sowie Cc 2, Nr. 563 = Bog. [(3)] vorangesetzt. Hierbei ist N. 42_1, wie insbesondere die Nummerierung von Figuren und Theoremen auf Bog. (2) zeigt, durchaus selbständig geblieben. Die Entdeckung der Kreisreihe selbst ist auf Herbst 1673 anzusetzen. Dies ergibt sich aus dem Wasserzeichen des verwendeten Papiers (belegt: Nov. 1673), der Notation sowie dem vorläufigen Bericht am Jahresende 1673 an Huygens, der ihm daraufhin einschlägige Literatur mitgegeben hat (s. *HO* XX, S. 388; vgl. auch *LSB* III, 1 S. LIV–LV). — Weiterhin gibt es dafür ein spätes Selbstzeugnis (Leibniz an Conti, *LBG* S. 278), in welchem Leibniz als Zeit der Entdeckung der Kreisreihe „ungefähr Ende 1673“ angibt.

42_1. REDUCTIO GEOMETRICA

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 89–90. 1 Bog. 2°. 4 S. Zahlreiche Änderungen und Ergänzungen. Auf Bl. 89 r° ca 7 cm breiter Rand für die Figuren (dort auch das ebenfalls ergänzte Lemma). Bogenmarkierung.
Cc 2, Nr. 1233A tlw.

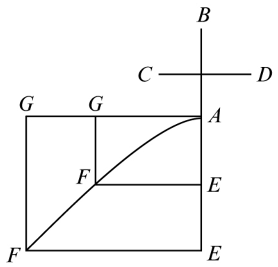


fig. 1.

19 *fig. 1.*: Entsprechend dem ursprünglichen Ansatz, s. die Variante, stellt fig. 1 eine Hyperbel dar; sie dient gleichzeitig als Paradigma für die Parabel.

Esto f i g u r a 1. FAE. et recta quaedam constans AB. abscissa quaelibet AE, applicata quaelibet EF.
Si iam $FE^2 = EB \frown AB$ vel $AE \frown AB + AB^2$. ideo ponendo $FE = y$. $AE = x$. et $BA = a$. fiet aequatio $y^2 = ax + a^2$.
Unde sequitur: $y^2 - a^2 = ax$. ac denique $\dfrac{y^2 - a^2}{a}$ vel $\dfrac{y^2}{a} - a = x$. Est autem $x = FG$. applicata trilinei concavi. Ideo cum summa omnium x facile iniri possit, habebitur et area FGA. et figurae FAE quadratura. Unde intelligi potest curvam esse parabolicam.

At si curva sit hyperbolica, et AB sit latus transversum, aequale CD. lateri recto, erit per 21. 1^mi *Conicorum* $EF^2 = AE \frown BE = BE^2 + AB \frown AE$. sive $y^2 = x^2 + ax$. Ostensum est autem alibi (vid. P. Fab. *Synops.* pag. 80. 184. 293. Tab. 1. fig. 18.) esse aliam quandam rectam constantem quam vocabo $\dfrac{a}{\beta}$, et alias quasdam rectas $\dfrac{x}{\delta}$ arithmetica progressione incedentes, quibus assumtis, retentoque y^2 applicatae hyperbolae quadrato, haec oriatur aequatio: $y^2 = \dfrac{x^2}{\delta^2} - \dfrac{a^2}{\beta^2}$.
Conferantur hae duae aequationes, fiet:

$$\frac{x^2}{\delta^2} - \frac{a^2}{\beta^2} = x^2 + ax. \text{ sive } \frac{x^2}{\delta^2} - x^2 - ax = \frac{a^2}{\beta^2}.$$

Quaestio hoc loco fieri potest an non tetragonismus circuli ex tetragonismo hyperbolae pendeat et vicissim, ob cognationem aequationum. Nam ut in circulo $y^2 = ax - x^2$. ita in hyperbola $y^2 = ax + x^2$.

1 Esto *(1)* hyperbola FAE. cuius latus rectum CD. transversum AB. *(a)* altitudo *(b)* abscissa *(2)* f i g u r a 1. FAE. et recta *(a)* quaelibet *(b)* quaedam constans *L* 3 AB². | per *(1)* 20. *(2)* 21. 1^mi Conicorum *erg. u. gestr.* | ideo *L*

9 erit: APOLLONIOS, *Conica*, I. 21. S. dazu die Variante zu Z. 3 sowie Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, *DGS* I S. 212 f. 10 vid. P. Fab.: s. N. 1.

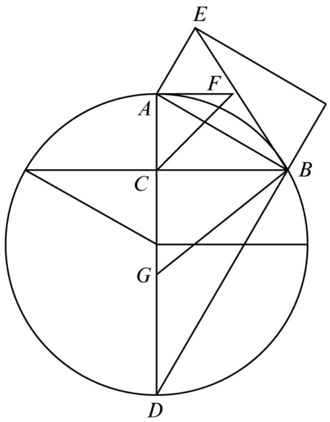


fig. 2.

Ducta in circulo f i g. 2. chorda AB, cuius $\square$ est ax (posita $AC = x.$ et $AD = a.$), ducitur $AE = AC = x.$ perpendicularis ad $AB.$ iunctaque recta BE erit applicata hyperbolae ad axem.

Contra ducta $AF = AC.$ et iuncta $FC.$ erit $FC^2 = 2x^2.$ et $CG = CF.$ erit iuncta $BG = BE.$ applicata hyperbolae. Nam $GB^2 = CB^2 + CG^2.$

Iam $CB^2 = ax - x^2.$ et $CG^2 = 2x^2.$ erit $GB^2 = ax - x^2 + 2x^2 = ax + x^2.$

Deinde in circulo $y^2 = a^2 - x^2.$ in hyperbola vero $y^2 = x^2 - a^2.$

(Nota tamen quod ita crescunt x in circulo, quando applicatae decrescunt, cum in hyperbola simul decrescant.)

Dividantur $\dfrac{ax - x^2}{\dfrac{ax}{\beta\cancel{\delta}} + \dfrac{x^2}{\cancel{\delta^2}}}$. Videndum an eadem semper ratio, utcunque augeatur minuaturve $x.$ quod non est. Sumatur a utrobique idem, solo x posito diverso. Et postea sumatur $\dfrac{2xa - 4x^2}{\dfrac{2xa}{\beta} + 4x^2}$ vel $\dfrac{ax - 2x^2}{\dfrac{ax}{\beta} + 2x^2}$. Videndum an haec ratio eadem cum priore. At certum est non esse. Alioquin figurae forent homogeneae.

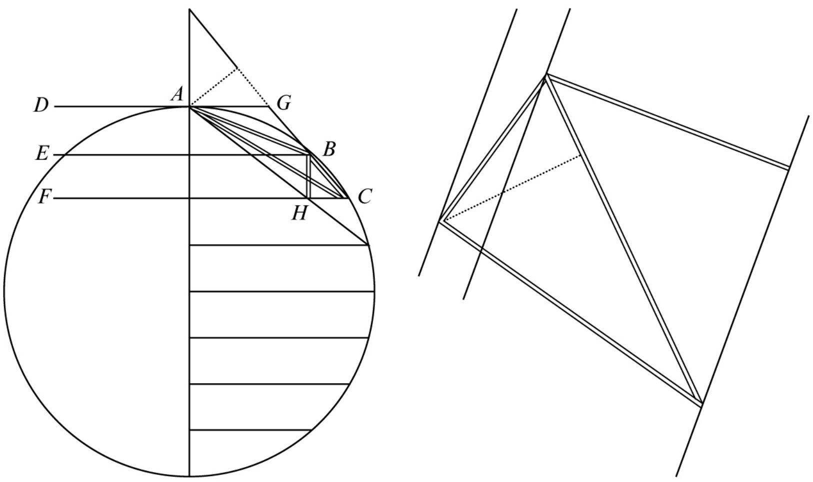
At ego aliam reperi rationem sane admirabilem demonstrandi quadraturam circuli ex data hyperbolae quadratura et vicissim.

10+12 Neben δ wäre hier auch β zu streichen gewesen. 15 vicissim: s. N. 44.

Esto in fig. 3. [*Figur s. S. 729*] circulus centro A. radio AB. quadrans circumferentiae BCD. et ex quolibet puncto in eo assumto C. ducatur tangens CE. donec scilicet radio AB producto occurrat in E. Eadem rectae BF, parallelae AD. occurret in F. Ad rectam EFC agatur ex B normalis. Denique ex C demittatur in AB perpendicularis CH.

In hoc diagrammate manifestum est ante omnia $BF = CF$. Addo iam esse etiam $BG = BH$. Ducta enim ex B in AC perpendiculari BI. ea utique ipsi EC parallela est (quia utraque est ad eandem AC perpendicularis), ergo $BG = CI$. Iam $CI = BH$. Ergo et $BG = BH$. Quod autem $CI = BH$. constat ob circuli uniformitatem, sed et nullo negotio demonstrari potest. Triangula rectangula AIB et AHC similia sunt, ob angulum non rectum BAC communem. Iam $AC = AB$. ergo et $AI = AH$. Ergo etiam $AC - AI$ seu CI erit $= AB - AH$ seu BH. Nunc AB vocemus a. et $BH = BG = CI$ vocemus x. et $HC = BI$, y. Iamque investigemus rectam BF. Quod ut fiat compendiosius, considerandum est, triangula FGB et AHC esse similia, et angulum $BAC =$ angulo BFG. Manifestum enim est angulum EBG esse $=$ angulo BAC. at angu-

729,1 *Zu* fig. 3.:



1 fig. 3.: Zunächst hat Leibniz nur den auf den folgenden Text (bis S. 734 Z. 7) bezogenen Teil von fig. 3. gezeichnet. Erst dann hat er die Figur um den die Zissoide betreffenden Teil ergänzt. S. a. die Erl. zu S. 734 Z. 11.

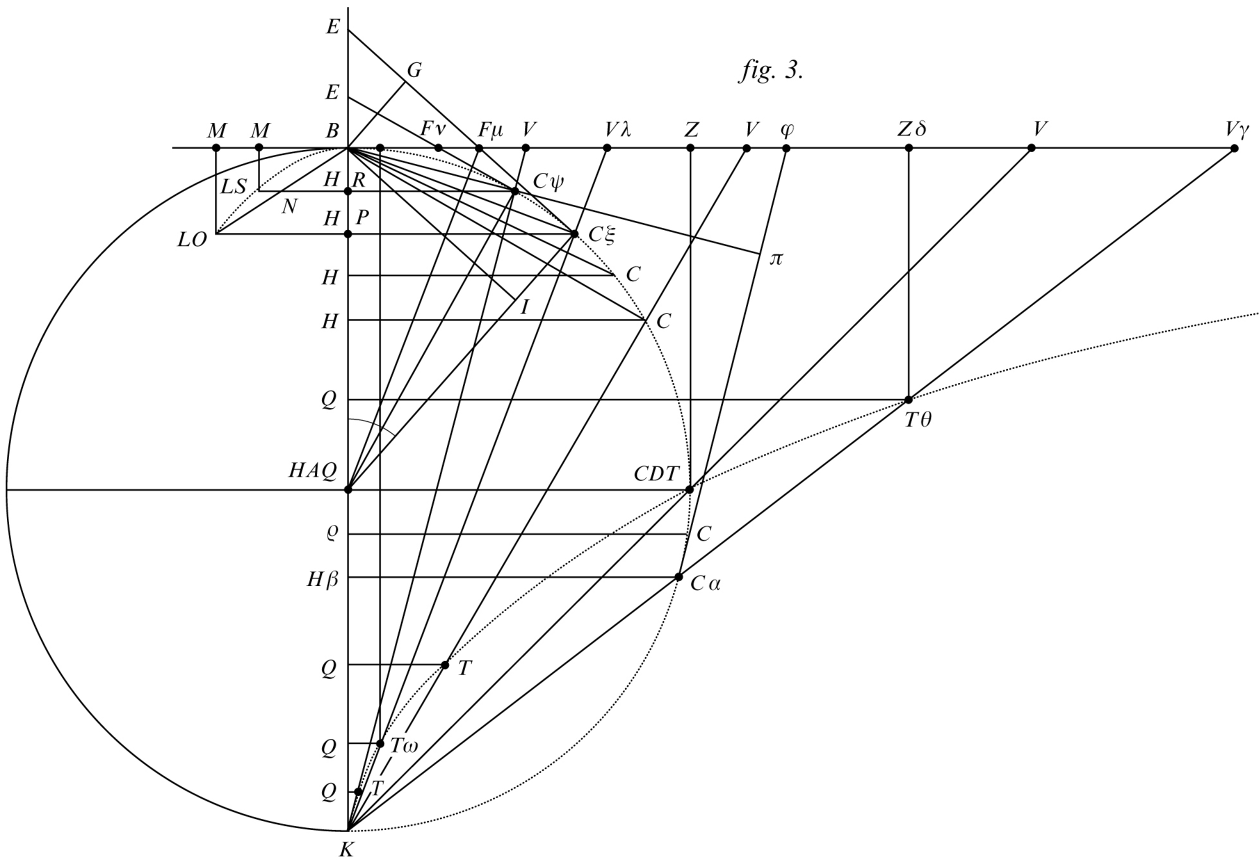


fig. 3.

Lemma: Si per trianguli tres angulos $A.B.C.$ totidem transeant rectae parallelae $DA.\ EB.\ FC$ et latus aliquod velut BC producatur, dum DA parallelae anguli oppositi A productae si opus est occurrat in G, rectangulum sub intervallo AG dicti anguli oppositi A a puncto occursus G et BH intervallo $EB.\ FC$ parallelarum duorum reliquorum angulorum $B.C.$ aequatur triangulo proposito ABC duplicato.

lo EBG aequalem esse angulum BFG patet. Ergo

$$BF : AC :: BG : HC. \text{ ac proinde } BF = \frac{AC \frown BG}{HC} \text{ sive } \frac{ax}{y}.$$

Nunc punctum arcus circuli AC quodlibet unum post alterum appellemus C. eodemque plane modo tractari cogitemus, similiterque punctis aliis ad priora respondentibus easdem literas $H. E. F.$ etc. demus, ac denique omnes ac singulas BF transferamus in HL. ac in punctis H respondentibus ipsi BA ordine ad perpendiculum applicemus. Orietur figura quaedam curvilinea $BLLH$. Cuius ut indagemus naturam, abscissae eius, quae eadem cum circulari est BH. relinquamus appellationem x, applicatam HL appellemus recepto more y. Atque ideo confusionis vitandae causa priori $y = HC$. substituamus eius definitionem, quae est, ex natura circuli: $\sqrt{\llcorner 2ax - x^2 \lrcorner}$. Ac proinde cum antea dixerimus $BF = \dfrac{ax}{y}$. nunc dicemus $BF = HL = y = \dfrac{ax}{\sqrt{\llcorner 2ax - x^2 \lrcorner}}$. Unde sequitur

$$HL^2 = y^2 = \frac{a^2x^2}{2ax - x^2}.$$

Nunc inverso modo quasi cognita y quaeramus ipsam x. Id est loco figurae $BLLH$ consideremus $BLLM$ figurae $BLLH$ supplementum ad rectangulum BL; sumtisque abscissis BM. quae applicatis LH prioris figurae aequales sunt, ac proinde y vocari possunt, quaerantur $ML = BH = x$. Ac proinde ut ante x assumtae sunt progressionis arithmeticae, et y quales natura figurae dare potest, ita nunc contra y velut cognitis et arithmeticae progressionis assumtis, quaeratur x.

Quod antequam fiat obiter annoto, figuram $BLLH$ esse convexam, et $BLLM$ concavam.

Nam ut confusio vitetur literarum, maior LH appelletur OP. et minor LH appelletur SR. Iamque ducta recta OB. quae ipsi SR productae si opus est, occurrat in puncto N. aio istam SR esse maiorem quam NR. ac proinde non esse opus ut SR producatur ad occursum, quod ita demonstro[:]

Cum sit $BR : [BP] :: NR : OP$. ratio ista $\left[\dfrac{BP}{BR}\right]$ appelletur β. ac OP divisa per β dabit NR, quae an maior minorve sit quam SR ita ex calculo patebit:

$OP = \dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$. quae divisa per β dabit $NR = \dfrac{ax}{\sqrt{2\beta^2 ax - \beta^2 x^2}}$. At SR habebimus

24 BO *sowie* $\dfrac{\text{BR}}{\text{BO}}$ L *ändert Hrsg.*

ex OP si in SR pro $[BP] = x$. substituamus $BR = \dfrac{x}{\beta}$, fiet $SR = \dfrac{\dfrac{ax}{\beta}}{\sqrt{\dfrac{2ax}{\beta} - \dfrac{x^2}{\beta^2}}} = \dfrac{ax}{\sqrt{2\beta ax - x^2}}$. Restat ergo ut videamus utrum maius sit: $2\beta^2 ax - \beta^2 x^2$, an vero $2\beta ax - x^2$. Et vero cum β sit numerus maior unitate, et a maior quam x. ideo a appellabo γx. fiet: $2\beta^2\gamma x^2 - \beta^2 x^2$, item $2\beta\gamma x^2 - x^2$, divisis omnibus per x^2, fiet: $2\beta^2\gamma - \beta^2$. item $2\beta\gamma - 1$. Quorum utrum altero maius sit nova quaestio est.

Ac primum ponamus $\beta = \gamma$. id est $[BR : BP :: BP : a]$. fiet $2\gamma^3 - \gamma^2$. item $2\gamma^2 - 1$. Manifestum est $2\gamma^3 - \gamma^2 - \gamma^2 + 1 = 2\gamma^3 + 1 - 3\gamma^2$. [esse maius quam 0.] Et vero si $\gamma = \beta$ est 2 aut maior quam 2. (Imo et si paulo minor, sed haec subtilius hoc loco determinare nihil attinet.)

Sin $\beta = \gamma + \delta$. tunc $2\beta^2\gamma - \beta^2$. item $2\beta\gamma - 1$. ita poterunt enuntiari: $2\gamma^3 + \delta^2\gamma + 2\delta\gamma^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2\gamma\delta$. item $2\gamma^2 + 2\delta\gamma - 1$. Ergo videndum an sit maior quam 0, haec quantitas:

$$2\gamma^3 + \underset{\theta}{\cancel{\delta^2\gamma}} + 2\delta\gamma^2 - \cancel{2\gamma\delta} + 1 - 3\gamma^2 - \cancel{\delta^2} - \overset{4}{\cancel{2}}\delta\gamma.$$

Manifestum est δ^2 esse minus quam $\delta^2\gamma$. et differentiam esse θ. Tandem manifestum est $2\gamma^3$ esse maiorem quam $3\gamma^2$ si γ sit 2 aut maior (vel etiam paulo minor) quo casu et $2\delta\gamma^2$ maior vel aequalis $4\delta\gamma$.

His ergo casibus SR maior quam NR.

Si γ est maior quam β. erit $\beta = \gamma - \delta$. et $2\beta^2\gamma - \beta^2$. item $2\beta\gamma - 1$. ita poterunt enuntiari: $2\gamma^3 + \delta^2\gamma - 2\delta\gamma^2 - \gamma^2 - \delta^2 + 2\gamma\delta$. item $2\gamma^2 - 2\delta\gamma - 1$. Videndum ergo an sit maior quam

---

15 $\dfrac{5}{4}$ $\quad \dfrac{25}{16} \frown 3 = \dfrac{75}{16}$. $\quad \dfrac{125}{64} \frown 2 = \dfrac{250}{64}$.

1 BO *L ändert Hrsg.* 6 BR : BO :: BO : a *L ändert Hrsg.* 7 esse maius quam 0. *erg. Hrsg.*

10–733,5 Die zweite und die dritte Abschätzung sind nicht fehlerfrei. Bei der 2. Abschätzung vernachlässigt Leibniz bei den Gliedern $\delta^2\gamma$ und $2\delta\gamma^2$ den zusätzlichen Faktor 2, was aber lediglich eine Vergröberung bedeutet. Bei der 3. Abschätzung kommt zu diesen noch ein wesentlicher Übertragungsfehler hinzu, so dass die 3. Abschätzung nur vermeintlich gelingt.

0 haec quantitas:

$$2\gamma^3 + \underset{\theta}{\cancel{\delta^2\gamma}} + \cancel{2\gamma\delta} + 1 - 3\gamma^2 - \cancel{\delta^2} - \cancel{2\delta\gamma}.$$

Unde rursus intelligitur, si γ sit maior quam 2, SR esse maiorem quam NR.

Generaliter ergo dici potest, si $\frac{a}{x}$ maior quam 2. erit $\frac{SR}{NR}$ maior quam 1.

At si BH maior fiat dimidia AB. contingere tandem necesse est, ut figura ex convexa concava fiat. Punctum autem flexus contrarii exacte definire, hoc loco nihil attinet.

Haec obiter tantum attulisse iuvabit, ut appareat rem eo redire, ut quaerantur duae rectae SR et NR facili calculo, dividendo basin figurae PO per β. posita β ratione altitudinis figurae BP ad abscissam datam BR. quo pacto habebitur NR; ac in eadem PO, pro x substituendo $\frac{x}{\beta}$ habebitur SR. Suppono autem ipsam PO. aequatione quadam omnia figurae puncta ad altitudinem BP referente, cognitam. Inventae SR et NR comparentur, facileque constabit ex regulis, quae de determinatione, et limitibus aequationum extant, utra alia quove casu maior sit minorve. Nam si perpetuus est vel excessus vel defectus, figura concava aut convexa est, sin aliquis limitibus continetur, duobus pluribusve flexibus contrariis figura constabit.

Ac nunc quidem ad aequationem nostram

$$y = \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

redeamus. Ac nunc quidem ipsas x. seu LM. applicatas trilinei concavi $BLLM$, quaeremus. Nimirum eliminata surditate, fiet: $y^2 = \frac{a^2x^2}{2ax - x^2}$. et reformata fractione habebimus: $2y^2ax - y^2x^2 = a^2x^2$, divisisque omnibus per x. erit: $2y^2a - y^2x = a^2x$. sive $2y^2a = a^2x + 2y^2x$, ac denique

$$\frac{2y^2a}{a^2 + 2y^2} = x.$$

---

13 constabit ex regulis: vgl. dazu Fl. Debeaune, *De limitibus aequationum*, *DGS* II S. 117–152.
20 f. habebimus: Leibniz hat anstelle von y^2x^2 irrtümlich $2y^2x^2$. Er rechnet mit dem falschen Wert konsequent bis zum Schluss des Stückes weiter. Im Laufe der Überarbeitung werden lediglich die beiden ersten Formeln bereinigt und der Fehler am Rande, s. S. 737 Z. 1, zusätzlich vermerkt.

Ergo progressio elementorum ML figuram $BLLM$ componentium ab asymmetria liberata est, sunt enim eius applicatae x inter se invicem ut numerus ad numerum; et infinita serie numerorum rationalium exacte possunt exhiberi.

Sed ne quis operam in figura hac nova pervestiganda nos lusisse putet: ostendendum nunc est idem beneficium in circulum inde redundare. Quam in rem praeclarum invenimus theorema, quod nunc breviter exponere ac demonstrare operae pretium est.

Aio igitur figuram $BLLH$ aequari segmento circuli $BCCB$ duplicato.

Cuius demonstrationem habeo pulcram admodum, sed quae generalior est, quam opus sit in rem praesentem; suffecerit ergo veritatem theorematis nostri, quanquam obliquo nonnihil itinere obtinuisse.

Quam in rem figura cissoeidis $BKTTZ$ ubilibet terminata, aut etiam longitudine infinita semicirculo generatori BDK ita imposita intelligatur, ut basis cissoeidis cum diametro circuli eadem sit BK, asymptotos autem cissoeidis ad basin perpendicularis utcunque producta BZ, semicirculi extremum B tangat. Applicatae autem cissoeidis, asymptoto parallelae, sive rectae ex punctis curvae cissoeidis, T, in diametrum demissae, TQ, transferantur in ipsam asymptoton, ibique inde a basi assumtae intelligantur, ut BZ. Iamque recta KTV ex altero semicirculi extremo K per T usque ad asymptoton producatur, cui occurrat in V.

Constat ex natura cissoeidis, hanc rectam KTV, arcum semi-circuli ABC in puncto aliquo C ita secare, ut VT sit aequalis ipsi KC. Unde sequitur, CH. sinum in diametrum BAK demissum aequari ipsi VZ.

1 componentium *(1)* surditate liberat *(2)* ab asymmetria *L* 11 rem *(1)* inspiciatur figura cissoeidis (alibi a me delineata) AIKC *(a)* , eiusque applicatae cuilibet ad circulum perpendiculari in asymptoto CF (extremum C semicirculi generatoris | eandem cum cissoe *erg. u. gestr.* | ABC tangente) | inde a C *erg.* | assumtae, addatur KH *(aa)* aequalis ED sinui circuli, ad asymptoton parallelo, ex puncto E, quo in *(bb)* vel ED sinus circuli demissus in diametrum AC ex circumferentiae circuli puncto E, quo recta ex puncto cissoeidis I in extremum *(b)* . Cuius asymptotos utcunque producta sit CF, *(aa)* basis, *(bb)* et cissoeis ipsa quae circulo *(2)* figura *L* 21 ipsi *(1)* KH. | ac proinde si perpetuo ad applicatam *(a)* cycloe *(b)* cissoeidis sinus respondens adiciatur, inde fieri BV. *gestr.* | *(2)* VZ. *L*

1 asymmetria: zur Terminologie vgl. Fl. Debeaune, *De natura aequationum*, *DGS* II S. 115.
11 *Zur Variante*: Die in der Variante angesprochene Figur ist Fig. 4 von N. 34. Leibniz hat zunächst diese Figur benützt, dann aber gemerkt, dass er damit nicht weiterkommt; er hat daraufhin fig. 3. entsprechend erweitert und im stehengebliebenen Text Z. 11–21 die Bezeichnungen angepasst.

Exempli causa cum sit $\gamma\theta = \alpha K$ erit etiam $\gamma\delta = \alpha\beta$. Quoniam triangula $\gamma\delta\theta$ et $\alpha\beta K$ similia sunt. Igitur si rectae BZ, verbi gratia $B\delta$ addatur sinus CH, v. g. $\alpha\beta$. (aequalis intervallo ZV, v. g. $\delta\gamma$) fiet inde recta BV, v g. $B\gamma$. At vero recta BV. verbi gratia $B\lambda$, quam tangentem falsam appellare soleo, quod scilicet secans, quae ei occurrit KV, v. g. $K\lambda$. non ex centro A, sed opposita circuli extremitate, educitur; est nostrae BF, initio propositae, verbi gratia ipsius $B\mu$ dupla. Quod ita demonstro:

BF est $= FC$, verbi gratia $B\mu$ est $= \mu\xi$, nam utraque circulum tangit, quare $A\mu$ arcum $B\xi$ bisecat. Quare BF sive HL, v. g. $B\mu$ sive OP vel i n t e r v a l l u m puncti in circumferentia designata, a tangente alterius puncti, in ipsiusmet puncti prioris tangente assumtum: est t a n g e n s c a n o n i c u s arcus inter duo puncta intercepti dimidiati.

T a n g e n t e m autem c a n o n i c u m id est canonis mathematici calculo comprehensum, appello, ut a tangente quolibet, utcunque limitato, aut producto discernam, eum scilicet, qui cum radio et s e c a n t e aliquo (quem eodem iure c a n o n i c u m voco) triangulum rectangulum constituit. Idque commodius videtur, quam nomina usu recepta cum magno geometra Francisco Vieta prorsus immutare.

I n t e r v a l l u m quoque inter lineam et lineam vel lineam et punctum intelligi potest vel simpliciter, quo casu est perpendicularis intercepta, vel ita ut in alia recta assumi cogitetur, cuius tunc portio est. Sed haec obiter.

Hinc vero, ut pergamus, sequitur rectam $A\mu$ esse rectae $K\lambda$ parallelam, sive angulum $BA\mu$ esse angulo $BK\lambda$ aequalem. Est enim angulus $BA\mu$ dimidius anguli $BA\xi$. at angulus $BK\lambda$. qui est ad circumferentiam, est etiam dimidius anguli $BA\xi$ qui est ad centrum, super arcu eodem [$B\xi$]. Cum ergo anguli $BA\mu$ et $BK\lambda$ sint aequales, erunt triangula μBA et λBK similia, cumque latus BK sit duplum lateris homologi BA, etiam recta $B\lambda$ erit dupla rectae $B\mu$. sive tangens canonicus semiarcus dati, erit tangens canonicus falsus arcus dati dimidiatus.

Eaedem demonstrationes vim habent, etsi punctum unum ab altero plus quam quadrante distet, id est etsi arcus BC sit maior quadrante, ut si punctum C sit α, sinus $\alpha\beta$, tangens $\alpha\varphi$, distantia eius seu perpendicularis ex puncto B in tangentem $B\pi$. Quam dico aequalem esse $B\beta$ abscissae, nam $B\varphi = \alpha\varphi$. et ob arcus circuli uniformitatem, perinde est, sive perpendicularem ducas ex una extremitate arcus B in alterius extremitatis α tangentem $\alpha\varphi$, quae perpendicularis est $B\pi$, sive ex altera extremitate α

3 f. Bλ, *(1)* quam cissoeidis falsae, sive sinu circuli auctae applicatam *(2)* quam *L* 9 puncti, | plus quam quadrante non distantis, *gestr.* | in ipsiusmet *L* 11 f. id est ... comprehensum *erg. L* 15 cum *(1)* summo g *(2)* magno *L* 22 Bμ *L ändert Hrsg.* 26–736,5 Eaedem demonstrationes ... accommodari posse. *erg. L*

ad alterius extremitatis B tangentem $B\varphi$ perpendicularem ducas, quae est abscissae $B\beta$ aequalis.

Porro cum etiam angulus $BA\alpha$ sit anguli $BK\alpha$ duplus, manifestum est, ut verbis parcam, eandem prorsus demonstrationem, quam supra dedimus, arcui quadrante maiori accommodari posse.

Ex his ita demonstratis deduco, summam omnium BF bis sumtam figuram $BLLH$ duplicatam a cissoeidis parte respondente, sive eundem arcum circuli generatoris BC. v. g. $B\xi$ habente, spatio scilicet trilineo $KT\omega QK$ differre summa sinuum CH, sive spatio circulari $BCCH$. exempli gratia $BC\xi PB$.

At vero constat, ostensum est ab eximiis nostri temporis geometris, spatium illud cissoeidale aequari triplo segmento $BC\xi B$ arcus generantis $BC\xi$, trianguli segmento subtensi $B\xi P$ area prius ab illis detracta. Hinc sequitur summam omnium BV (seu 2 BF) aequari quadruplo, et BF duplo segmento $BC\xi B$.

$$\begin{array}{lcccccc}
\text{Nam} & KT\omega QK & + & BC\xi PB & = & 2\ BLLH. \\
 & /\backslash & & /\backslash & & \\
 & 3\ BC\xi B - \cancel{B\xi P} & & BC\xi B + \cancel{B\xi P} & & \\
\text{Ergo} & & & BLLH = & 2\ BC\xi B. &
\end{array}$$

Fateor equidem potius ex theoremate nostro mensuram cissoeidis demonstrari debere, imo alibi demonstratum esse, sed malui tamen nunc quidem hanc rationem inire.

Cum ergo iam ostensum sit summam omnium LH. seu figuram $BLLHB$ aequari duplici segmento $BCCB$. at vero dudum supra sit demonstratum, differentiam figurae $BLLH$. a rectangulo BL. quod vocemus b^2 seu trilineum $BLLMB$, esse summam omnium $x = \dfrac{2y^2a}{a^2+2y^2}$. sequitur segmentum circuli duplicatum esse b^2- summ. omn. $\dfrac{2y^2a}{a^2+2y^2}$. ac proinde segmentum esse

6 deduco, *(1)* figuram omnium BF, sive figuram BLLH *(a)* aequari cycloeidi ab eodem circuli *(b)* a cissoeide eundem circu *(2)* summam *L* 10 ab *(1)* eximio geometra Ioh. Wallisio *(2)* eximiis *L* 19 imo ... esse *erg. L*

10 ostensum est: vgl. dazu J. Wallis, *Mechanica*, 1670–71, S. 531–533, 754–759 (*WO* I S. 904 bis 910).

$$= \frac{b^2}{2} - \text{summ. omn. } \frac{y^2a}{a^2+2y^2}.$$

eiusque, aut potius figurae ei aequalis, elementa crescere in ea semper ratione quae est numeri ad numerum.

Quae progrediendi ratio ut numeris explicetur, debet a supponi $=$ numero infinito, at $y = 1$. vel 2. vel 3. vel 4. etc. cum repraesentet ipsas abscissas seu BM arithmetice crescentes. Sed ut in numeris finitis series repraesentetur, ponatur a vel radius BA divisus in centum partes aequales, qualibus ipsae BM abscissae uniformiter crescunt. Quod si tabulam ad usum condere vellemus, posset BA divisa cogitari in partes 1 000 000. Nunc vero posita, ut dixi $a = 100$, et $y = 1$. vel 2. vel 3. vel 4. etc. series haec erit omnium $\dfrac{y^2a}{a^2+2y^2}$[:]

$$\frac{1}{102} \quad \frac{4}{108} \quad \frac{9}{118} \quad \frac{16}{132} \quad \frac{25}{150} \quad \frac{36}{172} \quad \frac{49}{198} \quad \frac{64}{228} \quad \frac{81}{262} \quad \frac{100}{300} \quad \text{etc.}$$

quae ducta in 100 dabit:

$$\frac{100}{102} \quad \frac{400}{108} \quad \frac{900}{118} \quad \frac{1600}{132} \quad \frac{2500}{150} \quad \frac{3600}{172} \quad \frac{4900}{198} \quad \left[\frac{6400}{228}\right] \quad \frac{8100}{262} \quad \frac{100,00}{300} \quad \text{etc.}$$

summam omnium $\dfrac{y^2a}{a^2+2y^2}$.

Nunc intelligatur recta BF. vel ei respondens ab altera parte BM. dividi in partes aequales infinitas FF. vel MM. et in diametro BK designentur totidem respondentes HH (etsi inter se inaequales), ductis scilicet FC tangentibus et CH sinubus. Iungantur

---

1 NB. error calculi in sequentibus: non erat dicendum $\dfrac{y^2a}{a^2+2y^2}$, sed $\dfrac{2y^2a}{a^2+y^2}$.

13 $\dfrac{6400}{228}$ *erg. Hrsg.* 15 *(1)* Ut si *(2)* Nunc intelligatur diameter BK. divisa in partes aequales *(a)* infinitas *(b)* quantitate sive finitas sive infinitas *(c)* sive finitas, sive infinitas *(d)* numero infinitas BH. HH. HH. etc. ut v. g. BH. vel RP. | vel $\rho\beta$ *erg.* | et ex punctis divisionis applicatae perpendiculares seu sinus HC. usque ad circumferentiam eductae intelligantur | ut in punctis C. occurrant *erg.* | v. g. Pξ. $\beta\alpha$. Denique ducantur totidem BC. *(3)* Nunc *L*

---

9 series haec: Bei konsequentem Rechnen müsste in den Nennern der folgenden Brüche 10 002, 10 008, 10 018 etc. stehen.

quaelibet proxima puncta C per rectas CC, qualis recta est v. g. $\psi\xi$. Recta CC producatur, dum occurrat ipsi BV in F, v. g. $\xi\psi$ producta incidat in V. et cum HH, v. g. RP. sit infinite parva, FC, v. g. $V\psi$ circulum tanget: dixi triangulum, duabus BC proximis, et una CC comprehensum duplicatum, aequari rectangulo $HH \frown BF$, v. g. triangulum $B\psi\xi$ duplicatum aequari rectangulo RBM, idemque de aliis omnibus triangulis ac rectangulis respondentibus dici posse, unde manifestum est, qua ratione series numerorum rationalium huc queat applicari. Nam triangula BCC, sive elementa segmentorum per triangula BCC continue adiecta in alia segmenta crescentium sunt inter se, ut numeri rationales. Quod ostendo, nam cum in rectangulo MH semper BM, y. quippe arithmetice crescentes seu figurae $BMMH$, et LM, quippe $x = \dfrac{2y^2a}{a^2 + 2y^2}$, sint rationales, erunt et rectangula comprehensa, quantitates rationales a quibus si series infinita numerorum rationalium subtrahatur, erit et residuum rationale. Residuum autem $BLLH$ segmento aequale est. Quare quantitas segmentorum circuli infinita serie numerorum rationalium explicari potest. Et triangula BCC ex hac constructione orta latitudinis infinite parvae, sive segmentorum continue crescentium elementa erunt inter se velut numerus ad numerum.

Quod ut facilius exhibeatur calculo, consideranda sunt duo, a l t e r u m quod diximus, semper rectangulum LHH, seu $LH \frown HH$, v. g. $SR \frown RB$ (vel $OP \frown PR$), esse

7–17 applicari. *(1)* Sed quoniam elegans admodum atque utilis haec consideratio est, placet eam distincte exequi. *(a)* Esto *(b)* Ponatur MM = 1. erit BM = y = 1. vel 2. vel 3. vel 4. etc. | ML = BH semper est $\dfrac{2\mathrm{y}^2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{y}^2}$. *erg.* | At a. perpetuo constans aequalis est numero infinito. Posita iam BH, hoc loco BR. infinite parva seu = HH. manifestum est triangulum BCC. inter B. et ψ. cadere nullum, eiusque valorem proinde esse 0. seu nullum. Eodem modo posito BM = y. esse infinite parvam, seu = MM = 1. erit ML, seu BH, hoc loco BR vel MS = $\dfrac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + 2}$, quae applicata MS. ducta in portionem altitudinis, cui applicatur aequalem 1. seu unitatem constructionis (neque enim aliter applicatae velut lineae in calculum spatiorum venire possent, nisi hoc modo, ut ridiculo utar verbo, rectangularisarentur), dabit idem $\dfrac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + 2}$, ut proinde imposterum ea multiplicatio subticeri possit. Rectangulum autem MLH erit hoc loco, y esse infinite parvam = MM = 1. etiam: $\dfrac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + 2}$, et cum subtracto *(2)* | Nam ... numerum. | Quod calculo ostendam. Minima BM esto = 1. erit minimum rectangulum $\dfrac{2\mathrm{y}^2\mathrm{a}}{2\mathrm{y}^2 + \mathrm{a}^2}$. quod si calculatur MM = 1. *gestr.* | *erg.* | Quod *L* triangulo duplicato BCC, v. g. $B\psi\xi$, aequale; a l t e r u m , quod nunc admonendum est, rectangulum eiusmodi LHH v. g. $SR \frown RB$ (aut $OP \frown PR$), fieri ex $BM = y = LH$. v. g. SR (vel OP arithmetica progressione crescentibus, ut 1. 2. 3. 4. etc.) ducto in HH, v. g. BR, differentiam inter ipsam $x = BH = ML$ assumtam, v. g. BR et inter praecedentem, quae erit 0. assumatur pro x, ipsa recta RB, nempe omnium x prima, unde differentia inter RB et 0 tunc erit ipsa RB. Quod si recta assumta $BH = ML = x$. sit alia a prima, velut si sit BP. tunc HH erit hoc loco RP, differentia inter BR, nempe x sive BH vel ML praecedentem, et BP, nempe x sive BH, aut ML, praesentem sive assumtam. Hinc facilis redditur calculus, tantum enim, computata ipsarum $x = \dfrac{2y^2a}{2y^2+a^2}$, serie, prout scilicet terminus y continue alius atque alius arithmetica progressione assumitur; sumendae sunt earum differentiae, et in ipsas y numeros scilicet progressionis arithmeticae ducendae, et habebuntur duplicatae areae triangulorum BCC (v. g. $B\psi\xi$) ex quibus segmenta circuli conflantur ac quibus velut elementis (applicatarum loco) crescunt.

$BM.\ y =$					
	1	2	3	4	5
$ML.\ x =$					
	$\frac{2a}{a^2+2}$	$\frac{8a}{a^2+8}$	$\frac{18a}{a^2+18}$	$\frac{32a}{a^2+32}$	$\frac{50a}{a^2+50}$
$\bigtriangledown^{\text{la}}\ BCC$					
		$8-2, \frown \frac{5}{3} = 10$	$18-8, \frown 3$		
	$\frac{2a}{a^2+2}$	$\frac{10a^3}{a^4+10a^2+16}$	$\frac{30a^3}{a^4+26a^2+144}$	$\frac{56a^3}{a^4+50a^2+576}$	$\frac{90a^3}{a^4+82a^2+1600}$
		/\	/\		
		$a^2+2, \frown a^2+8$	$a^2+8 \frown a^2+18$		
		/\	/\		
		$a^4+8a^2+2a^2+2 \frown 8$	$a^4+18a^2+8a^2+18 \frown 8$		
Segmenta $BCCB$					

12 duplicatae *erg.* L

18 $\bigtriangledown^{\text{la}}$ BCC: Bei konsequentem Rechnen hätten die Werte für die Teildreiecke (abgesehen von dem falschen Wert für das zweite Teildreieck) noch durch 2 geteilt werden müssen.

Posita ergo unitate, linea infinite parva, et a numero infinito, series qualem cepi in infinitum continuata segmenti cuiuslibet circularis, ex quibus maximum est semicirculus, mensuram dabit. Sed quoniam nec series infinitae absolvi, nec numeri infiniti exprimi possunt; ideo ut ista quam sunt pulchra demonstratu, tam fiant usu expedita, docere operae pretium est, quomodo hinc duci possint appropinquationes ad veram circuli mensuram omnibus hactenus inventis commodiores. Quod adeo verum est, ut ausim dicere, nihil inde a temporibus Archimedis maioris ad cyclometriam momenti repertum. Tantum ergo numerus a, infiniti loco assumendus est maximus, ita enim, quanto ille assumetur maior, tanto exactius mensura circuli eiusve partium exhibita referet veram. Deinde arte quadam, quam mox exponam series hoc loco exposita in aliam commutanda est, quae nos continuandi opere absolvat.

Ars autem illa in eo consistit, ut elementa segmentorum, ad elementa hyperbolae revocemus, quod hactenus potuit nemo; quoniam elementa hyperbolae rationalibus numeris exacte exprimi possunt, quod huc usque frustra in circulo tentatum est.

Sed ut haec praestemus resumenda est aequatio nostra naturam progressionis segmentorum exhibens, $x = \dfrac{2y^2a}{a^2+2y^2}$. Potest autem in numeratore huius fractionis, $2y^2a$, omitti a, cum enim a sit perpetuo eadem, summa per eam multiplicari potest, ut nihil opus sit repeti sigillatim, fiet ergo $\dfrac{x}{a} = \dfrac{2y^2}{2y^2+a^2}$. eam vero quantitatem aio aequalem esse huic: $1 - \dfrac{a^2}{a^2+2y^2}$. Nam $1 - \dfrac{a^2}{a^2+2y^2}$ est aequalis huic: $\dfrac{a^2+2y^2-a^2}{a^2+2y^2}$, quae est $= \dfrac{2y^2}{2y^2+a^2}$. Ergo $1 - \dfrac{x}{a} = \dfrac{a^2}{a^2+2y^2}$. Quare superest ut summam tantum omnium $\dfrac{a^2}{a^2+2y^2}$ inveniamus.

739,19–24 *Nebenrechnungen:*

$8a^3 + \cancel{16a} - 2a^3 - \cancel{16a}$			32		
$10a^3$ [*sic !*]			18		
	16	14	$\overline{256}$	18	32
	9	4	32	5	5
	$\overline{144}$	$\overline{56}$	$\overline{576}$	$\overline{90}$	$\overline{1600}$

Quam in rem considerandum est, si qua sit aequatio, talis $\frac{a^2}{a+y}$ = applicatae, posita y abscissa continue crescente, a vero recta supposita constante, figuram ex his applicatis conflatam esse hyperbolicam. Nos ut in nostra aequatione a $2y^2$ binarium multiplicantem amoliamur, pro $\frac{a^2}{a^2+2y^2}$ faciemus $\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{2}+y^2}$. Unde licebit substituere $\frac{b^2}{b^2+y^2}$, modo scilicet meminisse velimus tunc b^2 aequivalere $\frac{a^2}{2}$, seu pro b intelligendum $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Quod si ergo aequatio sit $\frac{b^2}{b+y}$. posita b recta constante; spatium, ut dixi hyperbolicum erit.
Sed non opus est ut hyperbolam quaeramus cum hyperboloeis cubica locus sit omnium $\frac{a^3}{a^2+2y^2} = x$. Erit enim $a^3 = a^2x + 2y^2x$. Quae aequatio ut reducatur ad simpliciorem, methodo quam ad exemplum regulae in conicis aequationibus reducendis a summo viro Ioh. Wittio traditae in altiori hac expertus sum, fiat $y^2 = z^2 - \frac{a^2}{2}$, et erit $a^3 = a^2x + 2z^2x - \frac{2a^2x}{2}$. sive $a^3 = 2z^2x$. quam hyperboloeidis cubicae formulam esse manifestum est, cuius datur quadratura. Quod si huc usque nihil erratum est, pro tetragonismo mechanico quaesito, habebimus verum.

7–13 *Zum ergänzten Schlussabschnitt in anderem Duktus:* Error

6–13 erit. | Nunc ut ad *gestr.*; Sed non ... habebimus verum. *erg.* | *L*

---

9 exemplum regulae: s. J. de WITT, *Elementa curvarum linearum*, *DGS* II S. 304–306.

42_2. SOLUTIO ANALYTICA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 161–162. 1 Bog. 2°. 3 S. Gestrichene Bogenmarkierung. Auf Bl. 162 r° neben der Hauptrechnung verschiedene Zusätze in anderem Duktus. — Auf Bl. 162 v° Gesprächsaufzeichnung: Leibniz u. Ozanam mit nachträglichen Notizen von Leibniz; weitere zugehörige Notizen auf Bl. 161 r° u. Bl. 161 v° sowie auf LH 35 XII 2 Bl. 160 v° (vgl. dazu N. 48).
Cc 2, Nr. 561 tlw.

Ut ad comparationem spatii circularis et hyperbolici vel hyperboloeidis veniamus, animadvertendum est, quod $b+y \frown y-b$ vel $b+y \frown b-y = [y^2-b^2$ vel $b^2-y^2]$. Nam

$$\begin{array}{rl} & b \;\; +y \\ & \underline{y \;\; -b} \\ & -b^2 - \cancel{by} \\ +\cancel{by} & +y^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} b \;\; +y \\ \underline{b \;\; -y} \\ b^2+yb-yb-y^2 = b^2-y^2. \end{array}$$

Ergo si applicata hyperbolica $\dfrac{b^2}{b+y}$ multiplicetur per $\dfrac{a}{b-y}$, fiet: $\dfrac{b^2a}{b^2-y^2}$.

Iam $\dfrac{b^2a}{b^2-y^2} - \dfrac{b^2a}{b^2+y^2} = \dfrac{b^4a+y^2b^2a-b^4a+y^2b^2a}{b^2-y^2 \frown b^2+y^2} = \dfrac{2y^2b^2a}{b^4-y^4} = z$.

Ergo $\dfrac{b^4-y^4}{y^2b^2} = \dfrac{a}{z}$. [Ergo] $\dfrac{b^4}{y^2b^2} - \dfrac{y^4}{y^2b^2} = \dfrac{b^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{a}{z}$. Multiplicatis omnibus per b^2, fiet: $\dfrac{b^4}{y^2} - y^2 = \dfrac{ab^2}{z}$, rursusque multiplicatis omnibus per y^2, fiet $b^4-y^4 = \dfrac{ab^2y^2}{z}$, ac multiplicatis omnibus per z, fiet: $b^4z - y^4z = ab^2y^2$, sive $z = \dfrac{ab^2y^2}{b^4-y^4}$ $\quad b^4z = ab^2y^2 + y^4z$.

Si $\dfrac{b^2a}{b^2+y^2} = x$. erit $\dfrac{b^2+y^2}{b^2} = \dfrac{a}{x}$. et $b^2+y^2 = \dfrac{ab^2}{x}$.

8 *(1)* Nunc ut ad comparationem *(a)* circuli *(b)* spatii circularis et hyperbolici | vel hyperboloeidis *erg.* | veniamus, considerandum est = *ursprünglicher Beginn* *(2)* Ut *L* 9 quod *(1)* $b+y \frown b-y = b^2+y^2$. *(2)* $b+y \frown y-b$ vel $b+y \frown b-y =$ | b^2+y^2 vel y^2-b^2 *ändert Hrsg.* |. Nam *L* 12+14 b^2-y^2. *(1)* Ergo si applicata hyperbolica: $\dfrac{b^2}{b+y}$, dividatur per $y-b$ productum erit *(2)* Ergo *L* 16 Ergo *gestr. L, erg. Hrsg.*

Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 4

$\frac{b^2+y^2}{b^2-y^2}$ $\quad \frac{b^2-y^2}{b+y}=b-y.$ $\quad b^2+y^2 \frown b^2-y^2=b^4-y^4.$ $\quad \dfrac{\frac{b^2a}{b^2-y^2}}{\frac{b^2a}{b^2+y^2}}=\frac{b^2+y^2}{b^2-y^2}.$

$\frac{b^2-y^2}{b^2+y^2}$. Iam $\frac{b^2}{b^2+y^2}=1-\frac{y^2}{b^2+y^2}$. Ergo $\frac{b^2-y^2}{b^2+y^2}=1-\frac{2y^2}{b^2+y^2}$. Ergo $2-\frac{2y^2}{b^2+y^2}$ sive $\frac{b^2-y^2}{b^2+y^2}+1=\frac{2b^2}{b^2+y^2}$ sive $\frac{b^2-y^2}{b^2+y^2}=\frac{2b^2}{b^2+y^2}-1$.

$\frac{b^2+y^2}{b+y}=b+y-\frac{2by}{b+y}$.

$\frac{2by}{b+y}=\frac{b}{b+y}\frown 2y$. Iam ostensum $\frac{b}{b+y}=1-\frac{y}{b+y}$. Ergo $\frac{2by}{b+y}=2y-\frac{2y^2}{b+y}$. Ergo $\frac{b^2+y^2}{b+y}=b+y-2y+\frac{2y^2}{b+y}=b-y+\frac{2y^2}{b+y}$.

$\frac{2y^2}{y+b}=\frac{2y^2+2by-2by}{y+b}=2y-\frac{2by}{y+b}$.

Ostensum est $\frac{2by}{b+y}=2y-\frac{2y^2}{b+y}$. Eodem iure idem $=2b-\frac{2b^2}{b+y}$. Ergo $\cancel{2}y-\frac{\cancel{2}y^2}{b+y}=\cancel{2}b-\frac{\cancel{2}b^2}{b+y}$. sive $y+\frac{b^2}{b+y}=b+\frac{y^2}{b+y}$.

$\frac{2y^2}{b+y}=x$. daret $2y^2=bx+yx$. erit $y=z+\frac{b}{2}$. fiet:

---

3 *Unter* $\frac{2b^2}{b^2+y^2}$ *umrahmt und gestrichen:* $2-\frac{2y^2}{b^2+y^2}$. Ergo $\frac{b^2-y^2}{b^2+y^2}=1-\frac{2y^2}{b^2+y^2}$, habuimus.

10 +yx. | vel $y^2=\frac{bx+yx}{2}$. sive $y=\sqrt{\frac{bx+yx}{2}}$. sive $2y^2-bx+$ *gestr.* | erit *L*

---

10 fiet: Die folgenden Betrachtungen sind fehlerhaft. Leibniz erkennt dies und beendet sie S. 745 Z. 6 mit „Imo potius".

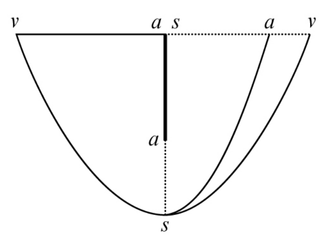
$$\begin{array}{l} 2z^2 + \cancel{\frac{b^2}{4}} + \cancel{\frac{bz}{2}} - \cancel{xz} - \cancel{\frac{bz}{2}} = \cancel{bx}. \\ 2y^2 + \cancel{2b^2} + by \quad - xy + \cancel{\frac{xb}{2}} \qquad \frac{bx}{2} \\ \frac{7}{4}b^2 \end{array}$$

$\frac{7b^2}{4} = bx + xy - by$. locus est hyperbole, vid. de Wit pag. 281. ubi simile exemplum.

Resumta ergo $\frac{b^2}{b^2 + y^2} = 1 - \frac{x}{a}$. et multiplicata per $b + y$ utroque aequationis termino fiet: $\frac{b^2}{b - y + \frac{2y^2}{b+y}} = b + y - \frac{bx - yx}{a}$.

$\frac{a^3}{a^2 + 2y^2} = x$.

Ergo $a^3 = a^2x + 2y^2x$. vel $\frac{a^3}{x} - a^2 = \cancel{2}y^2$. Extrahenda ergo radix ex $\frac{a^3}{x} - a^2$. Iam $\frac{a^2}{x}$ applicatam parabolae *(!)* appellemus v. fietque $v - a, \frown a, \sqrt{} = s$.



[*Fig. 1*]

Ponatur $y = z - \frac{a}{2}$. Ergo $2y, yx = 2yzx - \cancel{2}yax$. Ergo $a^3 = 2yzx - yax + a^2x$.

8 $y^2 = z^2 - a^2$.

11 $z = y + \frac{a}{2}$. $z^2 = y^2 + \frac{a^2}{4} + \cancel{2}ya$.

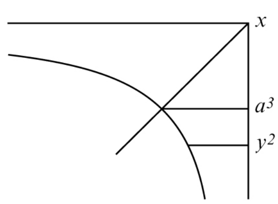
4 vid.: de Witt, *Elementa linearum curvarum*, *DGS* II, S. 281.

$$\begin{array}{l}
a^3 + yax = 2yzx + a^2x. \\
\qquad\quad /\backslash \qquad\qquad /\backslash \\
a^3 + \cancel{2}zax - \frac{a^2\cancel{x}}{\cancel{2}} = 2z^2x - \cancel{azx} + \frac{\cancel{2}a^2\cancel{x}}{\cancel{2}} + \frac{a^2x}{2}. \\
\qquad /\backslash \qquad\qquad /\backslash \\
a^3 + \cancel{2yax} + \cancel{a^2x} = \cancel{2yax} + y^2x + \frac{a^2\cancel{x}}{\cancel{4}} + \frac{3a^2x}{4}.
\end{array}$$

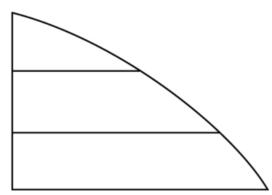
Imo potius.

Ut reducatur haec aequatio, si fieri potest: $a^3 = a^2x + 2y^2x$. fiat: $y^2 = z^2 - \frac{a^2}{2}$. et fiet: $a^3 = \cancel{a^2x} + 2z^2x - \cancel{a^2x}$. seu $a^3 = 2z^2x$. Unde intelligitur locum quaesitum esse hyperboloeidem cubicam.

Notabilis est haec reducendi methodus, quam ad exemplum regulae a summo viro Ioh. Wittio in aequationibus conicis reducendis traditae, in hac altiori sum expertus.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

$$a^3 = a^2 + 2y^2, \frown x. \quad a^2 = \frac{a^2 + 2y^2}{a} \frown x. \quad a^2 = ax + \frac{2y^2x}{a}. \quad \frac{a^2}{a + \frac{2y^2}{a}} = x.$$

$y^2 = 2a - x^2$. Ponatur $x = z + 2a$, fiet $x^2 = zx + 2ax$. Ergo $y^2 = \cancel{2ax} - zx + \cancel{2ax}$.

8 seu *(1)* $\frac{a^3}{x} = 2z^2$. Nunc reducenda iterum $z^2 = y^2 + \frac{a^2}{2}$. *(2)* a^3 *L*   11+13 expertus. *(1)* Ponatur $y = z - \frac{a}{\mathrm{Rq}\,2}$, fiet $a^3 = a^2x - 2$ *(2)* a^3 *L*

10 ad exemplum: de Witt, *Elementa linearum curvarum* l. II, *DGS* II, S. 242–340; insbesondere S. 255, 280 f., 304–306.

fiet: $y^2 = 0 - zx$. Quod est absurdum. Ponendum ergo potius $2a - z = x$. fiet $x \frown x = 2ax - zx = x^2$. atque ideo $y^2 = 2ax - 2ax + zx = y^2 = zx$. Quod verissimum et notabile est, est enim arcus circuli locus mediarum proportionalium inter duas incognitas, seu continue variabiles.

Atque haec quidem occasionem praebent cogitandi de reducendis locis, in quibus nulla est linea cognita, ad locos in quibus aliqua est. Uti hoc loco, uti $y^2 = zx$, reducamus ad aliquam aequationem in quam recta quaedam cognita sive invariabilis ingrediatur, faciemus: $a = x + z$. vel $z = a - x$. fiet $y^2 = ax - x^2$. Unde sequitur circulum esse locum duarum mediarum proportionalium. Sciendum est autem ex duabus illis, quarum media proportionalis quaeritur, semper alteram crescere alteram decrescere, et quidem uniformiter, unde recta aequalis utrisque statui potest.

Quodsi quaerantur duae mediae proportionales, ut $y^3 = z^2x$. ponatur rursus $a =z + x$. seu $z = a - x$. et fiet $y^3 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$. Quae non potest ultra reduci, nam quoniam scilicet altera incognitarum quantitatum, y. est in se tantum ducta, non etiam in alteram incognitam. Et si quis reducere vellet, ad aequationem solas incognitas continentem deveniret.

Ita exhibere possumus omnes figuras, quae sunt loca mediarum proportionalium, sive radicum quadratarum, cubicarum, quadrato-quadraticarum, ex rectangulis planis, solidis altiorumque dimensionum, quae duae tantum rectae ingrediuntur.

Notabile est vero etsi hae figurae sint ipsarum mediarum proportionalium, seu radicum loca; esse tamen alias curvas, plerumque uno gradu simpliciores, quibus ex rectangulo aliquo solido, aut altiore radices extrahi queant; ita duarum mediarum proportionalium locus est aequationis $y^3 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$. et tamen possunt duae mediae proportionales inveniri loco aequationis simplicioris per parabolam, hyperbolen, ellipsin. Quod et Cartesius recte observavit, et ni fallor curvae illae gradu continue crescentes quas instrumento ex regulis mobilibus composito describere ingeniose docet. Illae ipsae sunt, quas hoc loco expono.

8 faciemus: *(1)* z = a + x. cum enim ambae cogitentur. *(2)* a *L* 12 f. z + x. | seu z = a − x. *erg.* | et fiet *(1)* $y^3 = a^2x + x^3 - 2ax^2$. Quae aequatio ut contrahatur *(2)* y^3 *L* 15 ad *(1)* locum *(2)* aequationem *L* 18 rectangulis, *(1)* prismatis *(2)* parallelepipedis, aliis *(3)* planis *L* 23 aequationis *erg.* *L*

25 ni fallor: DESCARTES, *Geometria*, *DGS* I, S. 67–69 sowie S. 19–23.

$$\frac{\dfrac{\cancel{a^2}}{a^2+y^2}}{\dfrac{\cancel{a^2}}{a^2+2y^2}} \qquad \frac{\dfrac{1}{a^2+y^2}}{\dfrac{1}{a^2+2y^2}} = \frac{a^2+\beta y^2}{a^2+y^2} = 1 + \frac{\beta - 1\lrcorner \frown y^2}{a^2+y^2}$$

$$/\backslash$$

Pro 2. vel 3. vel 4. etc. pone β. $\qquad 1 - \dfrac{a^2}{a^2+y^2}$

Ergo $\dfrac{a^2+\beta y^2}{a^2+y^2} = \cancel{1} + \beta - \dfrac{\beta a^2}{a^2+y^2} - \cancel{1} + \dfrac{a^2}{a^2+y^2}$.

$$\frac{9}{9+a^2} = \frac{9+a^2-a^2}{9+a^2} = 1 - \frac{a^2}{a^2+9}.$$

$$\frac{9}{9+1} = \frac{9}{10} = \frac{9+1-1}{9+1} = 1 - \frac{1}{10}. \qquad \frac{11}{11+1} = \frac{11}{12} = \frac{11+1-1}{11+1} = 1 - \frac{1}{12}.$$

$$\frac{9}{9+1} \;\overline{\underline{\times}}\; \frac{11}{11+1} \qquad \frac{\cancel{99}+9 \,—\, \cancel{99}+11}{9+1 \frown 11+1} = \frac{11-9}{9+1 \frown 11+1}.$$

$$\frac{1}{1000,000+1} \;\overline{\underline{\times}}\; \frac{4}{1000,000+4} \qquad \frac{4000,000+\cancel{4} \,—\, 1000,000+\cancel{4}}{1,000\ [\textit{bricht ab}]}$$

	28	
	7	
36 ——	21 ——	756
11 ······	6 ······	66
25 ——	15 ——	375
9 ······	5 ······	45
16 ——	10 ——	160
7 ······	4 ······	28
9 ——	6 ——	54
5 ······	3 ······	15
4 ——	3 ——	12
3 ······	2 ······	6
1 ——	1 ——	1
1 ······	1 ······	1
0 ——	0 ——	0

7 f. Leibniz rechnet so, dass er ein positives Resultat erhält. Die größeren Minuszeichen haben zusätzlich Klammerfunktion.

$$\frac{6a^2\beta^2}{a^4+5a^2\beta^2+4\beta^4} \;\underline{\times}\; \frac{15a^2\beta^2}{a^4+13a^2\beta^2+36\beta^4}$$

$$6a^6\beta^2 \;+\; 6 \overset{\overset{78}{\wedge}}{\frown} 13\; a^4\beta^4 + 6 \overset{\overset{216}{\wedge}}{\frown} 36\, a^2\beta^6 \lrcorner + 15a^6\beta^2 + 15 \overset{\overset{75}{\wedge}}{\frown} 5\, a^4\beta^4 + 15 \overset{\overset{60}{\wedge}}{\frown} 4a^2\beta^6$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$21a^6\beta^2 \qquad 152a^4\beta^4$$

[Rechnung bricht ab]

$$\frac{1\beta^2}{a^2+\beta^2} \;\underline{\overset{+}{\times}}\; \frac{4\beta^2}{a^2+4\beta^2} = \frac{\overbrace{a^2\beta^2+\overbrace{4\beta^4+4\beta^4}^{8}+4a^2\beta^2}^{5}}{a^4+5a^2\beta^2+4\beta^4} \;\underline{\overset{+}{\times}}\; \frac{9\beta^2}{a^2+9\beta^2}$$

$$= \frac{9\beta^2a^4+45a^2\beta^4+36\beta^6 \mid + \mid 5a^4\beta^2+8a^2\beta^4+45a^2\beta^4+72\beta^6}{a^6+5a^4\beta^2+4a^2\beta^4 \mid + \mid 9\beta^2a^4+45a^2\beta^4+36\beta^6} \text{ seu}$$

$$\frac{14a^4\beta^2+98a^2\beta^4+108\beta^6}{a^6+14a^4\beta^2+49a^2\beta^4+36\beta^6} \;\underline{\overset{+}{\times}}\; \frac{16\beta^2}{a^2+16\beta^2}$$

$$= 16\beta^2a^6 + 14 \overset{\overset{224}{\wedge}}{\frown} 16a^4\beta^4 + 784a^2\beta^6 + 576\beta^8 \mid + \mid$$

[Rechnung bricht ab]

11–14 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rrrr}
 & 16 & 49 & 36 \\
 & 14 & 16 & 16 \\
45 & \overline{64} & \overline{294} & \overline{216} \\
53 & 16 & 49 & 36 \\
\overline{98} & \overline{224} & \overline{784} & \overline{576}
\end{array}$$

1–6 In den Zählern sollte es anstelle von $6a^2\beta^2$ vielmehr $5a^2\beta^2$ und anstelle von $15a^2\beta^2$, wie ursprünglich richtig, $13a^2\beta^2$ heißen. Anstelle von $152a^4\beta^4$ sollte $153a^4\beta^4$ stehen.

$$\frac{y^2}{y^2+a^2} = \frac{y^2+a^2-a^2}{y^2+a^2} \not\!f = 1 - \frac{a^2}{a^2+y^2}.$$

$$\frac{a^2}{y^2+a^2} = \frac{\cancel{a^2} + \cancel{\frac{a^4}{y^2}} - \frac{a^4}{y^2}}{\cancel{y^2}+\cancel{a^2}} \not\!f \frac{a^2}{y^2} - \frac{a^4}{y^4+a^2y^2}$$

$$= \frac{a^4 + \frac{a^6y^2}{y^4} - \frac{a^6y^2}{y^4}}{y^4+a^2y^2} = \not\!f \frac{a^4}{y^4} - \frac{a^6}{y^6+a^2y^4} \text{ etc.}$$

$$= +\frac{a^2}{y^2} - \frac{a^4}{y^4} + \frac{a^6}{y^6} - \frac{a^8}{y^8} \text{ etc.} = \frac{a^2}{a^2+y^2}.$$

At vero $\dfrac{y^2}{y^2+a^2} = 1 - \dfrac{a^2}{a^2+y^2} =$ ut sequitur.

$$\frac{y^2}{a^2+y^2} = \frac{\cancel{y^2} + \frac{y^4\cancel{a^2}}{a^2} - \frac{y^4\cancel{a^2}}{a^2}}{\cancel{a^2}+y^2} = \frac{y^2}{a^2} - \frac{y^4}{a^4+y^2a^2}$$

$$= \frac{y^4 + \frac{y^6}{a^2} - \frac{y^6}{a^2}}{a^4+y^2a^2} = \frac{y^4}{a^4} - \frac{y^6}{a^6+y^2a^4}$$

$$= \frac{y^6 + \frac{y^8a^4}{a^6} - \frac{y^8}{a^2}}{a^6+y^2a^4} = \frac{y^6}{a^6} - \frac{y^8}{a^8+y^2a^6} \text{ etc.}$$

ergo $\dfrac{y^2}{a^2+y^2} = \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{y^4}{a^4} + \dfrac{y^6}{a^6} - \dfrac{y^8}{a^8}$ etc.

Est autem $y = \beta$. 2β. 3β. etc. omittaturque a velut $= 1$. Maxima $y = \dfrac{a}{\gamma}$.

$$y \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 2\beta \\ 3\beta \\ 4\beta \\ \\ \end{array} \right. \quad \frac{y^2}{a^2y^2} \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \beta^2 & & \beta^4 & & \beta^6 & & \beta^8 \\ 4\beta^2 & & 16\beta^4 & & 64\beta^6 & & 256\beta^8 \\ 9\beta^2 & (-) & 81\beta^4 & (+) & 729\beta^6 & (-) & 6561\beta^8 \\ 16\beta^2 & & 256\beta^4 & & 4096\beta^6 & & 65536\beta^8 \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array} \right\} \text{ etc.}$$

$$\cfrac{\cfrac{a^3}{3\gamma^{\cancel{3}}}}{a^2} - \cfrac{\cfrac{a^5}{5\gamma^{\cancel{5}}}}{a^4} + \cfrac{\cfrac{a^7}{7\gamma^{\cancel{7}}}}{a^6} - \cfrac{\cfrac{a^9}{9\gamma^{\cancel{9}}}}{a^8}.$$

Multiplicatis omnibus per a, fiet:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{a^2}{3\gamma} & - & \frac{a^2}{5\gamma} & + & \frac{a^2}{7\gamma} & - & \frac{a^2}{9\gamma} & [+ & \frac{a^2}{11\gamma} & - & \frac{a^2}{13\gamma} & + & \frac{a^2}{15\gamma} & - & \frac{a^2}{17\gamma}] \text{ etc.} \\
 & \frac{2a^2}{15} & & & & \frac{2a^2}{63} & & & & \frac{2a^2}{143} & & & & \left[\frac{2a^2}{255}\right] & \\
\frac{a^2}{3\beta} & & & & \frac{a^2}{7\beta} & & & & \frac{a^2}{11\beta} & & & & & &
\end{array}$$

749,12–750,4 *Nebenrechnungen (tlw. fortlfd.):*

$$\begin{array}{rrrrcrr}
16 & 256 & 4096 & 729 & & 13 & 16 \\
\underline{16} & \underline{16} & \underline{16} & \underline{9} & & \underline{11} & \underline{15} \\
96 & 1536 & 24576 & 6561 & & 13 & 80 \\
\underline{16} & \underline{256} & \underline{4096} & & & \underline{13} & \underline{16} \\
256 & 4096 & 65536 & & & 143 & 240
\end{array}
\qquad \frac{2a^2}{15} \mathbin{\overline{\times}} \frac{2a^2}{16} = \frac{2a^2}{240}$$

$$\frac{1}{3\gamma^3} \mathbin{\overset{+}{\underset{-}{\times}}} \frac{1}{7\gamma^7} + \frac{1}{11\gamma^{11}}$$

$$\frac{1}{3000} + \frac{1}{70,000,000} + \frac{1}{\underset{7\quad 3}{1100000000000}} \text{ fiet } 11 \text{ [\textit{Rechnung bricht ab}]}$$

2 f. *Darüber:* Nota hyperboloeidis cubicae.

2 f. $+\frac{a^2}{11\gamma} \ldots -\frac{a^2}{17\gamma}$ *sowie* $\frac{2a^2}{255}$ *erg. Hrsg.*

749,10–751,5 Wegen der Streichungen bzw. Vernachlässigung der Exponenten von γ in den S. 749 Z. 17 und S. 751 Z. 4 sind die Ergebnisse nicht mehr textkonform. Diese unzulässigen Vereinfachungen wirken sich aufgrund der neuen Setzungen S. 751 Z. 6 nicht auf das Hauptergebnis $\odot$ aus. 6 In der Nebenrechnung unterläuft Leibniz ein Flüchtigkeitsfehler: er hätte mit 17 anstelle von 16 und mit a^2 anstelle von $2a^2$ rechnen müssen.

Ut has duas summas comparemus, pro $\frac{a^2}{3\gamma}$ dicendum $\frac{a^2}{2\gamma+1\gamma}$. pro $\frac{a^2}{5\gamma}=\frac{a^2}{3\gamma+2\gamma}$. pro $\frac{a^2}{7\gamma}=\frac{a^2}{4\gamma+3\gamma}$ [*Text bricht ab*]

Si fuisset $\frac{y}{a+y}$, ut in hyperbola, habuissemus, multiplicatis omnibus per a:

$$\frac{a^3}{2\gamma a} - \frac{a^4}{3\gamma a^2} + \frac{a^5}{4\gamma a^3} - \frac{a^6}{5\gamma a^4} \quad \text{etc.}$$

$$\text{seu} \qquad \frac{a^2}{2\gamma} - \frac{a^2}{3\gamma} + \frac{a^2}{4\gamma} - \frac{a^2}{5\gamma}$$

Sed posito $a=1$. et maxima $y=b$. erunt producta omnium

$$\frac{y^2a}{a^2+y^2}=\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{5}b^5+\frac{1}{7}b^7-\frac{1}{9}b^9 \text{ etc.} \quad \odot$$

Posito iam $\frac{y}{a+y}$, in hyperbola, fiet:

$$\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{3}b^3+\frac{1}{4}b^4-\frac{1}{5}b^5$$

a quo si subtrahatur $\odot$ restabit:

$$\frac{1}{2}b^2-\frac{2}{3}b^3+\frac{1}{4}b^4+\frac{1}{6}b^6-\frac{2}{7}b^7+\frac{1}{8}b^8+\frac{1}{10}b^{10}$$

vel potius ob $\frac{a}{a+y}$ fiet

$$1-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\frac{1}{5}b^5$$

6 y = b. | minor quam a *gestr.* | erunt *L*

13+752,3 Anstelle von 1 müsste genauer b stehen.

Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 4

a quo si subtrahatur:

$$\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{7}b^7 - \frac{1}{9}b^9 \text{ etc.} \quad \text{vel} \ \odot \ \text{restabit:}$$

$$1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{2}{5}b^5 - \frac{1}{6}b^6 - \frac{1}{8}b^8 + \frac{2}{9}b^9 \text{ etc.}$$

[*Zusätze*]

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35} \\[4pt]
\frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} \\[4pt]
\frac{1}{3+1} & \frac{1}{8+1} & \frac{1}{15+1} & \frac{1}{24+1} & \left[\frac{1}{35+1}\right] \\[4pt]
\frac{1}{4-1} & \frac{1}{9-4} & \frac{1}{16-9} & \frac{1}{25-16} & \frac{1}{36-25}
\end{array}$$

$$\frac{1}{4-1} \substack{+\\ \times \\ -} \frac{1}{9-4} = \frac{9-\cancel{4}+\cancel{4}-1}{36-16-9+4} \ \Big| \ \frac{8}{15}$$

$$\frac{1}{9-4} + \frac{1}{16-9} = \frac{16-4}{144-81-64+36} \ \Big| \ \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{9-4} = \frac{1-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}{9-4} = \frac{1}{9} + \frac{4}{81-36}.$$

---

10 *Nebenrechnung (tlw. fortlfd.):*

$$\begin{array}{r} 81 \\ 64 \\ \hline 145 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ 36 \\ \hline 180 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 180 \\ 145 \\ \hline 35 \end{array}$$

7 $\frac{1}{35+1}$ *erg. Hrsg.*

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \quad \text{etc.} \qquad\qquad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+4}{24} \Big| \frac{10}{24} \ \Big\lceil\overset{2}{\smile} \ \frac{5}{24} \qquad\qquad \frac{1}{3} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{5} = \frac{5+3}{15} \ \frac{8}{15} \Big\lceil\overset{2}{\smile} \ \frac{4}{15}$$

$$\frac{1}{6} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{8} = \frac{8+6=14}{48} \ \Big\lceil\overset{2}{\smile} \ \frac{7}{48} \qquad\qquad \frac{1}{5} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{7} = \frac{7+5}{35} \ \frac{12}{35} \Big\lceil\overset{2}{\smile} \ \frac{6}{35}$$

$\frac{4}{15} + \frac{5}{24} + \frac{6}{35} + \frac{7}{48}$ etc. auferatur $\frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48}$ fiet $\frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8}$ etc.

$\frac{ya^2}{y^2 - \beta^2} = x$. Datur autem $\frac{a^3}{y^2 - \beta^2} = x$. Ergo $\frac{a^2}{y^2 - \beta^2} = \frac{x}{a}$. quae posita y certa magnitudinis linea ipsi $\frac{a^2}{y^2}$ aequantur. Quorum cylinder $\frac{ya^2}{y^2}$, fiet $\frac{a^2}{y}$ momento omnium xa.

43. DIFFERENTIAE FIGURAE CIRCULO HOMOGENEAE RATIONALIS [Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 284. 1/5 S. auf Bl. 284 r° oben. Überschrift ergänzt. — Auf dem übrigen Blatt, mittels Trennstrich abgesetzt N. 44.
Cc 2, Nr. 608 tlw.

Datierungsgründe: Von den beiden Stücken auf dem Bogen wurde N. 43 zuerst niedergeschrieben und dürfte kurz vor N. 44 entstanden sein. Die Verwendung des Begriffs functio im Titel von N. 44 sowie das Wasserzeichen des Papiers bedingen eine Abfertigung nach N. 40 vom August 1673.

Differentiae figurae circulo homogeneae rationalis

$$\frac{a^3}{a^2+y^2} - \frac{a^3}{a^2+y^2+1+2y} = \cancel{a^3} + \cancel{y^2a^3} + a^3 + 2ya^3 - \cancel{a^3} - \cancel{y^2a^3}$$

$$\frac{2ya^4}{a^4+2a^2y^2+y^4} = x, \quad \text{vel} \quad 2ya^4 = a^4x + 2a^2y^2x + y^4x, \quad \text{vel} \quad \frac{2y}{x}a^4 = a^4 + 2a^2y^2 + y^4,$$

vel $\quad a^2\sqrt{\dfrac{2y}{x}} = a^2 + y^2.$

Haec figura est quadrabilis. Ergo et figura cuius differentiae sunt

$$\frac{a^4}{a^4+2a^2y^2+y^4},$$

seu cuius differentiae sunt quadratis seu momento ipsarum $\dfrac{a^2}{a^2+y^2}$ homogeneae, est quadrabilis. Eius enim figurae complementum aequipollet differentiis in abscissas y ductis, seu

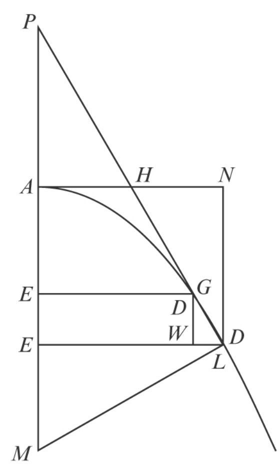
$$\frac{ya^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}.$$

44. VARIA CIRCA FUNCTIONES TANG. INVERS. QUAD. CIRC. ET HYPERB. EX SE INVICEM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 284. $1\frac{4}{5}$ S. auf Bl. 284 v° und Bl. 284 r° unterer Teil. Überschrift ergänzt. — Auf Bl. 284 r° oben, mittels Trennstrich abgesetzt N. 43.
Cc 2, Nr. 608 tlw., 614

Datierungsgründe: s. N. 43.

Varia circa functiones tang. invers. Quad. circ. et hyperb. ex se invicem et alias figuras ex ipsis



[*Fig. 1*]

Figura proposita esto parabola, cuius vertex A. abscissa ex quo $AE = x$, applicata $ED = y = \sqrt{ax}$, posito a latere recto, et posita EE infinitesima seu unitate constructionis $= 1$. Tunc differentia inter duas applicatas proximas non nisi ipsa EE distantes erit $\sqrt{ax+a} - \sqrt{ax}$. Quod si figura aliqua cogitetur differentiis applicatarum parabolae homogenea, eius applicatae erunt: $a\sqrt{ax+a} - a\sqrt{ax} = y$, vel utroque quadrato:

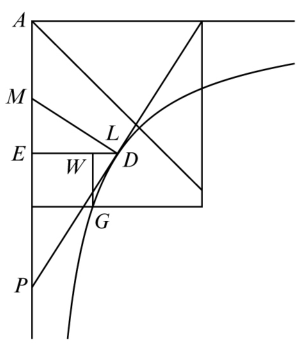
Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 4

$ax + a + ax - 2\sqrt{a^2x^2 + a^2x} = \dfrac{y^2}{a^2}$, seu $2ax + a - \dfrac{y^2}{a^2} = 2\sqrt{a^2x^2 + a^2x}$, et utraque parte quadrata

$$4a^2x^2 + 4a^2x - \frac{4xy^2}{a} + a^2 - \frac{2y^2}{a^2} + \frac{y^4}{a^2} = 4a^2x^2 + 4a^2x,$$

vel $\cancel{4a^4x^2} + \cancel{4a^4x} - 4xy^2a + a^4 - \cancel{2y^2a} + y^4 - \cancel{4a^4x^2} - \cancel{4a^4x} = 0$, fiet: $4xy^2a = a^4 + y^4$, vel $4x = \dfrac{a^4 + y^4}{y^2a} = \dfrac{a^3}{y^2} + \dfrac{y^2}{a}$, vel $\dfrac{4x}{a} = \dfrac{a^4 + y^4}{y^2a^2}$.

Ecce ordinatas ad basin figurae, cuius ordinatae ad axem sunt homogeneae differentiis parabolae.



[*Fig. 2*]

Applicatae hyperbolae sunt: $\dfrac{a^2}{x}$, differentiae[:] $\dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2}{x+1} = \dfrac{a^2x + a^2 - a^2x}{x^2 + x} = \dfrac{a^2}{x^2}$.

Datis differentiis $\dfrac{a^2}{x^2}$ inverso modo quaeritur figura cuius sint eae differentiae.

Posito ergo $GW = 1$, et $WL = \dfrac{a^2}{x^2}$, erit $\dfrac{GW}{WL} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{x^2}} = \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{PE}{ED} = \dfrac{ED}{EM}$, ergo $\dfrac{ED}{PE}$ erit

6 f. Ecce ... parabolae. *erg. L*

3 Anstelle von $\dfrac{y^4}{a^2}$ müsste es $\dfrac{y^4}{a^4}$ heißen; der Fehler pflanzt sich weiter fort.

$\frac{a^2}{x^2}$, ergo $\dfrac{\frac{ED}{PE}}{\frac{ED}{EM}}$ erit: $\dfrac{\frac{a^2}{x^2}}{\frac{x^2}{a^2}} = \dfrac{\frac{1}{PE}}{\frac{1}{EM}} = \dfrac{EM}{PE} = \dfrac{a^4}{x^4}$.

Iam dudum constat esse $PE = \dfrac{ED}{WL} = \dfrac{y + \frac{a^2}{x^2}}{\frac{a^2}{x^2}} = \dfrac{yx^2}{a^2} + 1$, posito scilicet y esse ordinatam figurae quaesitae, nam $\dfrac{PE}{GW}$ vel $\dfrac{PE}{1} = \dfrac{ED}{WL}$.
Praeterea alibi a me demonstratum est, EM esse = differentiam inter semiquadrata duarum figurae quaesitae ordinatarum, seu inter semiquadratum de $y + \dfrac{a^2}{x^2}$ et semiquadratum de y, seu inter $\dfrac{y^2 + \frac{a^4}{x^4} + \frac{2ya^2}{x^2}}{2}$ et $\dfrac{y^2}{2}$[,] $= \dfrac{a^4}{2x^4} + \dfrac{ya^2}{x^2}$, ergo $\dfrac{PE}{EM}$ erit:

$$\frac{\frac{yx^2}{a^2} + 1}{\boxed{\frac{a^4}{2x^4}} + \frac{ya^2}{x^2}} = \left[\frac{x^4}{a^4}\right], \text{ sive reiectis inutilibus: } \frac{\frac{\cancel{y}x^2}{a^2}}{\frac{\cancel{y}a^2}{x^2}} = \left[\frac{x^4}{a^4}\right].$$

Unde patet aequationem esse identicam ac verissima quidem esse assumta, sed unde nihil novi detegatur.

Applicata circuli $\sqrt{2ax - x^2}$, alia $\sqrt{2ax + 2a - x^2 - 1 + 2x}$, differentia inter eas est: $= \dfrac{y}{a}$. Ergo

---

7 *Nebenrechnung, umrahmt:*

$$\text{sive } \frac{\frac{yx^2 + a^2}{a^2}}{\frac{a^4x^2 + 2ya^2x^4}{2x^6}} \text{ sive } \frac{2yx^8 + 2a^2x^6}{a^6x^2 + 2ya^4x^4} \times \frac{a^4}{x^4}$$

2 Iam *(1)* aliunde *(2)* dudum *L* 7 $\frac{a^4}{x^4}$ *L ändert Hrsg. zweimal*

4–6 Das ergibt sich z. B. ohne weiteres aus N. 27 S. 499 Z. 1–12 . 10–758,7 Die Rechnungen dieses Abschnitts sind fehlerhaft; sie werden ergebnislos abgebrochen.

$$\frac{y^2}{a^2} = \quad 2ax - x^2 + \overset{\odot}{2ax} + 2a - x^2 - 1 + 2x$$

$$\overset{\rightmoon}{-\sqrt{4a^2x^2 + 4a^2x - 2ax^3 - 2ax + 4ax^2 \mid -2ax^3 - 2ax^2 + x^4 + x^2 - 2x^3}},$$

seu $a^2\odot - y^2 = \rightmoon a^2$, et utraque parte in se ducta, fiet

$$\cancel{4a^2x^2} - \overset{16}{\overset{\cancel{8}}{\cancel{4}}}ax^3 + \overset{16}{\cancel{8}}a^2x^2 + \overset{24}{\cancel{8}}a^2x - \cancel{4ax^3} - \overset{8}{\cancel{4}}ax + \overset{8}{\cancel{8}}ax^2, +\cancel{x^4} - \overset{\cancel{8ax^3}}{\cancel{4ax^3}} - \cancel{4ax^2} + \overset{4}{\cancel{2}}x^4$$

$$+\overset{4}{\cancel{2}}x^2 - \overset{8}{\cancel{4}}x^3, +\cancel{4a^2x^2} + \cancel{8a^2x} - \cancel{4ax^3} - \cancel{4ax} + \cancel{8ax^2}, +4a^2 - \cancel{4ax^2} - 4a + \cancel{8ax}, +\cancel{x^4}$$

$$+\cancel{2x^2} - \cancel{4x^3}, +1 \ \langle -4x + 4x^2 \rangle$$

$[=]$ $\ -16ax^3 + 16a^2x^2 + 24a^2x + 8ax^2 + 4x^4 + 4x^2 - 8x^3 + 4a^2 - 4a$ [*bricht ab*]

Differentiae alia etiam via brevius haberi possunt, cum enim sit $PE = p = \dfrac{ED = y}{WL}$, erit $WL = \dfrac{ED}{PE}$. Cumque in circulo aequatio sit $2ax + x^2 = y^2$, erit PE sic habenda: $2ap + 2xp = 2y^2$, seu $PE = p = \dfrac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}ap + \cancel{2}xp} = \dfrac{y^2}{a+x} = \dfrac{2ax + x^2}{a+x} = PE$,

et $ED = \sqrt{2ax + x^2}$, ergo WL erit $=$

$$\frac{\sqrt{\llcorner 2ax + x^2 \lrcorner} \frown a + x}{\sqrt{2ax + x^2} \frown \sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a + x}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a + x \frown a + x}{2a + x \frown x} = \frac{a^2 + 2ax + x^2}{2ax + x^2}$$

$$= \frac{a^2}{2ax + x^2} + 1 = WL.$$

Habetur ergo quadratura figurae: $\dfrac{a^3}{2ax + x^2} = \dfrac{a^3}{\llcorner 2a + x \lrcorner \frown x}$.

Iam alibi a me demonstratum est, differentias, in distantias a vertice, hoc loco x, ductas complemento figurae aequari. Ergo $\dfrac{a^3 \frown x}{\llcorner 2a + x \lrcorner \frown x} = \dfrac{a^3}{2a + x}$, cylinder figurae $\dfrac{a^2}{2a + x}$,

---

12 *Über dem dritten Ausdruck, umrahmt:* Hic incipit error. *Zusätzlich am Rande ein großes* NB.

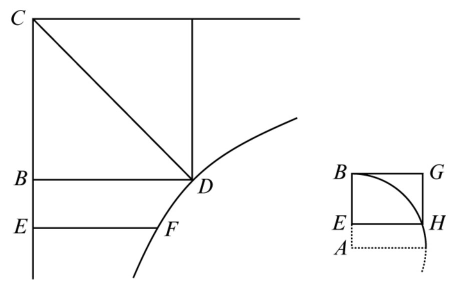
14 Error

---

8 Differentiae ... haberi possunt: Die Rechnungen der folgenden Abschnitte bis zum Ende des Stückes hin sind fehlerhaft und werden schließlich nicht mehr weitergeführt. Auf verschiedene dieser Fehler weist Leibniz selbst hin, hält jedoch an der falschen Grundannahme von Z. 9 fest.

addito semper x aequatur trilineo concavo circulari, seu portionis circularis, sinu verso, recto, et arcu contentae; complemento ad rectangulum isoparallelum, sub sinu verso nimirum et recto comprehensum.

Huius figurae quadruplum ordinatam habet: $\dfrac{4a^2}{2a+x}$, positoque $b = 2a$, fiet ordinata $\dfrac{b^2}{b+x}$, at hanc constat esse ordinatam hyperbolae asymptoto parallelam, cuius q u a d r a t u m   c o n s t a n s est b^2.



[*Fig. 3*]

Ergo posito hyperbolam describi, latere recto et transverso aequalibus, cuius semilatus transversum CD, et semiquadratum eius $\dfrac{CD^2}{2}$, cuius latus $BD = b = 2a$, ita ut CD sit $\sqrt{8a^2}$[;] posito inquam hyperbolam describi latere recto et transverso aequalibus $= [2]\sqrt{8a^2}$, manifestum est eius ordinatas ad asymptoton CE, ipsa $BD = 2a = b$ minores ut EF, esse $\dfrac{b^2}{b+x} = \dfrac{4a^2}{2a+x}$, posita ipsam $x = BE$ arithmetice crescentem, esse aequalem sinui verso portionis circularis datae, et a radio circuli dati AB; his inquam positis (assumendo EB ita parvam ne sit maior ipso radio $AB = a$) huius hyperbolici spatii $FEBDF$ quarta pars ipsis x seu semiquadrato ipsius BE aucta erit portionis circularis $BEHB$ ad rectangulum BEH complemento, nempe trilineo $BGHB$ aequalis.

1 addito semper x *erg. L* 11 2 *erg. Hrsg.* 15 ipsis x seu semiquadrato ipsius BE aucta *erg. L*

Habetur ergo non tantum quadratura circuli, ex data quadratura hyperbolae, sed et nunc indiscriminatim quadratura hyperbolae ex data circuli quadratura, vel contra, differentiis quadrabilibus inter earum portiones inventis.

Longe ergo praestat hoc inventum alteri, ubi quadratura hyperbolae in se reflexa opus erat ad dimensionem circuli habendam.

Ac iam nunc videndum an aliqua inde duci lux possit, collata utraque dimensione, quod suo loco experiemur.

Saltem id nobis praestat inventum duplex, ut mutua harmonia confirmata a calculi erroribus immunia esse intelligantur.

Imo falsa sunt ista unde a loco quem et notavi in margine per NB., error autem ex eo, quod differentiarum $\dfrac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}}$ quadrata assumsi pro ipsis. Rectiora sunt quae signo $\odot$ notata.

$\odot$

$\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}} = y$. Ergo $a^4 = 2axy^2 + x^2y^2$, vel: $a^2 + \dfrac{a^4}{y^2} = 2ax + x^2 + a^2$. Ergo $\sqrt{a^2 + \dfrac{a^4}{y^2}} = x + a$, et $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax+x^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{2a}{x}+1}}$, $\dfrac{a^2}{\dfrac{2a}{x}+1} = y^2$, unde fit: $a^{\cancel{2}}x = 2\cancel{a}y^2$, seu hyperbola.

Ergo $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$ pendet ex quadratura hyperbolae; vel contra quadratura hyperbolae ex illa.

Seu[:] $\sqrt{a^2 + \dfrac{a^4}{y^2}} = a + x$, vel $\sqrt{\dfrac{y^2+a^2}{y^2}} \frown a = a + x$,

1–3 *Dahinter, interlinear:* Imo prior vera, haec falsa.

2 et *(1)* vicissim *(2)* nunc indiscriminatim *L* 15 x + a *(1)* , vel sic: $a^4 + a^2y^2 = 2$ *(2)* , et *(a)* $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax+x^2}}$, est figura segmentorum, atque ideo pendet a quadratura circuli. Ergo $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$ pendet ab eadem. *(b)* $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax+x^2}}$ *L*

vel $\sqrt{\begin{array}{c} y^2+a^2 \\ a+y \frown a-y \end{array}} \frown \frac{a}{y} = a+x,$

vel $\underbrace{a+y}_{z} \frown \underbrace{a-y}_{\cancel{z-2y}}, \frown \frac{a^2}{y^2} = \underbrace{a+x}_{x} \frown \underbrace{a+x}_{x}.$

$$a^2+y^2 \frown \frac{a^2}{y^2} = x^2, \text{ vel } a^4+y^2a^2 = x^2y^2, \text{ vel } a^4 = x^2y^2 - y^2a^2, \text{ vel } \frac{a^4}{y^2} = x^2-a^2.$$

$$\sqrt{a^2+\frac{a^2}{y^2}} = x, \text{ vel } a^2y^2+a^4 = x^2y^2. \text{ vel } \frac{y^4}{4} + a^2y^2 + a^4 = x^2y^2 + \frac{y^4}{4}.$$

Ergo *(!)* $a^2+y^2 = \sqrt{x^2y^2+\frac{y^4}{4}}$, vel $\frac{a^2}{y} + y = \sqrt{x^2+y^2}$. Ecce figuram cuius chordae sunt applicatae spatii hyperbolici applicatis rectanguli auctae. Divisisque omnibus per y, fiet: $\frac{a^2}{y^2} + 1 = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}$, vel omnibus in se ductis $\frac{a^4}{y^4} + \frac{2a^2}{y^2} + \cancel{1} = \frac{x^2}{y^2} + \cancel{1}$, fietque: $\frac{a^4}{y^2} + 2a^2 = x^2$. Ergo quadrata omnium x^2 quadrari possunt.

Cumque sit et $\frac{a^4}{x^2-a^2} = y^2$, consideretur et $y = \frac{x^2a}{x^2-a^2}$, nam hac cognita cognoscitur et prior. Ergo $x^2y - a^2y = x^2a$, seu $x^2y - x^2a = a^2y$, fietque $x^2 = \frac{a^2y}{y-a}$. Sed haec nunc ut aliena mittamus.

45. DE QUADRATURA CIRCULI ET HYPERBOLAE ET ALIIS CURVIS INDE PENDENTIBUS

[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 12–13. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 12 r° u. 13 v°. 3 Zusätze außerhalb des Haupttextes. Überschrift, deren 2. Teil sich auf *LSB* VII, 3 N. 22 bezieht, erg. — Auf dem übrigen Bogen *LSB* VII, 3 N. 22.
Cc 2, Nr. 1237, 1238

Datierungsgründe: Das Stück ist, wie der direkte Bezug zu Beginn von Teil 1 und Teil 2 sowie die Fortsetzung der Figurenzählung zeigen, eine selbständige Fortsetzung der bisher frühesten bekannten Studie zur Kreisreihe (Cc 2, Nr. 563 u. 1233A Bog. 2–4), die auf den Herbst 1673 zu datieren ist, und dürfte kurz nach dieser Studie entstanden sein. Es ist etwas später als N. 44 anzusetzen, da die dort nicht zum Tragen gekommene falsche Zerlegung $a^2 + y^2 = (a + y)(a - y)$ hier ausgiebig verwendet wird. Außerdem bilden die Wasserzeichen der verwendeten Papiere ein Paar.

De quadratura circuli et hyperb. et aliis curvis inde pendentibus, et utrum duae illae a se invicem quod hic asseritur. Item progressionis harmonicae differentiae.

14–17 *Über dem Titel:*
$\frac{x^3}{a} = y^2$. $x + 1 \frown x + 1 \frown x + 1 = x^2 + 2x + 1 \frown x + 1 = \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 + 3x + 1}{a} - \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{a}} = \frac{3x^2}{a}$.
Applicatae parabolae quadraticae sunt reductae applicatae cubicae compositae.

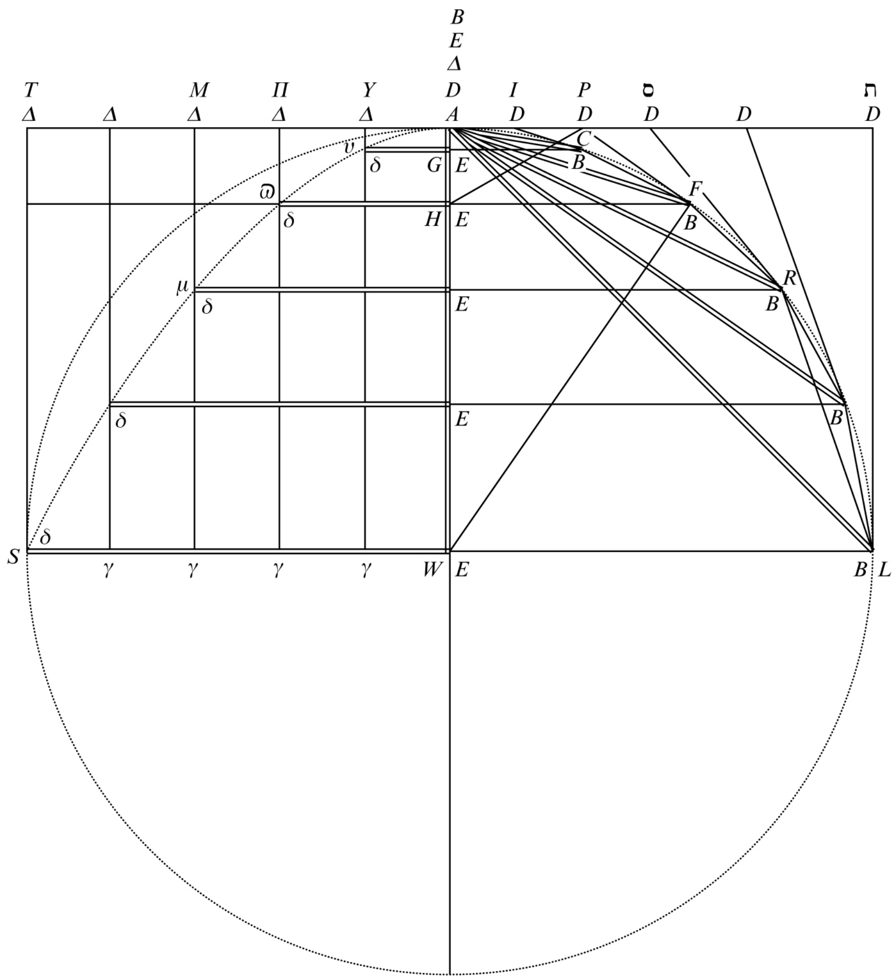


fig. 4.

1 fig. 4. *erg. Hrsg. nach LH 35 II 1 Bl. 87 v*^{o} *(= Cc 2, Nr. 1233A Bog. 2)*

---

1 *fig. 4*: Die Kurve $\delta\delta\delta$ ist in der Handzeichnung eine Parabel; sie dient Leibniz als Paradigma für die anderen aus der Figur abgeleiteten Kurven.

[*Teil 1*]

Inspice figuram 4^{tam} *Dissertationis de arithmetico circuli tetragonismo* figuramque $A\delta SW$. Ostensum est, posito $AE = x$, et $E\delta = y$, fore $y = \dfrac{xa}{\sqrt{2ax - x^2}}$, vel $\sqrt{\dfrac{x^2a^2}{2ax - x^2}} = \sqrt{\dfrac{xa^2}{2a - x}}$, et aequatio figurae erit $2ay^2 = xa^2 + xy^2$, seu $x = \Delta\delta = \dfrac{2ay^2}{a^2 + y^2}$, posita $A\Delta = y$. Divisisque omnibus per $2a$, fiet $\dfrac{y^2}{a^2 + y^2}$.

Ante omnia autem tangentem curvae nostrae investigare operae pretium est, et primum posita x abscissa, fiet $4ay^2 - 2xy^2 = la^2 + ly^2$, fietque

$$l = \frac{4a - 2x}{a^2 + y^2} \frown y^2 = \frac{4a - 2x}{a^2 + 2ax - x^2} \frown 2ax - x^2.$$

Sed quoniam summa omnium l, in differentias ipsarum y, id est ipsi AT seu y velut abscissae, applicatarum, aequatur figurae, ideo potius in aequatione $\dfrac{4a - 2x}{a^2 + y^2} \frown y^2$, pro x substituamus eius valorem, fiet:

$$l = \frac{4a - \dfrac{4ay^2}{a^2 + y^2} \frown y^2}{a^2 + y^2}, \text{ vel } l = \frac{4ay^2}{a^2 + y^2} - \frac{4ay^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4},$$

et iam $\dfrac{4ay^2}{a^2 + y^2}$ pendet ex q. circ. ergo et $\dfrac{4ay^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$.

Figura ex his composita aequatur figurae $A\delta STA$ complemento figurae segmentorum, vel

---

9–765,1 *Daneben am Rande:*

Nota si istius $\dfrac{ya}{a^2 + y^2}$ summae quadratura pendet a quadratura huius $\dfrac{y^2}{a^2 + y^2}$. $ya^2 = a^2x + y^2x$, $ya^2 - y^2x = a^2x$, $y \frown a^2 - xy = a^2x$.

13 et iam ... $\dfrac{4ay^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$. *erg. L*

---

8 $2ax - x^2$: Leibniz setzt hier irrtümlich den Kreis ein, der Fehler wirkt sich nicht weiter aus.

$$l = \frac{4a^3y^2 + \cancel{4ay^4} - \cancel{4ay^4}}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4} = \frac{4a^3y^2}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}.$$

Divisisque omnibus per $2a$, fiet $\dfrac{2a^2y^2}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$, quaeratur $\dfrac{a^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$, item $\dfrac{y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$. His omnibus inter se iunctis fiet $\dfrac{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4} = 1$, et iunctae omnes eiusmodi applicatae his aequationibus homogeneae rectangulum complebunt.

Iam $\dfrac{2a^2y^2}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$ pendet ex quadratura circuli, $\dfrac{y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$ etiam ex ea pendet. Idem ita in aliam formam commutari potest, si ponatur $a^2 + y^2 = z^2$, vel $y^2 = z^2 - a^2$, et $y^4 = z^4 - 2z^2a^2 + a^4$, fiet

$$\frac{y^4}{z^4} = \frac{z^4 - 2z^2a^2 + a^4}{z^4} = 1 - 2\frac{a^2}{z^2} + \frac{a^4}{z^4},$$

ergo haec figura $\dfrac{y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$ aequalis istis simul, restat figura $\dfrac{a^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4} = \dfrac{a^4}{z^4}$, sed $z = \sqrt{a^2 + y^2}$. Porro $\dfrac{a^2}{z^2} = \dfrac{a^2}{a^2 + y^2}$ etiam pendet ex quadratura circuli, restat ergo tantum $\dfrac{a^4}{z^4}$, quae etiam pendet ex circuli quadratura, ut vel hinc patet.

2–4 *Daneben am Rande:*
Fortasse imposterum utilis erit etiam tabula pro logarithmis logarithmorum ipsis numeris logarithmicis sumtis pro naturalibus.

5 f. $\dfrac{y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$ *(1)* , erit a *(2)* |etiam ... Idem *erg.*| ita *L* 9 $\dfrac{y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$ *(1)* quadrari potest *(2)* aequalis *L*

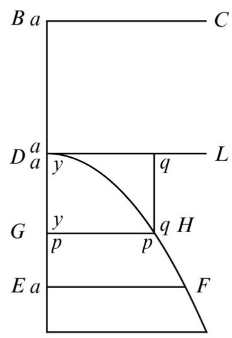


fig. 5.

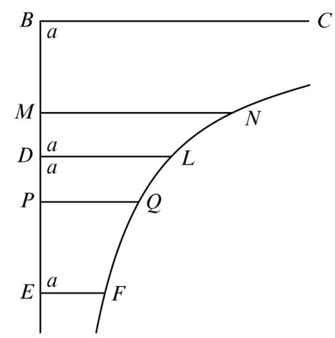


fig. 6.

Porro notandum est $a^2 + y^2$, aequari $a + y \frown a - y$, appellato ergo $a + y = m$, et $a - y = n$, erit $m - n = 2y$, et $mn = z^2$.

$$a + 1 \frown a - 1 \qquad a + 2 \frown a - 2 \qquad = a^2 + ya - ya + y^2$$

$\dfrac{a^3}{m \frown n} = p$, vel $\dfrac{a^3}{a + y, \frown a - y} = p$. Ergo $\dfrac{a^3}{n} = pm$, vel $\dfrac{a^3}{m} = pn$, seu $\dfrac{a^3}{a + y} = pa - py$. Ergo p in m, seu applicatarum $\underline{p}$ momentum ex axe librationis BC est cylinder hyperbolae, at si $BD = DE = a$, momentum applicatarum ex EF axe librationis est etiam cylinder hyperbolicus sed alio modo assumtus.

Hinc intelligitur et EF esse infinitam sive asymptoton, quoniam $a - y$, seu n, ibi fit infinite parva, divisore autem infinite parvo, dividendus fit infinite magnus. Priore modo cum momentum ex BC, tunc asymptotos hyperbolae momento homogeneae est in BC, posteriore modo cum momentum est ex EF, tunc et hyperbolae asymptotos est in EF.

---

1 Error est[:] $a + y, \frown a - y$ dat $a^2 - y^2$.

4 f. Contra $\dfrac{a^3}{n} = pm$, seu $\dfrac{a^3}{a - y} = pa + py$, ergo differentia inter istos duos cylindros hyperbolicos est $2py$, seu momentum ex DL duplicatum.

---

1 Porro: Leibniz hat erst im Nachhinein gemerkt, dass seine Zerlegung von $a^2 + y^2$ falsch ist. Der Fehler beeinflusst sämtliche Überlegungen bis zum Ende von Teil 1.

Ex his sequitur data quadratura hyperbolae utriusque, dari rectam ipsi $[EF]$ vel BC parallelam, quae $DEFD$ statice bisecat, seu per centrum gravitatis eius transit: ea ponatur esse GH. Notam enim eam esse ex datis, patet. Nam distantiae axis aequilibrii GH, ab axe librationis BC vel EF, sunt ut momenta.
Posita enim ipsa figura, seu tota area $= \aleph^2$, tunc momentum eius ex EF, erit $\aleph^2 \frown EG$, et ex BC, erit $\aleph^2 \frown BG$, ergo momenta erunt ut distantiae. Momentorum ergo ratio nota est, ex posita hyperbolae quadratura, et distantiarum, ergo et axis aequilibrii GH. Iam momentum figurae ex DL, erit $\aleph^2 \frown DG$, at idem $=$ cyl. hyp. $\dfrac{a^3}{n}$ demto $\aleph^2 \frown BD$, seu $\aleph^2 \frown a$, ergo $\aleph^2 \frown DG + \aleph^2 \frown BD\ (= a)$, vel $BG \frown \aleph^2$, seu cylinder figurae sub $BG =$ cylindro hyperbolico seu omnibus $\dfrac{a^3}{a-y}$. Quod erat inveniendum.
Ecce quadratura, circuli ex data hyperbolae quadratura, non contra. Et certe credibilius, si unquam hanc priorem inventum iri.
Quando y nunquam assurgit ad a, ut quando resecta minor radio, cylinder hyperbolicus est finitae longitudinis.
Similis indagatio fieri potest momento sumto ex EF quae conferenda.

[*Teil 2*]

Inspice fig. 4 *Diss. de circuli per rescissas dimensione*, in ea omnes $ED = y =$ resectis $= \dfrac{xa}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Ergo omnes x vel $\Delta\delta = \dfrac{2ay^2}{a^2+y^2}$ pendent ex q. circ.

Quadrata omnium ED sunt $\dfrac{x^2a^2}{2ax-x^2} = \dfrac{xa^2}{2a-x} = ya$. Unde fit aequatio $xa = 2ay - xy$ vel $xa + xy = 2ay$, unde fit $x = \dfrac{2ay}{a+y}$, ergo homogenea est haec figura momento hyperbolici cuiusdam spatii ultra vel cis $a = DL$ (vid. fig. 6. hic) sumti ut $LDMNL$ vel $LDPQL$, ex ipsa DL. Iam momentum posterioris $LDPQL$ ex DL, a momento ex BC asymptoto, quod est a in DP, differt cylindro ipsius $LDPQL$. Posterior autem $LDPQ$ respondet ipsi $\dfrac{2a^2y}{a+y}$ ut $LDMNL$ ipsi $\dfrac{xa^2}{2a-x}$ quae ab a^2 differt ipsi $\dfrac{a^3}{2a-x}$ atque ideo etiam cylindro hyperbolici spatii. Ergo quadrata omnium ED pendent semper ex q. hyp.

1 EC *L ändert Hrsg.*

At quadrata omnium $\Delta\delta$ (fig. dict. 4.) seu $\dfrac{y^4}{1+2y^2+y^4}$ pendent ex q. circ. ut ostensum est, sed et quadrata omnium $\delta\gamma$ (dict. fig. 4.) quae sunt

$\dfrac{1}{1+2y^2+y^4}$ $\left(\dfrac{4a^6}{a^4+2y^2a^2+y^4}\right)$ quoniam $\delta\gamma$ sunt $\dfrac{2a^3}{a^2+y^2}$.

Si $\Delta\delta$ in $A\Delta$ distantias a vertice ducantur fiet: $\dfrac{2ay^3}{a^2+y^2}$, momento eorum ex AW quod perinde ex quadratura hyperbolae pendet, eodem modo $\gamma\delta$ in distantias ab S, in dicta fig. 4.

Fit $\dfrac{ya^3}{y^2+a^2} = x$. Ergo figura homogenea $ya^2 = y^2x + a^2x$, vel $ya^2 - yyx = a^2x$, vel $y = \dfrac{x}{a^2-yx}$.

$ya - y^2\dfrac{x}{a} = ax$. Ergo $ya - y^2\dfrac{x}{a} - \dfrac{a^2}{2\dfrac{x}{a}}\left(\dfrac{a^3}{2x}\right) = ax - \dfrac{a^3}{2x}$, vel: $\dfrac{a^3}{4x} - ax = \dfrac{a^3}{4x} + y^2\dfrac{x}{a} - ya$, sive $\sqrt{\dfrac{a^3}{4x} - ax} = \mp\, y\sqrt{\dfrac{x}{a}} \mp \dfrac{a}{2\sqrt{\dfrac{x}{a}}}$ quod ipsis in se multiplicatis patet, fit enim $y^2\dfrac{x}{a} + \dfrac{a^2}{4\dfrac{x}{a}}\left(\dfrac{a^3}{4x}\right) - ya$, ergo

$$y = \frac{\sqrt{\dfrac{a^3}{4x} - ax} \mp \dfrac{a}{2\sqrt{\dfrac{x}{a}}}}{\mp\sqrt{\dfrac{x}{a}}} = \sqrt{\mp\dfrac{a^4}{4x^2} \mp a^2} + \frac{a^2}{x}.$$

Ecce rursus hyperbolicum spatium, restat ergo $\sqrt{\mp\dfrac{a^4}{4x^2} \mp a^2}$ inquirendum, ponatur $= y$, fiet $y^2 = \mp\dfrac{a^4}{4x^2} \mp a^2$, sive $4y^2x^2 = \mp\, a^4 \mp a^2x^2$ vel $4y^2x^2 \mp a^2x^2 = \mp\, a^4$, fit

---

12 Auf der rechten Seite der Beziehung müsste es genauer $\mp\sqrt{\dfrac{a^4}{4x^2} - a^2}$ heißen. Die Vorzeichenproblematik kommt wegen der späteren Festlegungen nicht zum Tragen. 14 Anstelle von $\mp\, a^2x^2$ müsste es $\mp\, 4a^2x^2$ heißen. Leibniz rechnet mit dem Versehen konsequent bis S. 769 Z. 10 weiter.

$$\frac{\mp a^4}{4y^2 \mp a^2} = x^2, \quad \text{sive sic potius } x = \frac{a^2 \frown \sqrt{\mp 1}}{\sqrt{4y^2 \mp a^2}}.$$

NB. hic methodum extrahendi radicem ex dubiis.
Item quod non sit opus signis aliis dubitationis praeter $\mp$ et $\mp\!\!\!\!=$ ne ad eos quidem casus ubi ignoratur utrum alteri praeponendum cum sit unum ex illis $+$ alterum $-$. Posito hic $\mp$ seu signum ipsius $\dfrac{a^4}{4x^2}$ significare $+$, et hoc loco constare puto $\mp$ esse $+$ in $\sqrt{\mp \dfrac{a^4}{4x^2} \mp\!\!\!\!= a^2}$, et $\mp\!\!\!\!=$ esse $-$, quia x hoc loco semper minor quam a.
Iam $\sqrt{4y^2 + a^2} = z^2$, seu $4y^2 + a^2 = z^2$, ista $\sqrt{4y^2 + a^2}$ applicata est hyperbolae. Hinc puto si priora iungantur sequi istam $\dfrac{a^2}{\sqrt{4y^2 + a^2}}$ pendere ex quadratura hyperbolae, sive si $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{\sqrt{4y^2 + a^2}}$, sive si a media proportionalis inter applicatam hyperbolae et applicatam alterius figurae.

Nota de aequationibus in se replicatis v. g. $ya^2 - yyx = a^2x$, vel $y = \dfrac{a^2x}{a^2 - yx}$, unde fit

$$y = \frac{a^2x}{\dfrac{a^4 - a^2yx - [a^2x^2]}{a^2 - yx}} = y = \frac{a^4x - a^2yx^2}{a^4 - a^2yx - [a^2x^2]}.$$

Tentandum an hinc duci queat approximatio.

$\dfrac{a^3}{y^2 + a^2} = x$. Ergo $a^3 = y^2x + a^2x$, vel $\dfrac{a^3}{x} - a^2 = y^2$.

Ecce momentum supplementi figurae 5^{tae}.

Et $y = \sqrt{\dfrac{a^3}{x} - a^2}$, et $yx = \sqrt{a^3x - a^2x^2}$, vel $\dfrac{yx}{a} = \sqrt{ax - x^2}$.

Ecce momentum omnium q (vid. fig. 5.) praecise aequale portionis circularis cylindro. Conferendae inter se hae duae figurae altera segmentis altera sinubus homogenea.

---

1 *Daneben am Rande:* NB.

13 *1. Formel:* a^2x^3 *L ändert Hrsg.; 2. Formel:* ax^3 *L ändert Hrsg.*

46. DE CURVIS VEL FIGURIS SYNTOMOIS
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 243. L-förmiges Randstück (Außenmaße 18 bzw. 24 cm; Breite jeweils 6-7cm; Innenkante teils gerissen, teils geschnitten; Reste abgetrennten Textes an der Innenseite) eines Bl. 2°, beidseitig beschrieben.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum August 1673 bis Juni 1674 belegt; es ist identisch mit dem Wasserzeichen von *LSB* VII, 3 N. 26, S. 300–314. Überdies bestehen enge Bezüge zu dem nächst der Notiz von S. 300 als erstes auf den Bogen geschriebenen und mittels Trennstrichs vom übrigen Text abgesetzten Teil 4, S. 312–314. Aus inhaltlichen Gründen dürfte N. 46 vor Teil 4 entstanden sein. Daraus ergibt sich die mutmaßliche Datierung. — Weiterhin bestehen Bezüge zu dem späteren Stück *LSB* VII, 3 N. 38_{11}, S. 475–483 (insbesondere S. 479–481) vom Oktober 1674.

$\dfrac{\sqrt{ax+x^2}}{a}$, $\square$, $= \dfrac{ax+x^2}{a^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{x^2}{a^2}$, subtrahatur ab ea 1, fiet $\sqrt{\dfrac{ax+x^2-a^2}{a^2}}$. Iam figurae huius $\sqrt{\dfrac{ax+x^2-a^2}{a^2}}$ summa, si iniri potest, summarum istarum series dabit figuram cuius curva hyperbolae syntomos. Fiat autem $\sqrt{ax+x^2-a^2} = y$. Ergo $y^2 = ax+x^2-a^2$. et $a^2 + \dfrac{a^2}{4} + y^2 = ax + x^2 + \dfrac{a^2}{4}$. Ergo $\sqrt{\dfrac{5a}{4} + y^2} = \left[\dfrac{a}{2}\right] + x$. rescindatur $\left[\dfrac{a}{2}\right]$, fiet $\dfrac{5a^2}{4} + y^2 = x^2$. Ecce ipsam hyperbolam hoc modo sibi syntomon seu spatio suo. Et hinc probe notandum, hic per exiguas mutatiunculas fieri posse varias figuras syntomos, ut modo parabolicam curvam, modo hyperbolicam hyperbolae esse syntomon.

Pro circulo[:] ut habeamus curvam cuius elementa crescant ut sinus circuli, primum, ipsa curvae elementa crescent sic: $\dfrac{\sqrt{2ax-x^2}}{a} = \sqrt{\dfrac{2ax-x^2}{a^2}}$, ab horum quadrato

13 *(1)* $\dfrac{\sqrt{\mathrm{ax} - \frac{\mathrm{x}^2}{4}}}{\mathrm{a}}$ quadretur, fiet *(2)* $\dfrac{\sqrt{\mathrm{ax}+\mathrm{x}^2}}{\mathrm{a}}$ *L* 13 $+\dfrac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2}$, *(1)* hinc habetur modus inveniendi *(a)* figuram quam propo *(b)* curvam quae eadem cum hyperbola *(2)* subtrahatur *L* 14 summa *(1)* iniri potest, ergo *(2)*, si *L* 15 syntomos. *(1)* Eodem modo quaeram curvam *(a)* circu *(b)* circuli sinubus syntomon; $\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2$, *(2)* Fiat *L* 16 et *(1)* posito $+ = - -$ vel $2\mathrm{a}^2$ *(2)* a^2 *L* 16 f. a *L ändert Hrsg. zweimal*

$\dfrac{2ax-x^2}{a^2}$ subtrahatur quadratum unitatis: $\dfrac{a^2}{a^2}$, residui radix: $\sqrt{\dfrac{2ax-x^2-a^2}{a^2}}$ est series differentiarum figurae quae circulo syntomos; eae differentiae ergo: $\dfrac{\mp\, a \mp\, x}{a} =\mp\, 1 \mp\, \dfrac{x}{a}$. Harum ergo summa circulo syntomos.

Iam: $1+1+1+1$ etc. et $1+2+3+4$ etc., summae semper $\dfrac{x^2}{2}$. Habemus ergo curvam parabolicam sinubus circuli syntomon, at eadem etiam hyperbolae syntomos; hinc rursus nova videtur methodus oriri, circa circuli et hyperbolae comparationem.

$\mp\, x \mp\, \dfrac{x^2}{2}$. Iam $\mp\, \dfrac{x}{a} \mp\, \dfrac{x^2}{2a^2} = \dfrac{y}{a}$, vel $2ax-x^2=2ya$, fiet $2ax-x^2-a^2=2ya-a^2$, ergo $a-x$, vel $x-a=\sqrt{2ya-a^2}$, seu $z=\sqrt{na}$.

An forte c u r v a p a r a b. a basi secta videtur circulo, ab axe secta hyperbolae syntomos. Quod foret maximi momenti.

$\sqrt{ax+a}-\sqrt{ax}=\dfrac{y}{a}$. Ergo $\dfrac{y^2}{a^2}=ax+a+ax-2\sqrt{a^2x^2+a^2x}$. Ergo $2ax+a-\dfrac{y^2}{a^2}=2\sqrt{a^2x^2+a^2x}$, ambobus quadratis:

$$4\cancel{a^2x^2}+4\cancel{a^2x}-\frac{4y^2x}{a}+a^2-\frac{2y^2}{a}+\frac{y^4}{a^4}=4\cancel{a^2x^2}+4\cancel{a^2x}.$$

Et rejectis nimis parvis, fit: $-\dfrac{4y^2x}{a}+x^2=0$. seu $\dfrac{4y^2}{a}=x$. seu $4y^2=ax$. seu $y=\dfrac{\sqrt{ax}}{2}$. Unde sequitur differentias applicatarum parabolae ad axem esse ipsismet dimidiatis homogeneas quae est memorabilis proprietas; ad tangentes.

Iam quia $y^2=\dfrac{ax}{4}$. huic addatur a^2, fiet: $\sqrt{\dfrac{ax}{4a^2}+\dfrac{a^2}{a^2}}$ latus curvae parabolicae ad axem relatae.

---

9 f. *Späterer Zusatz:* est error

2 quae circulo syntomos *gestr. u. wieder gültig gemacht L* 6 f. comparationem. | Ergo summa ista ax *gestr.* | $\mp$ x $\mp$ $\dfrac{\mathrm{x}^2}{2}$ *L* 8 f. $\sqrt{}$na. *(1)* Ergo c u r v a p a r a b. *(a)* aequaliter divisa per *(b)* per *(2)* An *L*

---

2 ergo: Die folgende Radizierung ist unzulässig; dies wirkt sich bis Z. 8 aus. 14 fit: Anstelle von x^2 müsste es a^2 heißen; Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent bis zum Schluss des Stückes weiter.

Contra $\frac{y^2+2y+1-y^2}{a} = \frac{x}{a}$. Ergo $\frac{2y}{a} = \frac{x}{a}$. seu $2y = x$. Ergo differentiae applicatarum trilinei parabolici sunt triangulo homogeneae. Earum quadratum $\frac{4y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2}$. addatur $\frac{a^2}{a^2} = 1$. fiet $\sqrt{\frac{4y^2+a^2}{a^2}}$ latus eiusdem curvae parabolicae, sed ad basin relatae.

Ponatur ea differentia esse: $1 - \frac{y}{a}$. erit eius $\square = \frac{a^2+y^2-2ya}{a^2}$, vel: $2ya - y^2 - a^2$, addatur a^2, fiet $\frac{\sqrt{2ya-y^2}}{a}$. Ecce ergo applicatam circuli. Confirmatio paulo ante demonstratorum.

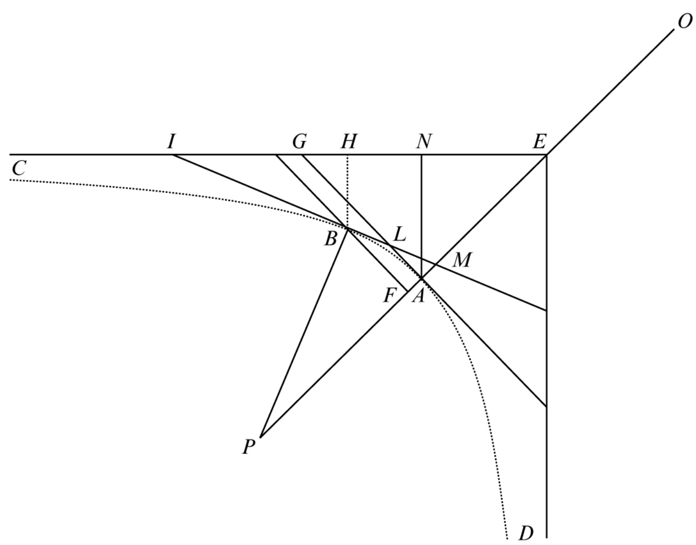
47. DE HYPERBOLAE RESECTA

[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 321–322. 1 Bog. 2°. 4 S. Zahlreiche Korrekturen u. Ergänzungen sowie nachträgliche Bemerkungen am Rande. Leichte Beschädigungen an den Außenrändern, Abschabungen u. Tintenfraß. Dadurch stellenweise geringfügiger, aber größtenteils behebbarer Textverlust.
Cc 2, Nr. 560

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1673 belegt. Bezüge in Notation bzw. Terminologie bestehen zu N. 51_3 (datiert: Ende 1673) und zu *LSB* VII, 3 N. 24 vom Herbst 1673. Inhaltlich setzt das Stück die auf Herbst 1673 zu datierende Kreisquadratur voraus.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

Esto curva hyperbolica ABC. cuius vertex A. centrum E. asymptoti EC. ED. diameter EAF. latus transversum OA. semilatus transversum AE. eique aequale semilatus rectum AG. ordinata ad diametrum FB. ex puncto curvae ordinata ad curvam BH. abscissa ex diametro AF. et ex asymptota HE.

Positaque $H\dot{I} = HE$. erit $\dot{I}B$ tangens quae producatur, dum occurrat diametro coniugatae in L. et ipsi diametro in M. erit resecta AL. et intervallum tangentis a centro in asymptota IE. at intervallum eiusdem a vertice in diametro erit AM. perpendicularis ex vertice in asymptoton AN. PB secans curvam ad angulos rectos.

Iam ut ad calculum accedamus, constat[:]

(1) $IH = HE$.

(2) $GA = EA$. ex hypothesi, ideo $AN = EN$.

(3) $\square BHE = AN^2 = a^2$.

(4) $\square OFA = FB^2$.

(5) $\bigtriangledown MFB :: \bigtriangledown^{\text{lo}} MAL$.

(6) Ergo per 5. resecta $AL = \dfrac{FB \frown AM}{FM} = \dfrac{FB \frown LM}{BM} =$

(per 4.) $\sqrt{OFA,} \frown \dfrac{LM}{BM} = \sqrt{OFA,} \frown \dfrac{AM}{FM}$.

(7) Et quia $OF = OA + AF$. et $OA = 2AE$. et $AE = \sqrt{2AN^2} = \sqrt{2a^2}$.

(8) et posito $FA = x$. et $FB = y$. et $AO = b$.

(9) ideo erit $AO = b = 2\,\sqrt{2a^2} = \sqrt{8a^2}$.

(10) et $FB^2 = y^2 = b + x, \frown x = bx + x^2 = \sqrt{8a^2x^2} + x^2$.

Et $y^2 + \dfrac{b^2}{4} = x^2 + \dfrac{b^2}{4} + bx$. Ergo $\sqrt{y^2 + \dfrac{b^2}{4}} = x + \dfrac{b}{2}$. et $\sqrt{y^2 + \dfrac{b^2}{4}} - \dfrac{b}{2} = x$.

abiectoque $\dfrac{b}{2}$ quod semper idem potest dici: $y^2 + \dfrac{b}{4} = t^2$. si $t = x - \dfrac{b}{2}$.

(11) Posito item $EH = w$. $HB = z$.

(12) erit per 3. $wz = a^2$, et $HB = z = \dfrac{a^2}{w}$.

(13) Est autem $FP = \dfrac{AG \frown FE}{AE}$. per ea quae habet Auzutus apud Schoten. in lib. 2.

6 HE. | ex natura hyperbolae in univ *gestr.* | (2) GA = *L* 17 f. Et ... x $- \dfrac{\text{b}}{2}$. *erg. L*

5–778,8 Im Folgenden versucht Leibniz mehrmals die resecta zu bestimmen, scheitert aber aufgrund von Rechenfehlern und ungeeigneten Substitutionen. Dies gilt auch für das als richtig angesehene Schlussergebnis.

Cartes *Geom.* p. 245. Et quia hoc loco $AG = AE$. erit $FP = \dfrac{AE \frown FE}{AE} = FE$, sive $FP = x + \dfrac{b}{2}$.

(14) Et ob angulos rectos PBM et BFM. erit $FB^2 = FM \frown FP$. ergo $FM = \dfrac{FB^2}{FP} = \dfrac{bx + x^2}{x + \dfrac{b}{2}}$.

(15) Et $AM = \dfrac{bx + x^2}{x + \dfrac{b}{2}} - x = \dfrac{bx + x^2 - x^2 - \dfrac{bx}{2}}{x + \dfrac{b}{2}} = \dfrac{\dfrac{bx}{2}}{x + \dfrac{b}{2}} = \dfrac{bx}{2x + b}$.

(16) Et ideo per 15. iuncta 6. erit AL resecta

$$AL = \underbrace{\sqrt{bx + x^2}}_{FB} \frown AM\ \frac{b\cancel{x}}{2\cancel{x} + \cancel{b}} \smile FM\ \frac{b\cancel{x} + x^{\cancel{2}}}{\cancel{x} + \dfrac{\cancel{b}}{\cancel{2}}}.\ \text{sive } AL = \frac{\sqrt{b^3x + b^2x^2}}{2b + 2x}.\ \text{et}$$

$$AL^2 = \frac{b^3x + b^2x^2}{4b^2 + 4x^2 + 8bx}\ \text{et}\ \frac{4AL^2}{b^2} = \frac{bx + x^2}{b^2 + x^2 + 2bx}.$$

Ponatur $\dfrac{4AL^2}{b} = m$, fiet: $\dfrac{mb^2 + mx^2 + 2mbx}{b} = bx + x^2$,

$$mb^2 + mx^2 + 2mbx = b^2x + x^2b.$$

! ! !

Pro x ponatur $m + f$. habebimus

---

9 *In Höhe der Lesart am Rande:*

	2		2	
5		7		9
	2		2	
$\frac{7}{12}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{11}{20}$

9 f. $\mathrm{bx} + \mathrm{x}^2$, *(1)* fiat $\mathrm{f} = \mathrm{b} + \mathrm{x}$, habebimus: $\dfrac{\mathrm{mbf} + 2\mathrm{mbx}}{\mathrm{b}} = \mathrm{fx}$. *(a)* et pro $\mathrm{f} + \mathrm{x}$ sumto g. habebimus *(b)* et pro $\mathrm{f} + \mathrm{x}$ sumto g. fiet *(c)* seu $\dfrac{\mathrm{mb} + 2\mathrm{mb}}{}$ *(d)* $\mathrm{mbf} + \mathrm{mfx}$ ⟨autem⟩ $= \mathrm{bx} + \mathrm{x}^2$ *(2)* Ponamus $\mathrm{f} = \mathrm{b} + \mathrm{x}$. habebimus: $\dfrac{\mathrm{mb}^2 + \mathrm{mx}^2 + 2\mathrm{mbx}}{\mathrm{b}} = \mathrm{fx}$ *(3)* mb^2 *L*

$$\cancel{mb^2} + mx^2 + \cancel{2}mbx = \cancel{b^2m} + f^2m \quad \lrcorner + x^2b = x\cancel{mb} + fxb.$$

$$\begin{array}{ccccc} /\backslash & & /\backslash\ /\backslash & & /\backslash \\ x-f & & x-m\ \ x-f & & m+f \\ x^3 - x^2f & & & & \end{array}$$

Potius pro $x = f - 2b$[:]

$$\left.\frac{mb^2}{x}\right| + mx + \cancel{2mb} = \cancel{b^2} + xb. \qquad \left.\frac{mb^2}{x}\right| + mf = bf - b^2.$$

$$\begin{array}{ccc} /\backslash & & /\backslash \\ f - 2b & & bf - \cancel{2}b^2 \\ mf - \cancel{2mb} & & \end{array}$$

Pro $bf - b^2$, ponatur cf. scilicet c posita constante fiet $\dfrac{mb^2}{x} + mf = cf$. sive $mb^2 + mfx = cfx$, vel $mb^2 = cfx - mfx$. Ponendoque $fx = g^2$, fiet $mb^2 = cg^2 - mg^2$. sive denique $c - m$ posita h, fiet: $mb^2 = hg^2$, et $hg^2 = y^3$, ut nunc literis Cartesianis enuntiemus, [*bricht ab*]

Alia methodo tentemus idem, ut appareat veritas:

$$\left.\frac{mb^2}{x}\right| + mx + 2mb = \underbrace{b^2 + xb}_{ib}. \qquad \text{posito } i = b + x.$$

$$\left.\frac{mb^2}{x}\right| + mx = \underbrace{ib - 2mb}_{lb}. \qquad \text{posito } l = \underbrace{i - 2m}_{b + x - 2m}.$$

---

10 Error[:] c ita non est constans, potius $b - f = g$. fiet $= gb$.*(!)* fiet: $mb^2 + mfx = gbx$.

5 f. $x = f - 2b$[:] *(1)* $\left.\dfrac{mb^2}{x}\right| + mx \quad + \cancel{2mb} = \cancel{b^2} + xb. \qquad \dfrac{mb^2}{x} = 0 - b^2$. seu $b^2 + \dfrac{mb^2}{x} = 0$.

$$\begin{array}{ccc} /\backslash & & /\backslash \\ f - 2b & & \cancel{mf} - \cancel{2}b^2 \\ \cancel{mf} - \cancel{2mb} & & \end{array}$$

sive [*bricht ab*] ergo error in calculo, nam x sumi f − 2b nil prohibet et tamen sequitur absurdum. *(2)* $\dfrac{mb^2}{x}$ *L* 12–14 enuntiemus, | fiet: $xa^2 - y^3$ *gestr.* | Alia *L*

Iamque habebimus $mb^2 + mx^2 = lbx$. Ponamus $b^2 + x^2 = n^2$. fiet $mn^2 = \underset{\substack{\wedge \\ b+x-2m}}{l}bx$, fiet

$mn^2 = b^2x + bx^2 - 2mbx$.

$b^2x + x^2b - 2mbx = mn^2 = \cancel{p^3}$. $\quad n^2 = b^2 + x^2$.

$n^2x + n^2b - 2mbx = mn^2$. $\quad x + b = i$.

$n^2i - 2mbx = mn^2$. seu $n^2i - mn^2 = 2mbx$. $i - m = q$. fiet $qn^2 = 2mbx$. $y^2 = 2x^2a$.

$$\frac{mb^2}{x}\Big| + m\underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{f-2b} \\ mf-\cancel{2mb}}}{x} + \cancel{2mb} = \cancel{b^2} + \underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{f-2b} \\ bf-\cancel{2}b^2}}{x}b. \qquad x = f - 2b.$$

$$\frac{mb^2}{x} + mf = bf - b^2. \qquad \text{sive}$$

$$\frac{mb^2}{x} = bf - mf - b^2. \qquad \text{Et posito } n = b - m, \text{ fiet}$$

$$\frac{mb^2}{x} = nf - b^2. \qquad \text{vel}$$

$$m\underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{b-n} \\ b^3-\cancel{b^2n}}}{b^2} = nf\underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{x+2b} \\ n\underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{g^2-b^2} \\ ng^2-\cancel{nb^2}}}{x^2}+2nxb}}{x} - b^2x.$$

$b^3 - b^2n = nx^2 + 2nxb$. $b^3 - bbn - 2xbn = nx^2$. posito $b + 2x = h$, fiet $b^3 - hbn = nx^2$.

1 *(1)* Iam $\frac{\mathrm{mb}}{\mathrm{x}}$ posito n. erit $\frac{\mathrm{mb}^2}{\mathrm{x}} = \mathrm{nb}$. fietque $\mathrm{mx} = \mathrm{lb} - \mathrm{nb}$. *(2)* Iamque *L* 19 nx^2. *(1)* Iam $\frac{\mathrm{b}^3}{\mathrm{n}} - \mathrm{b}^2 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{xb} = 0$. *(2)* posito *L*

Resecta $AL = \dfrac{FB \frown AM}{FM}$. $FB = \sqrt{bx+x^2}$. $AM = \dfrac{bx}{2x+b}$. $FM = \dfrac{bx+x^2}{x+\dfrac{b}{2}}$.

$$\frac{AM}{FM} = \frac{b\cancel{x}}{2x+b} \times \frac{b\cancel{x}+x^{\cancel{2}}}{\dfrac{b}{2}+x} = \frac{2b}{2x+b} \times \frac{b+x}{b+2x} = \frac{2b}{b+2x}.$$

Ergo $AL = \sqrt{bx+x^2} \frown \dfrac{2b}{2x+b}$. et ordinata ducta in $\dfrac{2b^2}{2x+b}$, seu $\sqrt{bx+x^2}, \frown \dfrac{2b^2}{2x+b}$ seu ordinatae hyp. ad diam. in ordinatas alterius hyp. ad asympt. dabit cylindrum resectae. Ergo

$$AL^2 = bx + x^2 \frown \frac{4b^2}{4x^2+b^2+4xb} = m^2.$$

Ergo fiet aequatio figurae haec:

$$4m^2x^2 + m^2b^2 + 4m^2xb = 4b^3x + 4b^2x^2.$$

Invenimus ut dixi aequationem resectarum hyperbolae ex diametro coniugata esse hanc: posita abscissa hyperbolae x. latere recto b. resecta autem posita m.

$$4m^2x^2 + m^2b^2 + 4m^2xb = 4b^2x^2 + 4b^3x.$$

$$xb + x^2$$

$$m^2b^2 + \llcorner \underbrace{x^2+xb}_{[z^2]} \lrcorner \frown 4m^2 = \llcorner \underbrace{x^2+xb}_{[z^2]} \lrcorner \frown 4b^2 \lrcorner$$

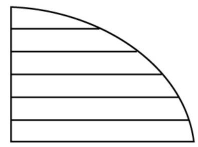
---

11 *Ergänzung:* $x = f - \dfrac{b}{2}$. Ergo $f^2 + \dfrac{b^2}{4} - fb = x^2$. et $xb = bf - \dfrac{b^2}{2}$. Ergo $x^2 + xb = f^2 - \dfrac{b^2}{2}$. fiet $\cancel{m^2b^2} + 4m^2f^2 - \dfrac{\cancel{4}m^2b^2}{\cancel{2}} = 4b^2f^2 - 2b^4$.

1–8 Resecta AL … $4b^3x+4b^2x^2$. *erg. L* 11 f. $4b^3x$. | $b+x = r, xr$ *bricht ab, streicht Hrsg.* | xb *L* 13 z^2 *gestr., erg. Hrsg.* 13–779,1 $4b^2\lrcorner$ *(1)* fiet: $m^2b^2 + 4m^2z^2 = 4b^2z^2$. Et ponendo $4z^2 + b^2 = w^2$, *(2)* si *(a)* $b + x =$ *(b)* sit $m^2 = -\dfrac{b^2}{4} - xb + t^2$. ergo $4m^2x^2$ erit $m^2b^2 + 4m^2xb + t^2$. et habebimus: $m^2t^2 = 4b^2x^2 + 4b^3x$. vel $\dfrac{m^2t^2}{b^2} = 4x^2 + 4bx$. *(aa)* vel $m^2 =$ *(bb)* vel fiat *(3)* eritque *L*

9–779,8 Mit Invenimus beginnt Bl. 321 v°. Leibniz überträgt das Ergebnis von Bl. 321 r° hierher und rechnet damit konsequent weiter. Jedoch ist in der Ergänzung ein neuer Fehler enthalten.

eritque $\quad m^2 = \dfrac{4b^2z^2}{b^2+4z^2}$. et $z^2 = \dfrac{m^2b^2}{4b^2-4m^2}$.



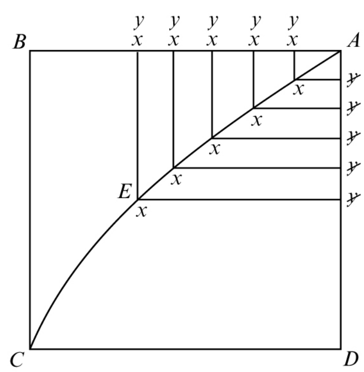
[*Fig. 2*]

Et si tam omnium m^2, quam omnium z^2 centrum gravitatis haberi potest, habebitur momentum eius figurae ab utroque latere.

Vera haec, sed mutant locum.

At si ex $a^3 = a^2x + y^2x$, ponendo $a^2 + y^2 = z^2$, facias $a^3 = z^2x$, fient applicatae x aequales cubo parametri, non per abscissae $[y^2]$ quadratum diviso, sed diviso per quadratum abscissae alio quadrato auctum.

[*Teil 2*]



[*Fig. 3*]

1 $\quad b^2 + 4z^2 \frown m^2 = 4b^2z^2. \quad m^2 + \dfrac{4m^2z^2}{b^2} = 4z^2.$

3 f. habebitur *(1)* centrum gravitatis figurae *(2)* momentum *L* 7 x^2 *L ändert Hrsg.* 7 f. diviso per *(1)* cuiusdam radicis ex *(2)* quadratum abscissae *L*

10 [*Fig. 3*]: Der Figur liegt paradigmatisch für ein allgemeines Kurvenstück ein Parabelbogen mit je x und y als unabhängiger Variablen zugrunde. Das Gleiche gilt für die Fig. der Ergänzung auf S. 782.

Aequatio figurae sit $y^2a = y^2x + a^2x$.

Ergo $y^2a - y^2x = a^2x$. Ergo $y^2 = \dfrac{a^2x}{a-x}$. Ergo $\dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{x}{a-x}$.

Iam $\dfrac{x}{a-x} = 1 - \dfrac{a}{a-x}$, quibus ductis in a, fiet $a - \dfrac{a^2}{a-x} = \dfrac{y^2}{a}$, et rursus ductis omnibus in a, fiet $a^2 - \dfrac{a^3}{a-x} = y^2$.

Ergo ad summam omnium y^2 habendam opus est cylindro hyperbolae, nam $\dfrac{a^2}{a-x}$ vel saltem $\dfrac{\gamma \frown a^2}{a-x}$ applicata hyperbolae est. Ergo momentum figurae $AECD$ ex axe AD pendet ex quadratura hyperbolae.

At ductis omnibus x in y. habetur momentum omnium x ex eodem axe AD, seu momentum figurae $AECB$ ex axe AD. complementi figurae $AECD$. Ergo summa rectangulorum yx etiam ex quadratura hyperbolae habetur.

Iam cum sit $x = \dfrac{y^2a}{y^2+a^2}$. erit $xy = \dfrac{y^3a}{y^2+a^2}$. Ergo si qua sit figura huius aequationis: $\dfrac{y^3}{y^2+a^2} = x$, vel $y^3 = y^2x + a^2x$. ea pendet ex quadratura hyperbolae, cum haec nostra initio posita: $\dfrac{y^2a}{a^2+y^2} = x$, vel haec $\dfrac{a^3}{a^2+y^2}$, pendeat ex quadratura circuli.

Sed ut ad primam aequationem $y^2a = y^2x + a^2x$. redeamus[:] His ita positis ducto

---

11–13 *Daneben großes* NB.

14 $+y^2x = a^3$. fiat $a = b - y$. erit $a^2 = b^2 + y^2 - 2by$. et $a^2x = b^2x + y^2x - 2byx$. fiet: $b^2x + y^2x - 2byx + y^2x = a^3$. sive $b^2x + 2y^2x - 2byx = a^3$.

---

1 Aequatio: Im Folgenden bezeichnet Leibniz den Parameter der betreffenden Kurve mit a. Gleichzeitig dient a als Dimensionsgröße, um von Fall zu Fall Dimensionsgleichheit herzustellen. Die Variablen x und y werden ohne nähere Unterscheidung gleichberechtigt behandelt; außerdem werden sie bei Neuansätzen und Zerlegungen unverändert weiter verwendet. 3 Iam: Auf der rechten Seite sollten die Vorzeichen umgekehrt sein. Das Versehen hat keine Auswirkungen auf die folgende Quadraturaussage. 13 pendeat: N. 42_1 S. 740 Z. 15–21 .

y in $a - x$, fiet $ay - yx$. Et quia $y = \sqrt{\dfrac{a^2x}{a-x}}$. hoc ducto in $a - x$, vel in $\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax}$ fiet $ay - yx = \sqrt{\dfrac{a^2x \frown \llcorner a - x \lrcorner \frown a - x}{a-x}}$. sive $ay - yx = \sqrt{a^3x - a^2x^2}$. Quorum summa erit momentum figurae $AECD$ ex basi CD. pendetque ex summa omnium x^2. ut mox dicam. Interim figura huic rectangulorum progressioni homogenea, est $\dfrac{\sqrt{a^3x - a^2x^2}}{a} = y$. sive eius aequatio: $\sqrt{a^3x - a^2x^2} = ya$. et $a^3x - a^2x^2 = y^2a^2$. sive $ax - x^2 = y^2$. Unde patet ipsum circulum seu sinuum aream esse figuram homogeneam momento huius figurae $AECD$ ex basi CD.

Sed ut ad primam aequationem $y^2a = y^2x + a^2x$ initio propositam, redeamus[:] Cum hoc modo sit $\dfrac{y^2a}{y^2 + a^2} = x$. erit $\dfrac{y^4a^2}{y^4 + a^4 + 2y^2a^2} = x^2$. Quae proinde semiquadratorum ab x summa, a cylindro rectanguli AC ablata, relinquit momentum figurae $AECD$, ex basi summae sinuum homogeneum.

Caeterum ut his x figuram quaeramus homogeneam ponendum est: $\dfrac{y^4a}{y^4 + a^4 + 2y^2a^2} = x$. $\left(= 1 - \dfrac{a^4 + 2ya^3}{y^4 + a^4 + 2y^2a^2}.\right)$ $y^4a = y^4x + a^4x + 2y^2a^2x$.

Sed si ponatur $\dfrac{a^5 + 2y^2a^3}{y^4 + a^4 + 2y^2a^2}$ aequatio separari potest in duas ob binomium numeratorem, quae omnia pendent ex tetrag. circ. et fiet primum $\odot$ $\dfrac{a^5}{y^4 + a^4 + 2y^2a^2} = x$. Ergo

---

a^2x. si $a - x = f$. fiet $y^2x = a^2f$. fiet: $y^2a - y^2f = a^2f$. Ergo $y^2 = \dfrac{a^2f}{a-f}$.

$/\backslash$

$a - f$

5–7 Unde reperta iam alia methodo exhibendi figuram rationalem homogeneam circulo poterimus priorem per resectas dissimulare; modo ex praesente idem demonstremus.

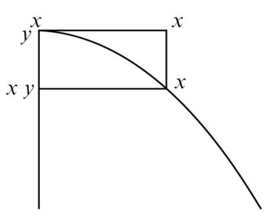
6 seu sinuum aream *erg.* *L* 9 proinde *(1)* quadratorum *(2)* semiquadratorum *L* 15 quae … circ. *erg.* *L*

$$\frac{a^4}{y^4+a^4+2y^2a^2} = \frac{x}{a}.\ \text{et}\ \frac{a^2}{y^2+a^2} = \sqrt{\frac{x}{a}},\ \text{et}\ \frac{a^3}{y^2+a^2} = \sqrt{xa}.$$

Cum prima aequatio fuerit $\dfrac{y^2a}{y^2+a^2} = x$, fiat $\dfrac{ya^2}{y^2+a^2} = \dfrac{xa}{y}$. Excogitanda est alia, cuius momentum seu y in x. sit huic aequationi homogeneum. Si ergo aequatio ea sit: $\dfrac{ya^2}{y^2+a^2} = x$, momentum omnium ex vertice, seu xy erit $\dfrac{y^2a^2}{y^2+a^2} = xy$, homogenea aequatio huic $\dfrac{y^2a}{y^2+a^2} = x$.

Ergo figurae huius momentum ex vertice $\dfrac{ya^2}{y^2+a^2} = x$. necesse est ex q u a d r a t u r a c i r c u l i dependere, nam homogenea eius ex ea dependet; et vicissim hac figura quadrata circuli quadratura habebitur: fiet ergo $ya^2 = y^2x + a^2x$.

2–5 *Hierzu späterer Zusatz:*



$x \sqcap \dfrac{ya}{y^2+a^2}$. $xy \sqcap \dfrac{y^2a}{y^2+a^2}$. $y^2+a^2 \sqcap \dfrac{ya}{x}$.

Unde $y^2 - \dfrac{a^2}{x}y + \dfrac{a^4}{[4]x^2} \sqcap \dfrac{a^4}{[4]x^2} - a^2$.

unde $y - \dfrac{a^2}{[2]x} \sqcap \sqrt{\dfrac{a^4}{[4]x^2} - a^2}$. ductisque omnibus in x.

6 f. *Darüber:* Error

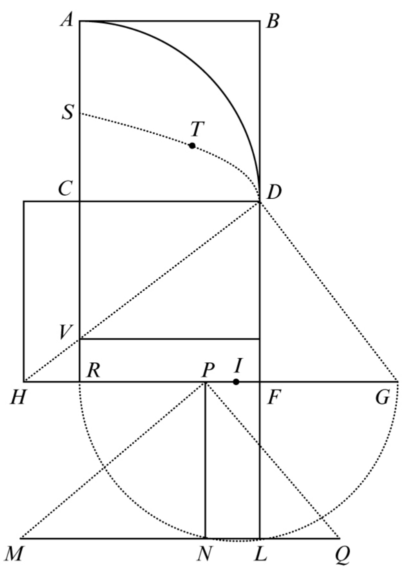
1 f. $\sqrt{\text{xa}}$. | Ergo posita figura quadam aequationis huius ☉. chordarum eius a summo ad exitum baseos seu curvam ductarum summa, pendet a quadratura circuli, seu figura resectarum circuli. Mensura autem eiusmodi chordarum est utilis ad trochoeides curvae revolutione genitas mensurandas. Ita figurae resectarum circuli chordae sunt $\text{x}^2 + \text{a}^2$ *gestr.* | *(1)* Quod si ab initio data sit haec aequatio: $\dfrac{\text{y}^2}{\text{a}} = \dfrac{\text{a}^2\text{x}}{\text{a}-\text{x}}$. *(2)* Cum *L* 11 f. 2 *bzw.* 4 *erg. Hrsg.*

2–785,6 Die in diesen Abschnitten enthaltenen Überlegungen sind nicht immer exakt genug durchgeführt, insbesondere beachtet Leibniz die gegenseitige Abhängigkeit von analytischer Rechnung und geometrischer Darstellung nur ungenau.

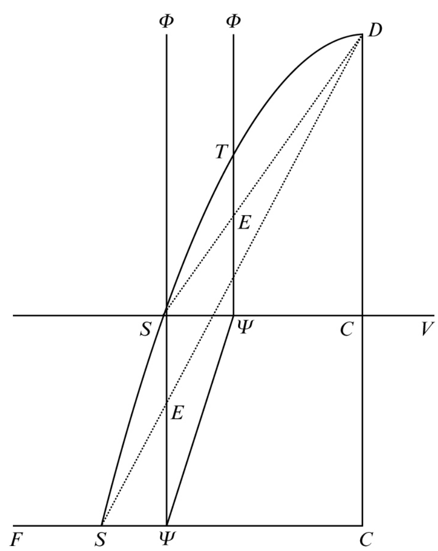
At datur omnium yx, seu omnium x momenti ex vertice summa datis omnibus x^2. Est autem $\dfrac{ya^2}{y^2+a^2} = x$. Ergo $\dfrac{y^2a^6}{y^4+a^4+2y^2a^2} = x^2$. Quorum si summa posset haberi, rursus tetragonismus haberetur.

Figura illis homogenea est $\dfrac{y^2a^5}{y^4+a^4+2y^2a^2} = x = 1 - \dfrac{2y^4a^3+2a^7}{y^4+a^4+2y^2a^2}$. quae omnia a circuli quadratura pendent.

Paulo ante: $\dfrac{ya^2}{y^2+a^2} = x$. Ergo $\dfrac{y}{y^2+a^2} = \dfrac{x}{a^2}$. Ergo et invertendo $\dfrac{y^2+a^2}{y} = \dfrac{a^2}{x}$. et $y + \dfrac{a^2}{y} = \dfrac{a^2}{x}$. Et $y = \dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2}{y}$. et $y^2 = \dfrac{a^2y}{x} - a^2$. huic figurae homogenea est $\dfrac{y^2}{a} = \dfrac{ay}{x} - \dfrac{a^2}{a}$. fiet $\dfrac{y^2x}{a} = ay - ax$, vel $\dfrac{y^2}{a} + a = \dfrac{ay}{x}$. Et si $\dfrac{ay}{x} = z$. erit $\dfrac{y^2}{a} + a = z$.



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

4 f. *Dazu interlinear:* error

6 $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}$ $|= \mathrm{y} + \mathrm{a} + \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}$. *streicht Hrsg.* | et *L*

Sit curva eius naturae, ut posita $AC = x$. et $CD = y$. ipsius y quadratum per $a = FG$. latus rectum divisum, sive rectangulum HD. latus $HF = \frac{y^2}{a}$. posito HDG angulo recto, seu $FD^2 = HFG$. aequetur $\frac{ay}{x} - a$. Ut ergo habeatur $\frac{ay}{x}$ primum habenda est media proportionalis inter a et y. Posito scilicet $FG = a$. et ei addito FR fiet RG; et sumto eius medio I, si circulus IRG describatur, erit FL media proportionalis eiusque $\square = FL^2 = ay$. Quod quadratum FL^2 ut dividatur per x. ducatur $LM =$ et parallela FH. et abscindatur $MN = AC = x$. et si ⟨in⟩ N perpendiculariter erigatur NP. ductaque MP et perpendiculari ad MP, versus rectam ML. nempe PQ. [debet recta LQ esse $= FG = a$. $NQ - LQ$ aequalis esse ipsi FH.] et NQ erit $\frac{ay}{x} = z$. et aequatio fiet: $\frac{y^2}{a} + a = z$. vel $\frac{y^2}{a} = z - a$. Et $z - a = NL$. posito w fiet $y^2 = wa$. Ergo $z - a = NL = w$. posito $=$ CS. seu applicato ad C. eodem ubique fieri intellecto, curva STD erit parabolica, cuius si altitudo CD et ordinata CS. latus rectum sit LQ.

Quodsi parabolae $CSTD$ addatur rectangulum DCV. posita $CV = LQ = a$. erit $VCS = NQ = \frac{ay}{x}$. et patet locum omnium $\frac{ay}{\langle x \rangle}$ esse parabolicum.

Quodsi locus omnium $\frac{ay}{x}$ sit curva parabolica, et omnium y recta, qualis erit locus omnium x ⟨ad⟩ $z = \langle \frac{ay}{x} \rangle$? Erit $x = \frac{ay}{z}$, id est invenienda est quae sit ad a. ut y est ad x, qualis in ⟨fig. 2.⟩ est $E\Psi$. Et ut talis figura describatur, imaginanda constans para-

8 f. nempe PQ. | debet recta ... ipsi FH. *gestr., erg. Hrsg.* | *(1)* Porro cum NQ $= \frac{ay}{x} = z$. si omnes NQ. applicentur ⟨ad⟩ CD. locus erit *(a)* triangulum. *(b)* ob aequationem parabola. Nam *(aa)* si ab $\frac{y^2}{a} + a = z$ abiciatur a. recta quod ⟨non mutat⟩ locum, fiet *(bb)* fiat $\frac{y^2}{a} = z - a$. et $z - a = w$, fiet $\frac{y^2}{a} = w$. et $y^2 = wa$. Ergo locus omnium NQ ad CD, in C. applicatarum erit parabola. *(2)* Porro cum $z = \frac{y^2}{a} + a = HG$. si omnes HG applicentur ad CD. ut posito CS $=$ HG. locus seu curva DTS erit parabola. Nam fiat $\frac{y^2}{a} = z - a$. et $z - a = w = NL$, fiet $\frac{y^2}{a} = w$. et $y^2 = wa$. Ergo locus omnium NL $=$ FH. ad CD, in C. applicatarum erit parabola. *(3)* Iam quia z $=$ *(4)* et NQ *L* 11 f. cuius ... sit LQ. *erg. L*

bola, eiusque extremis S. semper chorda tensa applicanda quae quanto magis descendis producatur. Sitque CSF mobilis indefinita ad angulos invariabiles in CD. quae manu descendente in chorda deprimitur. Sit et alia indefinita $\Psi\Phi$ in ea fixa ipsi CD immobili parallela cuius cum chorda SD intersectiones describent curvam quaesitam. Et haec methodus reducendi loca utilis est ad faciles curvarum in plano descriptiones, suppositis scilicet aliis inferioris gradus iam descriptis.

Imo NB. fig. 2. ista nonnihil corrigenda, deberet enim Ψ semper cadere in SC. Nota interim obiter tractari debere etiam de locis linearum non ad rectas, sed curvas ordinatim, id est parallele inter se, applicatarum. Omnia Ψ puto cadent in lineam rectam, ideo si angulus SCD fieret obliquus, angulus $S\Psi\Psi$ posset fieri rectus.

[*Teil 3*]

Invenimus aequationem resectae hyperbolicae hanc:

$$4m^2x^2 + m^2b^2 + 4m^2xb = 4b^3x + 4b^2x^2.$$

seu $$m^2b^2 + \underbrace{x^2 + xb, \frown 4m^2} = \underbrace{x^2 + xb, \frown 4b^2}.$$

Positoque $x = f - \dfrac{b}{2}$. fiet $x^2 = f^2 + \dfrac{b^2}{4} - fb$. et $xb = bf - \dfrac{b^2}{2}$. Ergo $x^2 + xb = f^2 + \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{b^2}{2} + bf - bf$. seu $x^2 + xb = f^2 - \dfrac{b^2}{4}$.

Ergo $$\cancel{m^2b^2} + 4m^2f^2 - \cancel{b^2m^2} = 4b^2f^2 - b^4.$$

Ergo aequatio figurae rescissae hyperbolae est

$$4m^2f^2 = 4b^2f^2 - b^4. \quad \text{sive} \quad 4x^2y^2 = 4a^2y^2 - a^4.$$

Quam ultra reduci posse non puto, nisi mutata linea recta ad quam referantur.

---

12 *Darüber:* NB. ⟨Multi⟩plicari potest fractio aliqua per quadratum, si simul numerator multiplicetur, et nominator dividatur per radicem.

2 angulos *(1)* rectos *(2)* invariabiles *L* 3 ea *(1)* ad angulos rectos *(2)* fixa *L* 7 fig. 2. *erg.* *L* 20 recta *erg.* *L*

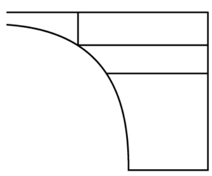
---

12 Invenimus: Hiermit beginnt Bl. 322 v°. Leibniz nimmt das (unrichtige) Ergebnis der Gegenseite (s. o. S. 778 Z. 8) wieder auf.

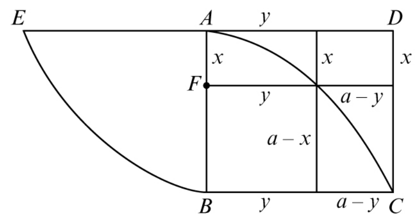
Ergo $4x^2y^2 + a^4 = 4a^2y^2$. Ergo $a^4 = 4a^2y^2 - 4x^2y^2$. Ergo

$$\frac{a^4}{4a^2 - 4x^2} = y^2. \ \text{ et } \ x^2 = \frac{4a^2y^2 - a^4}{4y^2}.$$

Porro $\sqrt{4x^2y^2} = 2xy = \sqrt{\llcorner 4a^2y^2 - a^4 \lrcorner}$. sive $\dfrac{2xy}{a} = \sqrt{4y^2 - a^2}$. et $\dfrac{2x}{a} = \sqrt{\dfrac{4y^2 - a^2}{y^2}} = \sqrt{4 - \dfrac{a^2}{y^2}}$, sive $\dfrac{4x^2}{a^2} = 4 - \dfrac{a^2}{y^2}$. $\dfrac{4x^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{y^2} = 4$. Ergo $\dfrac{4x^2y^2 + a^4}{a^2y^2} = 4$.



[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

Sed ut redeam ad priora[:] dixi esse $\dfrac{2xy}{a}\ \sqrt{4y^2 - a^2}$.

Unde apparet summae omnium xy homogeneam esse lineam hyperbolicam, in qua $x = \sqrt{y^2 - a^2}$. sive $x^2 = y^2 - a^2$.

Quadrata omnium x^2 aequantur a^2 [$-$] $\dfrac{a^4}{4y^2}$. ideo in summam redigi possunt quia $\dfrac{a^3}{y^2}$ est quantitas applicatae hyperboloeidis cubicae, cuius datur quadratura. Ergo et momenti complementi $ADCA$ ex AD.

Quadrata omnium $y^2 = \dfrac{a^4}{4a^2 - 4x^2}$ = momento fig. $ABCA$ ex AB.

Omnia x ducta in suas y abscissas $= \dfrac{\sqrt{4y^2 - a^2}, \frown a}{2}$ seu momentum complementi ex AB. Quod cum detur ex data hyperbolae quadratura, etiam omnia y^2. momentum figurae ipsius ex AB, dabitur.

Datur autem et area figurae totius ex quadratura hyperbolae, cuius segmento aequatur.

9 + *L ändert Hrsg.*

5 [*Fig. 7*]: Leibniz hat die Figur zunächst allgemein gezeichnet, die speziellen Maßbestimmungen sind erst später hinzugekommen.

Positis iam $AB = BC = a$. quaeramus iam quadrata et momenta ipsarum $a - x$ et $a - y$.
Quadrata autem omnium $a-x$ sunt a^2+x^2-2ax. opus ergo tam a^2 cognito, tam omnibus x^2 cognitis, tam quadratura figurae, ad quadrata omnium $a - x$. seu momentum figurae $ABCA$ ex BC.
Quadrata vero omnium: $a-y$ sunt a^2+y^2-2ay. opus est ad hoc momentum complementi ex CD cognoscendum tantum quadratura figurae.
Tandem multiplicentur $a - y \frown a - x$. fiet: $a^2 - ax - ay + yx$. Et quia yx non nisi alio y iam praecognito explicari potest, ideo assumta y vel $a - y$ pro cognita, summa omnium ay erit $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ et summa omnium ax erit complementi figurae cylinder. Cumque summa omnium yx pendeat ex quadratura hyperbolae, ideo momentum quoque omnium $a - x$ ex CD. seu figurae $ABCA$ ex CD. ex quadratura hyperbolae pendebit.

Illud interea sufficit nobis didicisse figuram cuius applicata sit $\dfrac{a^3}{a^2 - x^2}$ pendere ex quadratura hyperbolae.
At vero $\dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ pendere ex quadratura circuli alibi ostensum est.

Subtrahatur alterum ab altero, fiet $\dfrac{a^5 - a^3x^2 + a^5 + a^3x^2}{a^4 + x^4} = \dfrac{2a^5}{a^4 + x^4}$. Sed sciendum est istud x in uno crescere, in altero decrescere, positoque incrementa unius esse

---

9 f. *Daneben großes* NB.

16 *Zu* fiet *am Rande:* Si $-\dfrac{a^3}{a^2 + x^2} + \dfrac{a^3}{a^2 - x^2}$, fiet: $\dfrac{a^5 + a^3x^2 - a^5 + a^3x^2}{a^4 - x^4} = \dfrac{2a^3x^2}{a^4 - x^4} = y$.

19 Si *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2 - \mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^3} = \dfrac{1}{\mathrm{y}} = \dfrac{2\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^3}$. ergo $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{a}^3}{2\mathrm{x}^2}$. *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2} - \dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2}$, fiet: $\dfrac{\mathrm{a}^5 - \mathrm{x}^2\mathrm{a}^3 - \mathrm{a}^5 - \mathrm{x}^2\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^4 + \mathrm{x}^4} =$ *(3)* $-\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2}$ *L*

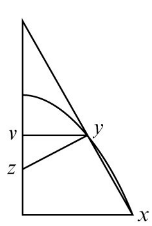
---

15 alibi: s. o. Erl. zu S. 780 Z. 13. 16 Subtrahatur: Die folgende Betrachtung ist verfehlt. Leibniz bemerkt dies in S. 788 Z. 7 selbst. Zunächst glaubt er, eine Verbesserung des Nenners in Z. 16 (er ändert dort zweimal $a^4 + x^4$ in $a^4 - x^4$) würde genügen, erkennt dann, dass dies nicht ausreicht, und berechnet die gesuchte Differenz in der Anmerkung zu Z. 16 neu.

aequalia decrementis alterius, erit terminus ex eiusmodi contrariis x conflatus semper idem. Subtractio autem duorum terminorum x contrarium habentium non est facienda simpliciter, sed notandum aliquid relinqui quod et determinari potest. Hinc cum circulus sit: $ax - x^2 = y^2$. et hyperbola $ax + x^2$. hactenus utrobique crescit: Imo NB. utile est consulto, inversas iungere figuras, praesertim ubi x dividit, ita enim divisor fiet perpetuo constans. Ita posito in $\frac{a^5 - a^3x + a^5 + a^3x}{a^4 + x^4}$ aliud ex x augeri aliud minui continue eadem quantitate, erit x^4 semper eadem. Imo male et falso.

$6 \frown 0$	$10 \frown 0$	0		
			9	
$5 \frown 1 = 5$	$9 \frown 1$	9		2
			7	
$4 \frown 2 = 8$	$8 \frown 2$	16		2
			5	
$3 \frown 3 = 6$ *(!)*	$7 \frown 3$	21		
			3	
	$6 \frown 4$	24		
			9	
	$5 \frown 5$	15 *(!)*		
			9	
	$4 \frown 6$	24		
			3	
	$3 \frown 7$	21		

2 f.



$$\frac{\bullet}{y} = \frac{y - \underset{..}{y}}{z}$$

ut in hyp.

$$\frac{x}{a^2} = \frac{\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{x+1}}{\xi}.$$

---

23 Die Figur ist durch Tintenfraß geschädigt, es konnten daher nicht alle Punktbezeichnungen ermittelt werden.

Nam ut ex schemate patet, reapse crescet decrescetque productum ex duobus uniformiter sed contrarie variantibus, sed ita, ut differentiae eorum uniformiter crescant fiantque numeri quasi triangulares.

Haec iam observatio usum habere potest ingentem. Ponatur ut in figura, eadem figura sibi inverso apponi, patet summam esse figurae duplum, et inde aliquando lux ad novas series inveniendas haberi potest.

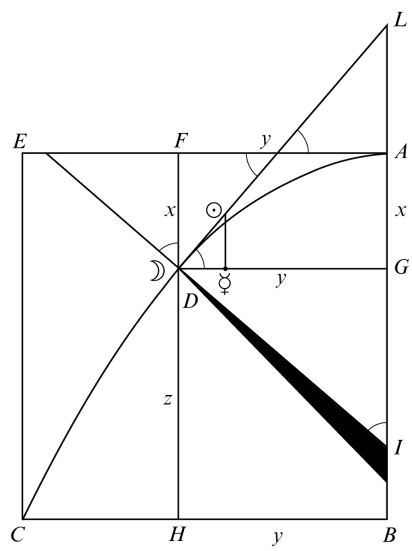
Fiat enim $\frac{a^2}{x}$ applicata figurae, sumta x ex altitudine, erit $\frac{a^2}{a-x}$ altitudo figurae, sumta x ex basi. Addantur $\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{a-x}$ fit $\frac{a^3 \; [-] \; a^2x + a^2x}{ax - x^2} = y$. posito scilicet x in priori sumi pro AF, in posteriori pro FB. ita enim x ubi puncto notatum est decrescit et in x^2 crescit pariter et decrescit.

8 + *L ändert Hrsg.*

48. DE CALCULO REDUCTARUM NECNON MOMENTORUM [Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 159–160. 1 Bog. 2°. 3 S. — Auf Bl. 160 v° Notizen in Zusammenhang mit dem Gespräch Leibniz u. Ozanam, LH 35 XII 2 Bl. 162 v° (vgl. dazu N. 42_2).
Cc 2, Nr. 561 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück nimmt mehrfach direkten Bezug auf N. 47, dürfte also kurz danach entstanden sein.



[*Fig. 1*]

Esto figura $ABCDA$, cuius complementum ad rectangulum AC, sit $AECDA$. et aliqua complementi applicata FD, abscissa AF. posita $AF = y$. et $FD = x$. Esto ea natura figurae, ut sit $y^2a = y^2x + a^2x$. Et $x = \dfrac{y^2a}{a^2+y^2}$. at $y^2 = \dfrac{a^2x}{a-x}$.

---

10 Esto figura: Leibniz legt der Figur einen allgemeinen Kurvenbogen zugrunde.

Summa omnium x. seu area figurae pendet ex quadratura circuli, et summa omnium y^2, vel GD^2, seu momentum figurae $ABCDA$ ex AB duplicatum pendet ex quadratura hyperbolae, ut alibi ostendi.

Idem $x = a - \dfrac{a^3}{a^2+y^2}$, vel $a - x = \dfrac{a^3}{a^2+y^2}$. Atque ita ordinatae HD, si appellentur nunc z. et BH maneant y, erit $z = \dfrac{a^3}{a^2+y^2}$. Summa omnium x^2, pendet ex quadratura circuli, ut alibi ostendi.

Posita β infinitesima, subtrahantur a se invicem duo y^2 proxima.

$$\frac{a^2x+a^2\beta}{a-x-\beta} - \frac{a^2x}{a-x} \text{ fiet } \frac{\cancel{a^3x}+a^3\beta-\cancel{a^2x^2}-\cancel{a^2\beta x}-\cancel{a^3x}+\cancel{a^2x^2}+\cancel{a^2x\beta}}{\underset{-2xa}{a^2-\cancel{xa}-\cancel{\beta a}-\cancel{xa}}+x^2+\cancel{x\beta}} = 2e.$$

fiet $\dfrac{a^3}{a^2+x^2-2xa} = 2e$. posita $e = GI$. intervallo tangentis.

Ergo $\dfrac{a^4}{a^2+x^2-2xa} = 2ea = w^2$. Ergo $w = \dfrac{a^2}{a-x}$. Ergo w applicata est hyperbolae quae est $\dfrac{b^2}{a-x}$. vel $\dfrac{\gamma a^2}{a-x}$, et cylinder omnium $2e$ qui quadrari potest, aequatur quadratis ordinatarum hyperbolae ad asymptotam.

Dividatur y^2 per e, fiet $\dfrac{a^2x}{a-x} \times \dfrac{a^3}{2a^2+2x^2-4xa}$, fiet $\dfrac{2a^4x+2a^2x^3-4a^3x^2}{a^4-a^3x} = GL$. Sed quia GL non ad x. sive AG, sed ad y. sive AF applicanda est, ideo pro x substituatur

7 Posita ... proxima. *erg.* *L* 11 f. hyperbolae | quae est $\frac{b^2}{a-x}$. vel $\frac{\gamma a^2}{a-x}$ *erg.* |, et cylinder omnium 2e | qui quadrari potest *erg.* |, aequatur *L*

3 alibi ostendi: s. N. 47, S. 780 Z. 6 f. 6 alibi ostendi: s. N. 45 Teil 1.

eius valor. Et quia $x = \dfrac{y^2 a}{a^2 + y^2}$, eo substituto fiet:

$$GL = \frac{2a^5 \dfrac{y^2}{a^2 + y^2} + 2a^5 \dfrac{y^6}{y^6 + 3y^4a^2 + 2y^2a^4 + a^6} - 4a^5 \dfrac{y^4}{y^4 + 2y^2a^2 + a^4}}{a^4 - a^4 \dfrac{y^2}{a^2 + y^2}}.$$

cuius figurae summa pendet ex circuli quadratura, seu ex quadratura figurae propositae $ABCDA$.

Nunc figuram propositam ponamus esse resectarum hyperbolae, erit aequatio eius $4x^2y^2 + a^4 - 4a^2y^2 = 0$. ut alibi ostendimus, ergo $a^4 = 4a^2y^2 - 4x^2y^2$. Ergo $y^2 = \dfrac{a^4}{4a^2 - 4x^2}$. et $4x^2y^2 = 4a^2y^2 - a^4$. Ergo $x^2 = \dfrac{4a^2y^2 - a^4}{4y^2}$.

---

1 f. *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{l} a^2 + y^2 \\ \underline{a^2 + y^2} \\ a^4 + y^4 + 2a^2y^2 \\ \qquad \underline{a^2 + \ y^2} \\ \qquad y^6 + \underset{3}{\cancel{2}}a^2y^4 + a^6 + 2y^2a^4 \end{array}$$

$$x^3 = \frac{y^6a^3}{y^6 + 3y^4a^2 + 2y^2a^4 + a^6}$$

7 *Dazu spätere Ergänzung:* $= a^2 - \dfrac{a^4}{4y^2} - a^2 + \dfrac{a^4}{4y^2 + 4\beta^2 + 8\beta y}$ fiet: $\dfrac{2a^4y}{16y^4}$, vel $\dfrac{\cancel{2}a^4}{\underset{8}{\cancel{16}}y^3}$.

---

1 fiet: In der Nebenrechnung vergisst Leibniz jeweils den Summanden y^2a^4. Der Fehler geht in die Hauptrechnung ein. 5 erit aequatio: Leibniz übernimmt den (unrichtigen) Wert aus N. 47, S. 785 Z. 19 und rechnet damit konsequent weiter. 16 Leibniz rechnet fortlaufend. Im Nenner des 2. Bruches stand zunächst irrtümlich $2\beta y$. Mit diesem Wert hat Leibniz konsequent weitergerechnet, dann das Versehen bemerkt, aber nur beim ersten Vorkommen verbessert.

Quaeratur $x^2 - x^2$, duorum x proximorum, fiet

$$\frac{4a^2y^2 + 4a^2b^2 + 8a^2by - a^4}{4y^2 + 4b^2 + 8yb} + \frac{-4a^2y^2 + a^4}{4y^2} \text{ sive}$$

$$\frac{\cancel{16a^2y^4} + \cancel{16a^2b^2y^2} + 32a^2by^3 - \cancel{4y^2a^4} - \cancel{16a^2y^4} - \cancel{16b^2a^2y^2} - 32y^3a^2b + \cancel{4y^2a^4} + [4b^2a^4] + 8yba^4}{16y^4 + \cancel{16b^2y^2} + [\cancel{32y^3b}]}$$

fiet $\dfrac{8ya^4}{16y^4}$ $\dfrac{ya^4}{2y^4}$ seu $\dfrac{a^4}{2y^3} = GI$. si permutatis x et y. ponatur $AG = y$. et $GD = x$.

$$\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{x+b} = \frac{a^2x + a^2b + a^2x}{x^2 + xb} \text{ unde fiet, } \frac{2a^{[2]}x}{x^2} = \frac{2a^{[2]}}{x}.$$

Ac proinde intelligi potest non dari in his regressum, ac posse quidem statim differentias datis differentibus, at non series differentiarum, datis differentis inveniri.

Quid tamen si faciamus: $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{a^2}{x-b}$, hoc nihil profuerit, nam res eodem redit.

Et ratio est, quoniam cum summae tantum, non differentiae indagentur, nihil tollitur, atque ideo denique abiectis iis quae termino b affecta sunt, res redit ad priora.

1–4 Inter calculandum omitti possunt termini quos non ingreditur b. et quos ingreditur b^2 aut altior potestas.
Imo interdum, ut exemplis sequentibus patet ingredi potest altior b potestas. Scilicet si statim ab initio intret. At abiciendae sunt potestates eius minima primum proveniente altiores.

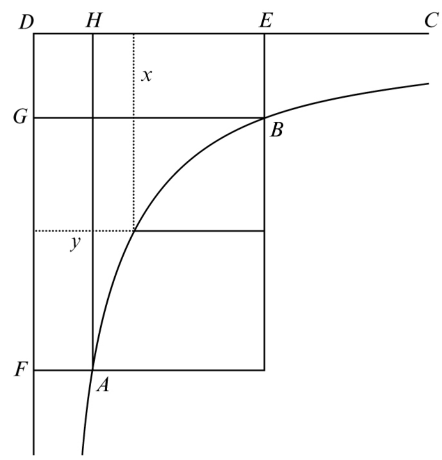
2 $y + b, \frown \square = y^2 + b^2 + 2yb$.

3 *Zähler: (1)* $4b^2a^4$ *(2)* $8b^2a^4$ *L ändert Hrsg.*; *Nenner:* $\cancel{4y^3b}$ *L ändert Hrsg.* 4 fiet *(1)* $\dfrac{32a^2y^3 + 8ya^4}{16y^4}$ $\dfrac{4a^2y^3 + ya^4}{2y^4}$ seu $\dfrac{2a^2}{y} + \dfrac{a^4}{2y^3}$ = GI. si permutatis x et y. ponatur AG = y. et GD = x. Cuius figurae quadratura rursus ex quadratura tam hyperbolae quam hyperboloeidis $\dfrac{a^4}{y^3}$ pendet. Hoc loco vero nova ratione habetur, atque ita duplicem habemus hyperbolae tetragonismum; *(2)* $\dfrac{8ya^4}{16y^4}$ *L*

5 *Exponenten erg. Hrsg.*

---

4 GI: genauer müsste es $\frac{1}{2}GI$ heißen.



[*Fig. 2*]

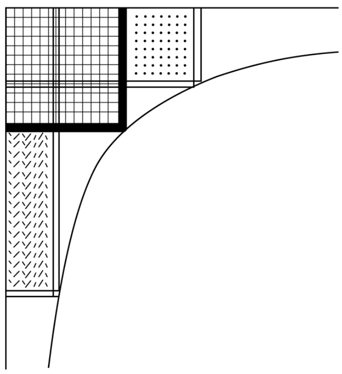
Hyperbola ABC. asymptoti DE, DF. Et $x = \frac{a^2}{y}$. et $y = \frac{a^2}{x}$. Spatium quinquilineum $BEDFAB$.

Habetur momentum omnium y ex DF, sunt enim $\frac{a^4}{2x^2}$, item omnium x ex DE, sunt enim $\frac{a^4}{2y^2}$. Quorum series homogenea seriei applicatarum ad asymptoton hyperboloeidis cubicae, $\frac{a^3}{y^2}$ vel $\frac{a^3}{x^2}$.

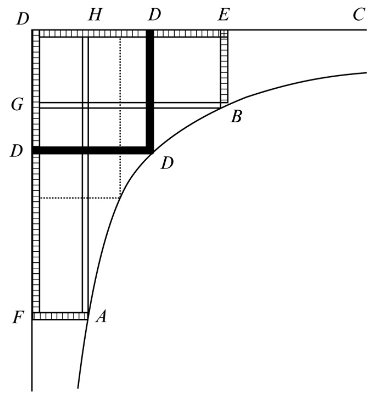
Rectangulum xy est $\frac{a^2 y}{y} = a^2$. vel $\frac{a^2 x}{x} = a^2$.

6 $\frac{a^3}{y^2}$ vel $\frac{a^3}{x^2}$: Leibniz übersieht hier, dass die quadratische — von ihm als hyperboloeis cubica bezeichnete — im Gegensatz zur gewöhnlichen Hyperbel nicht symmetrisch bezüglich x und y ist. Dementsprechend legt Leibniz den Fig. 3 und 4 eine gewöhnliche Hyperbel zugrunde.

Unde sequitur hyperboloeidis cubicae quadratura. Quod ita ostendo:



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

$\frac{a^2}{x+\beta} - \frac{a^2}{x} = a^2x - a^2x + \frac{\beta a^2}{x^2}$. homogenea huic $\frac{a^3}{x^2}$. Hinc intelligi potest quantitatem curvae haberi posse, quae hyperboloeidibus cubicis homogenea est, et ita summas eiusmodi etiam subtractione linearum non tantum quadratorum haberi posse.
Nota ut solida figuris ita et lineae curvae figuris homogeneae sunt. Et in eo consistit Heuratii methodus quadrandi curvas, quibus sunt homogeneae lineae quadrabiles.

$a^2 - x^2 = y^2$. Ergo $a^2 - x^2 - \beta^2 + 2\beta x. - a^2 + x^2$ restat $2x$.

1 quadratura. *(1)* | Posito enim DF = f. etiam DE = e. *erg.* | *(a)* duplum *(b)* dimidium enim omnium xy = $\frac{\mathrm{fa}^2}{2}$ *(c)* duplum enim omnium xy *(aa)* modo ad f. modo ad e; *(bb)* = f2a^2. seu 2a^{2}f. quadratis omnium x *(aaa)* ad basin *(bbb)* ad DE. et | 2ae *erg.* | omnium y ad DF. applicatis aequatur. Ergo si ABC sit curva hyperboloeidis cubicae, *(aaaa)* summa *(bbbb)* area spatii quinquilinei foret *(2)* Quod *L*

---

1 ostendo: Neben und unterhalb der Fig. 3 und 4 hat Leibniz reichlich Platz für die zugehörige Rechnung gelassen, diese dann aber nicht mehr ausgeführt. 3 Leibniz ändert die Reihenfolge, um eine positive Größe zu erhalten. Vgl. dazu auch S. 798 Z. 9. 7 methodus: H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, *DGS* I, S. 517–520. 8–796,3 bei der Berechnung der Subnormalen vernachlässigt Leibniz jeweils den Exponenten von y. Auch der Zahlenfaktor bei x^2 wird nicht mitpotenziert.

$a^3 - x^3 = y^3$. Ergo $y^2 = \dfrac{a^3 - x^3}{y}$. Iam $x + \beta$. cubice dat $x^3 + 3x^2\beta + 3x\beta^2 + \beta^3$, fiet ergo $\dfrac{3x^2}{y}$. et posito pro y $\sqrt{3}\,a^3 - x^3$, fiet: $\dfrac{3x^2}{\sqrt{3}\,a^3 - x^3} = y$, sive $\dfrac{3x^6}{a^3 - x^3} = y^3$, sive $y^3a^3 - x^3y^3 = 3x^6$.

$\sqrt{a^2 - x^2 - \beta^2 + 2\beta x}, -\sqrt{a^2 - x^2} = \gamma$. sive si $\gamma a = y$, erit:

$\sqrt{a^4 - x^2a^2 - \beta^2a^2 + 2\beta xa^2} - \sqrt{a^4 - x^2a^2} = y$.

Ergo

$$2a^2 - 2x^2 - \beta^2 + 2\beta x - 2\sqrt{a^4 - x^2a^2 - \beta^2a^2 + 2\beta xa^2 - a^2x^2 + x^4 + \beta^2x^2 - 2\beta x^3} = \gamma^2.$$

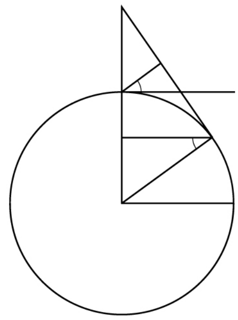
Ergo

$$2a^2 - 2x^2 - \beta^2 + 2\beta x - \gamma^2 = 2\sqrt{a^4 - x^2a^2 - \beta^2a^2 + 2\beta xa^2 - a^2x^2 + x^4 + \beta^2x^2 - 2\beta x^3}.$$

$\cancel{4a^4} - \cancel{8x^2a^2} - \cancel{4a^2\beta^2} + \cancel{8a^2\beta x} + \cancel{4x^4} + \cancel{4x^2\beta^2} - \cancel{8x^3\beta} + \beta^4 - 4\beta^3x + 4\beta^2x^2 + \gamma^4 - 4a^2\gamma^2 + 4x^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2$ $[-]$ $4\beta x\gamma^2 = \cancel{4a^4} - \cancel{4x^2a^2} - \cancel{4\beta^2a^2} + \cancel{8\beta xa^2} - \cancel{4a^2x^2} + \cancel{4x^4}$ $[+]$ $\cancel{4\beta^2x^3} - \cancel{8\beta x^3}$. Ergo $\cancel{\beta^4} - \cancel{4\beta^3x} + 4\beta^2x^2 + \cancel{\gamma^4} - 4a^2\gamma^2 + 4x^2\gamma^2 + \cancel{2\beta^2\gamma^2}$ $[-]$ $\cancel{4\beta x\gamma^2} = 0$. sive $4x^2 + 4x^2\gamma^2 = 4a^2\gamma^2$, sive $\cancel{4}x^2 + \cancel{4}a^2\gamma^2 - \cancel{4}x^2\gamma^2$, sive $\gamma^2 = \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$. sive $\gamma = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, sive $\gamma a = y = \dfrac{xa}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. id est resecta circuli, cum ita sit $\dfrac{y}{a} = \dfrac{x}{\sqrt{\llcorner a^2 - x^2 \lrcorner}}$. et alibi a me demonstratum sit resectam esse ad radium, ut sinus versus x ad rectum $\sqrt{a^2 - x^2}$.

2 $\dfrac{3x^2}{y}$. | Ecce | rursus *gestr.* | quadraturam *(1)* hyperbolae *(2)* parabolae *gestr.* | et *L* 11 f. *Vorzeichen ändert Hrsg.* 12 $= 0$. | Quod si β. et γ. ponantur non infinite parvae *gestr.* | sive *L*

14 resecta circuli: Genauer müsste es dann im Nenner $\sqrt{2ax - x^2}$ heißen. Leibniz bemerkt den Irrtum S. 797 Z. 4–7. 14 f. alibi a me demonstratum: in Cc 2, Nr. 1233A [Bog. 2] = LH 35 II 1 Bl. 87 v° oben, Theorema II.



[*Fig. 5*]

At vero figura segmentorum segmento circuli aequalis est, quod si ergo calculus iste sibi constat, habetur tetragonismus. Ergo $\dfrac{\sqrt{a^4 - x^2a^2}}{2}$ figurae resectarum, et $\dfrac{\sqrt{a^4 - x^2a^2}}{4}$ segmenti circuli area est. Sed errorem necesse est latere in calculo, posito enim $x = a$. ut in quadrante, fieret $\dfrac{\sqrt{a^4 - a^4}}{4}$ quod absurdum.

Imo contra. Rectissimus est calculus, nam x ex ipso centro computatur, et continue crescit, et quando fit $= a$. evanescit quantitas. Sed hoc modo γ non est rescissa.

Resumamus calculum:

$$\cancel{4a^4} - \cancel{8a^2x^2} - \cancel{4a^2\beta^2} + \cancel{8a^2\beta x} - 4a^2\gamma^2 + \cancel{4x^4} + \cancel{4x^2\beta^2} - \cancel{8x^3\beta} + 4x^2\gamma^2 + \beta^4 - 4\beta^3x +$$
$$[2]\beta^2\gamma^2 + 4\beta^2x^2 - 4\beta x\gamma^2 + \gamma^4 = \cancel{4a^4} - \cancel{4x^2a^2} - \cancel{4\beta^2a^2} + \cancel{8\beta xa^2} - \cancel{4a^2x^2} + \cancel{4x^4} + \cancel{4\beta^2x^2} - \cancel{8\beta x^3}.$$

Ergo $-4a^2\gamma^2 + 4x^2\gamma^2 + \cancel{\beta^4} - \cancel{4\beta^3x} + \cancel{[2]\beta^2\gamma^2} + 4\beta^2x^2 - \cancel{4\beta x\gamma^2} + \cancel{\gamma^4} = 0$.

Abiciantur ea quae duabus dimensionibus quantitatum assignabilium minora sunt, sive in quibus tres sunt aut ultra inassignabilium potestates, ut β^4, item β^3x, item $\beta^2\gamma^2$, item $\beta x\gamma^2$, item γ^4, restat $-\cancel{4}a^2\gamma^2 + \cancel{4}x^2\gamma^2 + \cancel{4}\beta^2x^2 = 0$. sive $x^2\gamma^2 + x^2\beta^2 = a^2\gamma^2$, vel $a^2\gamma^2 - x^2\gamma^2 = x^2\beta^2$, vel $\gamma^2 = \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$, sive $\gamma = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Et posito $\gamma a = y$, fiet $y = \dfrac{xa}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Ergo posita x minima $= \beta$, fiet $y = \dfrac{a}{a}$. et posita x maxima, ita ut non nisi inassignabiliter differat ab a. erit $y = a^2$. ac proinde infinite longa, sive asymptotos.

6 f. Imo ... rescissa. *erg. L* 10 f. 2 *erg. Hrsg.*

Caeterum y hoc loco resecta non est, quia x est non sinus versus, sed complementum eius ad radium. Ergo sinu verso posito x. pro x nostra, substituendum erit $a - x$, fiet:

$$y = \frac{a^2 - xa}{\sqrt{a^2 - a^2 - x^2 + 2ax}}. \text{ sive } y = \frac{a^2 - xa}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Et figura ex ipsis y hoc modo conflata quadrari aliunde potest, cum aequetur sectori duplicato demto segmento duplicato.

Nunc et figurae angulorum tangentes investigemus:

$y^2 = \dfrac{a^4}{2ax - x^2}$. Fiet: $\dfrac{a^4}{2ax + 2a\beta - \underbrace{x^2 - \beta^2\ [-]\ 2\beta x \quad - \quad 2ax}_{\text{inverte}}} \quad \dfrac{a^4}{2ax - x^2}$,

unde fiet:

$$\frac{\cancel{2a^5x} + 2a^5\beta - \cancel{a^4x^2} - \cancel{a^4\beta^2}\ [-]\ 2a^4\beta x - \cancel{2a^5x}\ [+]\ \cancel{a^4x^2}}{4a^2x^2 + \cancel{4a^2x\beta} - 2ax^3 - \cancel{2ax\beta^2}\ [-\cancel{4ax^2\beta}]\ - 2ax^3 - \cancel{2a\beta x^2} + x^4 + \cancel{\beta^2x^2} + \cancel{2\beta x^3}}$$

$$-4ax^3$$

fiet: $\dfrac{2a^5\ [-]\ 2a^4x}{4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4} = y$. Talis ergo figura quadrari potest.

Resumamus $\dfrac{a^2}{\sqrt{[2]ax - x^2}}$, et ergo $y^2 = \dfrac{a^4}{2ax - x^2}$. Ergo $2y^2ax - y^2x^2 = a^4$. Ergo $a^4 - 2y^2ax = y^2x^2$. Ergo $x^2 = \dfrac{a^4}{y^2} - 2ax$.

Ergo duorum x^2 proximorum differentia: $\dfrac{a^4}{y^2} - \cancel{2ax} - \dfrac{a^4}{y^2 + \beta^2 + 2y\beta} + \cancel{2ax}$, fiet:

---

16 Nota reiectionem termini ax, quasi non adesset.

7–13 *Vorzeichen ändert Hrsg.* 11 $+2ax^2\beta$ *L ändert Hrsg.* 14 Resumamus | figuram priorem, *(1)* $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, et ergo $y^2 = \dfrac{x^2}{\ }$ *(2)* $\dfrac{a^2}{\sqrt{ax - x^2}}$, *ändert Hrsg.* | et *L*

14–799,1 Die Berechnung von x^2 enthält einen Vorzeichenfehler, die Bildung der Ableitung ist unzulässig.

$$\frac{\cancel{a^4y^2} + \cancel{a^4\beta^2} + 2a^4y\beta - \cancel{a^4y^2}}{y^4 + \cancel{y^2\beta^2} + \cancel{2y^3\beta}} = \frac{2a^4y}{y^4} = \frac{2a^4}{y^3}.$$

Eodem modo resecta hyperbolae dat reductam $\dfrac{a^4}{2y^3}$, vide supra sub fine paginae quae retrovertendo occurrit.

$\dfrac{a^3}{Rq\ xa} - \dfrac{a^3}{Rq\ xa+\beta a} = y$. Ergo $= \dfrac{Rq\ \beta a^7}{xa}$ vel si dividatur per $Rq\ a$. fiet $\dfrac{Rq\ a^4}{xa}$, vel $\dfrac{a^2}{xa}$, vel $\dfrac{a}{x}$.

Sed sciendum hoc modo, ut haberi possit geometrice $Rq\ a$, intelligendum esse $a =$ non lineae sed rectangulo cuidam constanti v. g. ac.

Imo forte, error in calculo nam $\dfrac{a^2 Rq\ \overline{xa+\beta a} - a^2 Rq\ xa}{x\cancel{a}} = y$. Ergo

$$\frac{a^6, \frown\ xa+\beta a + xa - 2\sqrt{x^2a^2+\beta a^2 x}}{x^2a^2} = y^2.$$

Quod si irrationalitatem eliminare volemus, haud dubie in x^2 divisorem et hyperboloeidem velut cubicam rursus incidemus.

2 supra: s. o. S. 792 Z. 7. (In Wirklichkeit berechnet Leibniz wie oben S. 793 Z. 4 den doppelten Wert.) 10 haud dubie: Genauer ergibt sich eine Kurve der Gestalt $y^2x^3 = A^5$.

49. AD FIGURAM SEGMENTORUM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 93–94. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 93 v° und 94 r°. — Auf dem übrigen Bogen *LSB* VII,3 N. 23 S. 264–270.
Cc 2, Nr. 559

Datierungsgründe: Das Stück nimmt Bezug auf N. 47, liegt also etwas später als dieses.

In omni figura constat ex alibi a me demonstratis, applicatam divisam per productam dare differentiam applicatarum.

Esto applicata y. producta p. erit differentia applicatae datae a proxime maiore $= \dfrac{y}{p}$.

In hyperbola, cum applicata y sit $= \sqrt{ax+x^2}$, erit $y^2 = ax + x^2$, et ut habeatur producta fiet: $2y^2 = ap + 2xp$, vel $\dfrac{2ax+2x^2}{a+2x} = p$, et $\dfrac{y}{p} = \dfrac{\sqrt{ax+x^2}}{2ax+2x^2} \frown a+2x$, vel $\dfrac{2y}{p} = \dfrac{1}{\sqrt{ax+x^2}} \frown a+2x = \dfrac{a+2x}{\sqrt{ax+x^2}}$.

Ergo figurae huius, in qua aequatio est: $\dfrac{a^2+2xa}{\sqrt{ax+x^2}} = y$, quadratura haberi potest.

Quam ut per partes examinemus patet $\dfrac{a^2}{\sqrt{ax+x^2}} = y$, dare $\dfrac{a^4}{ax+x^2} = y^2$, unde fit: $a^4 = axy^2 + x^2y^2$, vel $\dfrac{a^4}{y^2} = ax + x^2$, vel $\dfrac{a^4}{y^2} + \dfrac{a^2}{4} = ax + x^2 + \dfrac{a^2}{4}$, vel $\sqrt{\dfrac{a^4}{y^2} + \dfrac{a^2}{4}} = \left[\dfrac{a}{2}\right] + x$.

---

10 Idem plane in circulo alibi.

14 Est homogenea curvae hyperb.

15 a *L ändert Hrsg.*

---

7 ex alibi a me demonstratis: s. N. 40 S. 660 Z. 5 f. 17 in circulo alibi: z. B. N. 40 S. 697 Z. 1–3.

Sumta iam aequatione hac: $\sqrt{\frac{a^4}{y^2}+\frac{a^2}{4}} = x$ (omisso $\left[\frac{a}{2}\right]$, quia constante vel posito $\left[\frac{a}{2}\right]+ x = x$), potest rursus dici: $\frac{a^4}{y^2}+\frac{a^2}{4} = x^2$, sive $\frac{a^2}{y} = \sqrt{x^2-\frac{a^2}{4}}$, vel $\frac{y}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{a^2}{4}}}$, vel $y = \frac{a^2}{\sqrt{x^2-\frac{a^2}{4}}}$, unde $y^2 = \frac{a^4}{x^2-\frac{a^2}{4}}$, vel $x^2y^2 - y^2\frac{a^2}{4} = a^4$, vel $x^2 = \frac{a^4}{y^2}+\frac{a^2}{4}$, vel $x = \sqrt{\frac{a^4}{y^2}+\frac{a^2}{4}}$.

Ergo in hanc tandem figuram superior aequatio reducitur: $\frac{a}{\sqrt{ax+x^2}} = y$.

Iam altera: $\frac{\cancel{2}xa}{\sqrt{ax+x^2}} = y$, dabit $\frac{x^2a^2}{ax+x^2} = y^2$, sive $\frac{xa^2}{a+x} = y^2$, ac proinde $xa^2 = y^2a+xy^2$. Ergo $xa^2-xy^2 = y^2a$, vel $x = \frac{y^2a}{a^2-y^2}$, unde $\frac{y^2}{a-\frac{y^2}{a}} = x$, vel $ay^2 = xa^2-xy^2$, vel ob $\frac{y^2}{a^2-y^2} = \frac{x}{a} = +1-\frac{a^2}{a^2-y^2}$.

---

5 Idem in circulo faciendum.

7 Est figura segmentorum.

1 f. (omisso a, quia constante | vel posito a + x = x *erg.* |) *L ändert Hrsg.*

---

8 $\frac{x}{a}$: In der hinteren Beziehung müssten die Vorzeichen der beiden Glieder vertauscht sein.

Iam $\dfrac{a^3}{a^2-y^2} = x$ ni fallor alibi ostensum ex quadratura hyperbolae pendere: vel $a^2x - y^2x = a^3$, vel $a^2x - a^3 = y^2x$, vel $a^2 - \dfrac{a^3}{x} = y^2$. vel $1 - \dfrac{1}{x} = y^2$, vel $y = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^3}{x}}$.

Ut productam huius figurae habeamus, fiet: $a^2x - y^2x = 2y^2x$, ac proinde $a^2p - y^2p =$

p p

$2y^2x$, vel $p = \dfrac{2y^2x}{a^2-y^2}$, et pro y^2 substituto aequivalente, fiet:

$$\frac{2a^2x - a^3}{a^2 - a^2 + \dfrac{a^3}{x}} = \frac{2a^2x^2 - a^3x}{a^3} = \frac{2x^2}{a} - x.$$

Iam fiat ut p ad y, seu ut $\dfrac{2x^2}{a} - x$ ad $\sqrt{a^2 - \dfrac{a^3}{x}}$, ita $p - x$ ad z. vel $\dfrac{2x^2}{a} - 2x$ ad z. fietque

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} \frown \frac{\dfrac{2x^2}{a} - 2x}{\dfrac{2x^2}{a} - x} = \sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} \frown 1 - \frac{x}{\dfrac{2x^2}{a} - x},$$

---

1 $\dfrac{a^3}{a^2+y^2} = x$. $a^3 = a^2x + y^2x$.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{a^3}{x} - a^2} = y \\[2ex] \sqrt{a^2 - \dfrac{a^3}{x}} = y \end{array}\right\} \text{pro} \quad \begin{array}{l} \text{circ.} \\[2ex] \text{hyperb.} \end{array}$$

Ergo in circ. x est minor, in hyp. hoc loco maior quam a.

10 *(1)* Idem in circulo *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$ *L*

---

1 alibi ostensum: s. N. 47 S. 787 Z. 13 f. 7 In dem ersten Ausdruck müsste es im Zähler statt $-a^3$ vielmehr $-2a^3$ heißen. Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent bis S. 803 Z. 11 weiter.

vel $\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} - \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{\frac{2x}{a} - 1}$, vel $\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} - \frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a}$.

Atque horum summa aequalis segmento duplicato summae omnium $\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}$. Ergo dimidiata illorum summa aequalis segmento huius, ergo summa differentiarum inter $\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}$, et $\frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} - \frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a}}{2}$, aequalis semper triangulo post absectum segmentum residuo, vel

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} - \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2} + \frac{\frac{a}{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a} \quad \text{quadrabiles.}$$

Ergo si $\frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} + \frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a}}{2}$ est $= y$, erit summa omnium y quadrabilis.

Alterutra ergo horum quadrata etiam altera quadrata erit.

Inquiramus tantum in $\frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a} = y$, fiet $\frac{a^2 \frown a^2 - \frac{a^3}{x}}{4x^2 + a^2 - 4xa} = y^2$, vel $a^4x - a^5 = 4x^3y^2 + a^2xy^2 - 4x^2ay^2$, sed haec nimis prolixa.

Per partes ergo, erit: $\frac{a^4}{4x^2 + a^2 - 4xa} = \frac{a^2}{2x - a}$, quae est applicata hyperbolae, et $\frac{a^4 \frown \frac{a}{x}}{}$

[*bricht ab*]

10 $-4x^2ay^2$, *(1)* consideremus primum: $\frac{a^4}{}$ *(2)* sed *L*

11 erit: Leibniz fasst die Zerlegung quadratisch auf und zieht sofort die Wurzel, ohne das Ganze genauer hinzuschreiben.

Sumamus $\frac{a^3}{a^2-y^2} = x$, fiet: $a^3 = a^2x - y^2x$, sive $2yp\cancel{x} = a^2\cancel{x} - y^2\cancel{x}$. eritque $p = \frac{a^2}{2y} - \frac{y}{2}$. Iam fiat ut x ad p, ita z ad $p-y$, $\frac{x}{p} = \frac{z}{p-y}$, ergo $z = \frac{px-xy}{p}$, et quia $x = \frac{a^3}{a^2-y^2}$, fiet $x - \frac{ya^3}{a^2-y^2, \frown \frac{a^2}{2y} - \frac{y}{2}} = x - \frac{2y^2a^3}{a^4-2ya^2+y^4}$.

Caeterum hic in genere notandum est, quod antea non observaveram[:]

Quoniam semper est $\frac{x}{p} = \frac{z}{p-y}$, fore $z = x - \frac{xy}{p}$, et quia $\frac{z}{2} = \frac{x-\frac{xy}{p}}{2}$ summa aequatur segmento figurae, ergo summa ipsarum $x - \frac{x-\frac{xy}{p}}{2}$ = triangulo, sive $x - \frac{x}{2} + \frac{xy}{2p}$ = triangulo $= \frac{x}{2} + \frac{xy}{2p}$.

Ergo in omni figura si sit y abscissa, x applicata, p producta, semper summa omnium $\frac{x}{2} + \frac{xy}{2p}$ erit quadrabilis.

Atque hac methodo habetur a p p r o x i m a t i o g e n e r a l i s pro figuris omnibus quodammodo metiendis. Istud excedens enim $\frac{xy}{2p}$, rursus eodem modo, quasi x esset, tractari potest, et rursus eius dimidium, cum alio quodam adiecto quadrabile habebitur; quod adiectum, eodem item modo tractandum; atque ita quamdiu libuerit, quod si iam unum horum aliquando quadrabile habeatur; aut etiam quadrabile fingatur, vel quando diu satis continuatio facta est, negligatur; caetera omnia quadrata intelligentur, possunt haec referri ad inscripta et circumscripta.

---

1 Figura segmentorum hyperb.

3 *Nebenrechnung:* $\frac{a^4}{2y} - \frac{ya^2}{2} - \frac{a^2y}{2} + \frac{y^3}{2} = \frac{a^4-2ya^2+y^4}{2y}$.

1 $-\mathrm{y^2x}$, | $\mathrm{y^2 = a^2 - \frac{a^3}{x}}$ *gestr.* | *(1)* sive $\mathrm{2y^2x = a^2p - y^2p}$, vel $\mathrm{p = \frac{2y^2x}{a^2-y^2}}$, et quia $\mathrm{y^2 =}$ *(2)* sive *L* 5 f. summa *und* summa ipsarum *erg. L* 11 Istud *(1)* superfluum *(2)* excedens *L* 13 libuerit, *(1)* omnium $\mathrm{\frac{x}{2}}$ cum ultimo superfluo summa, ipsi primo x ae *(2)* quod si *L*

Forte et ex aliquot prioribus series sequentium sine calculo facile inveniri atque ea summandi modus haberi potest.
Contra ubi notae iam figurarum quadraturae, ut in paraboloeidibus et hyperboloeidibus, aliisque hinc viceversa ex data figurae quadratura habetur infinitarum eiusmodi serierum summa.
Caeterum in paraboloeidibus et hyperboloeidibus id non opus, ubi eadem semper manet figurae species. At in aliis innumeris figuris quadrabilibus, quae mea methodo quadrantur, idem utiliter experiri licet.

Redeo ad aliam quam supra incepi approximationem generalem.

Ante omnia supra demonstratum est, semper $\frac{ay}{p}$ summari posse, posita y applicata, p producta, a constante.

Ita si sit $a^2 = yx$, fiet $yx = yp$, et $x = p$, fietque $\frac{y}{p} = \frac{\frac{a^2}{x}}{p} = \frac{a^2}{x^2}$[;] et in parabola: $ax = y^2$, seu $ap = 2y^2 = 2ax$, ergo $p = 2x$, ergo $\frac{a\sqrt{ax}}{2x} = y$, quadrabile: sive $\frac{a^3x}{4x^2} = y^2$, sive $\frac{a^3}{4x} = y^2$[;] ecce rursus hyperbolam cubicam $ax = y^2$. Unde $ax = 2yp$, ergo $\frac{ax}{2y} = p = \frac{\cancel{a}\frac{y^2}{\cancel{a}}}{2y} = p = \frac{y}{2}$. Iam $\frac{y^2a}{2ay} = \frac{y}{2}$. Ecce hic *differentiae productis homogeneae*.

$a^2 = xy$, et $p = x$, et posito $x = 1$, fiet $a^2 = y$, atque inde ordiri possumus: $\frac{y}{p} = \frac{a^2}{1}$, et posito $x = 2 = p$, fiet: $\frac{a^2}{2}$, et postea $\frac{a^2}{\frac{1}{\frac{2}{3}}}$, et postea $\frac{a^2}{\frac{1}{\frac{2}{\frac{3}{4}}}}$, et ita porro,

atque ita fiet: $\frac{a^2}{1}$ $\frac{a^2}{2}$ $\frac{a^2}{6}$ $\frac{a^2}{24}$ etc.

---

12 Genauer müsste es $yx = -yp$ und $x = -p$ heißen. Leibniz vernachlässigt das Vorzeichen, da er p als einfache Strecke ansieht.

Imo potius:

sunt p: 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. et

y p r i m u m est $\frac{a^2}{1}$, ergo differentia eius a 2^do^ erit $\frac{a^2}{2}$. Ergo

y s e c u n d u m erit $\frac{a^2}{2}$, eius differentia a tertio erit $\frac{a^2}{6}$, ergo

y t e r t i u m erit $\frac{a^2}{3}$, cuius differentia a quarto erit $\frac{a^2}{12}$, ergo

q u a r t u m erit $\frac{a^2}{4}$ etc.

Quod supra de approximationibus per continua triangula, id sic illustrabitur. Ponatur prima applicata y, applicata primae figurae segmentorum $\frac{y}{2}$,

$\underbrace{\frac{y}{2}+\frac{\beta}{2}}_{=\,bx}$ applicata secundae figurae segmentorum,

applicata tertiae figurae segmentorum: $\underbrace{\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{2}}_{cx\,=\,\text{earum summae}}$

et applicata quartae figurae segmentorum erit: $\underbrace{\frac{\gamma}{4}+\frac{\delta}{2}}_{dx}$, et quintae $= \underbrace{\frac{\delta}{4}+\frac{\epsilon}{2}}_{=\,ex}$.

Hinc posito summam omnium $\frac{\epsilon}{2}$ vel inveniri, vel potius quod est universalius tuto negligi posse[,] fiet summa omnium $\frac{\delta}{4} = ex$, et $2ex =$ summ. $\frac{\delta}{2}$, et

$dx - 2ex$ erit $=$ summae omnium $\frac{\gamma}{4}$, et

$cx - 2dx + 4ex =$ summae omnium $\frac{\beta}{4}$, et

$bx - 2ex + 4dx - 8ex$, aequatur summae omnium $\frac{y}{2}$.

12–16 Ecce rursus modum de figuris in alias resolvendis.

13 et 2ex = summ. $\frac{\delta}{2}$, *erg. L*

Ecce methodum inveniendi appropinquationes universalem, et exactam methodo ⟨per⟩ polygona, inscripta vel circumscripta, si universaliter rem aestimes, longe commodiorem. Est autem ipsa b, vel c, vel d, vel e semper applicata maxima figurae segmentorum assumtae, seu cuius abscissa est maxima x, vel altitudo figurae quadrandae.

50. CURVA QUAM P. BERTHET OSANNAE PROPOSUERAT
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 107–108. 1 Bog. 2°. — A: Bl. 108 v° oberer Rand 4 Z. verworfene, fragmentarische Notiz. — B: Bl. 107 r° oben 1/3 S. u. Bl. 108 v° 1 S. Überschrift erg. Rest des Bogens leer. Textfolge: Bl. 107 r° = Teil 1; Bl. 108 v° = Teil 2–4. Teil 1 stammt von Ozanam, alles Übrige von Leibniz; die einzelnen Teile sind jeweils deutlich im Duktus voneinander unterschieden.
Cc 2, Nr. 1112

Datierungsgründe: Die Datierung ergibt sich aus dem Schreiben von Leibniz an Bertet von Anfang Nov. 1675 (= *LSB* III, 1 N. 68 S. 308–310). Es beginnt mit dem auf das vorliegende Stück bezogenen Satz: „Il y a plus de 2 ans que Mons. Osannam me parla d'une ligne que vous aviez imaginée.“

A.

Annotat Hugenius pag. 80. curvam cuius evolutione hyperbola (circularis) describitur, eius naturam fore, ut cubus ab $x^2 - y^2 - a^2$ sit $= 27x^2y^2a^2$.

$x^2 - y^2 - a^2.\ \square = x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2a^2, +y^4 + 2y^2a^2 + a^4,, \frown x^2 - y^2 - a^2.$

$x - \sqrt{x + \dfrac{x^2}{a}} =$ [*Formel bricht ab*]

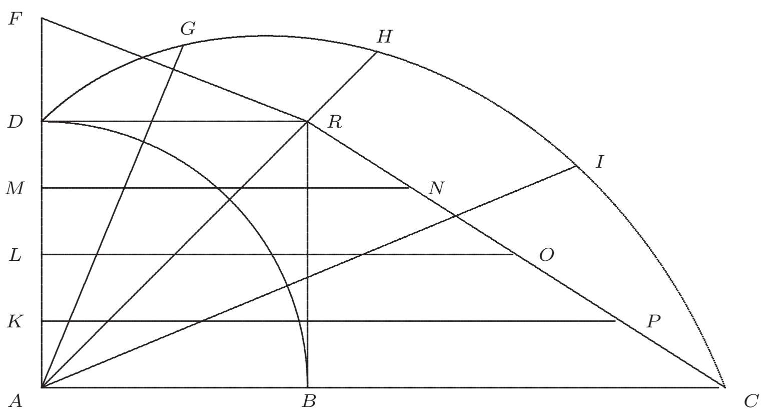
B.

C u r v a q u a m P. B e r t h e t O s a n n a e p r o p o s u e r a t
O s a n n a m i h i
c u i u s t a n g e n t e m , a r e a m e t a l i a d e d i.

[*Teil 1*]

[Ozanam]

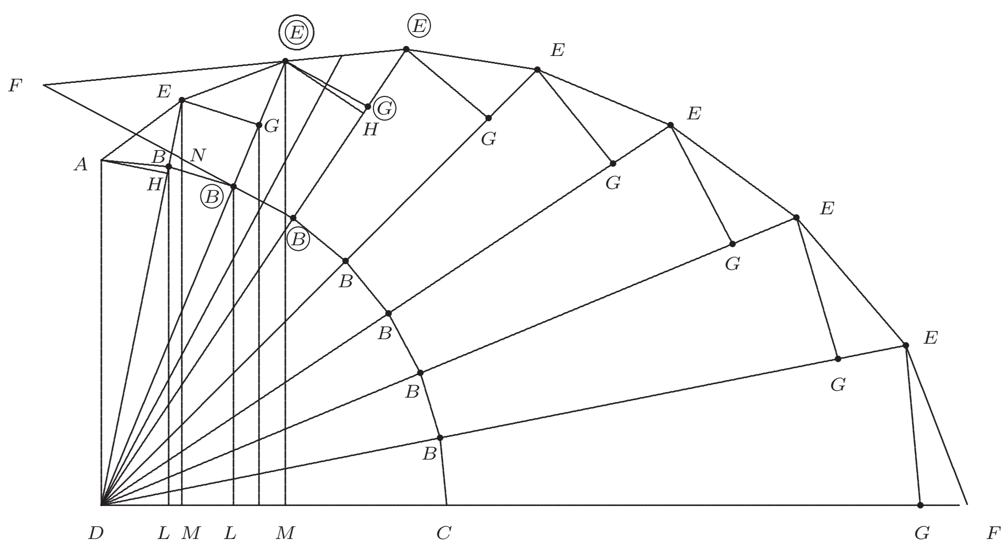
13 Annotat Hugenius: *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil 3 Satz 10 S. 79–81 (*HO* XVIII S. 220 bis 225). Die Notiz ist als Erstes auf den Bogen geschrieben worden. Offenbar wollte Leibniz das Huygens'sche Ergebnis weiter untersuchen, hat dieses Vorhaben aber nicht ausgeführt und den Bogen anderweitig verwendet. In Leibniz' Handexemplar finden sich an der betreffenden Stelle Tintenspuren sowie eine Marginalie; vgl. dazu N. 2.



[*Fig. 1 (Ozanam)*]

$AC, AB :: AB, DF$
$KP \infty AI \quad LO \infty AH \quad MN \infty AG$
$DR \infty AD$

[*Teil 2*]



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

Sit arcus circuli ABC. sumtisque in eo punctis quotlibet B. ex centro D ductus radius DB, producatur, eousque dum portio extra circumferentiam producta BE, aequetur arcui AB. tandem per omnia puncta E, transire intelligatur curva cochleiformis AEF.

Modus hanc curvam describendi hic est: sit linea rigida DF indefinite producta ex centro D ac circa illud centrum mobilis; inde filum arcui circuli ABC rigido, circumplicatum intelligatur, quod in C si placet fixum in A liberum sit. Ac linea rigida DF in DC constituta, filum ita semper aperiatur, ut ipsi DF regulae coincidat, eamque ipsa sui apertura ab A versus C propellat, stylus filo in A alligatus in plano curvam AEF describet.
Idem efficitur, si duo sint motores, unus qui lineam rigidam circumagat, alter qui filum ad lineam rigidam quantum potest extendat.

Huius curvae ut inveniamus tangentes, intelligantur ductae circuli chordae infinite parvae, AB, BB, etc. BC. atque his parallelae a radio producto in radium productum ducantur rectae infinite quoque parvae EG. Iam ex ipsis BB una aliqua, ut BB intelligatur producta ut libet versus A in F[,] ipsa BF tangens erit circuli Iam ponatur FE tangens curvae cochleiformis[,] ergo triangula FBE et EGE erunt similia quia EG et FB parallelae. Ergo ut est EG ad GE ita est EB ad BF quaesitam. Est autem GE seu BB ad GE ut DB vel DA ad DG. Ergo etiam BE ad BF erit ut DA ad DG.
Regulam ergo tangentium ad hanc curvam ducendarum habemus hanc, puncto in ea dato ut E[,] inde ducatur ad D centrum circuli generatoris recta ED quae arcum circuli datum secet in B[,] ductoque circuli tangente BF, si fiat ut ED radius arcu circuli

12 intelligantur *(1)* ductae circuli chordae *(2)* ducta circuli velut polygoni infinitanguli, latera *(3)* ductae *L* 14 Iam *(1)* sumta ex chordis BB una BB *(2)* ex *L* 15 versus A *(1)* | usque in F *erg.* | quae utique tangens *(2)* in F *L* 15 circuli. *(1)* Manifestum est | si FE sit tangens curvae cochleiformis *erg.* | triangula FBE et EGE esse *(2)* Iam *L* 17 quia ... parallelae *erg. L* 17 ut est EG | data *gestr.* | ad GE ita est EB | data *gestr.* | ad *L* 18 seu BB *erg. L* 18–20 GE ut *(1)* DG ad DA *(2)* DB vel DA ad DG. | Ergo ... ad DG. *erg.* | Regulam *L* 22 ut *(1)* EB ad *(2)* DA ad *(3)* radius circuli ad ED radium producta auctum, ita *(4)* ED radius *L*

4–9 Neben dem Text hat Leibniz begonnen, einen entsprechenden Mechanismus zu entwerfen, den Versuch aber sofort abgebrochen. — Zur mechanischen Erzeugung der Kurve s. a. *LSB* III, 1 S. 308 f.

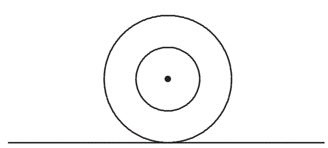
extenso auctus ad $D\textcircled{B}$ radium ita $\textcircled{B}F$ ad $\textcircled{E}\textcircled{B}$ circulum extensum[,] erit iuncta $F\textcircled{E}$ curvae tangens.
Quando autem tangens est ipsi DC parallela, punctum contactus erit figurae vertex.

Ut ipsius curvae longitudinem indagemus ducenda est perpendicularis ex $\textcircled{\textcircled{E}}$ in $D\textcircled{G}$[,] patet triangulum $\textcircled{\textcircled{E}}\textcircled{G}H$ semper esse simile quaecunque sint puncta E et G. quia angulus EGD vel EGH semper idem, et angulus EHG etiam semper idem quia rectus. Cumque EG semper crescant arithmetica proportione, etiam EH et HG semper arithmetice crescent. Ex omnibus autem EH, primum est AH, cuius magnitudinem investigabimus si aream trianguli ADB quod vocemus z^2. dividamus per semiradium $\frac{a}{2}$, fiet $\frac{z^2}{\frac{a}{2}} = \frac{2z^2}{a}$. Et sequens ita habebitur, ut a ad $a+1$, ita $\frac{2z^2}{a}$ ad sequentem, fiet: $\frac{2z^2}{a} + \frac{2z^2\beta}{a^2}$ posito β esse unitatem. Ergo differentiae omnium EH arithmetice crescentium erunt $\frac{2z^2}{a^2}$. Iam si subtrahatur $\Box AH$ a $\Box^{\text{to}} AB$, fiet $\sqrt{1 - \frac{4z^4}{a^2}}$ et ut a ad $a+1$ ita $\sqrt{1 - \frac{4z^4}{a^2}}$ ad sequentem.

$a^2 + 2a + 1$, inde $\sqrt{\dfrac{a^2 - 4z^4 + 2a - \frac{8z^4}{a} + 1 - \frac{4z^4}{a^2}}{a^2}}$

vel: $\sqrt{1 - \frac{4z^4}{a^2} - \frac{8z^4}{a^3} - \frac{4z^4}{a^4} + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}}$

11–13 *Daneben:*



1 ita *(1)* Ⓑ Ⓔ producta ad *(2)* Ⓑ F ad *L* 3 Quando ... vertex. *erg. L* 4 indagemus *(1)* cogitandum est latus AB, vel BB aequale ipsi Ⓖ Ⓔ esse non latus inscriptum seu chordam sed circumscriptum seu ta *(2)* ducenda *L* 6 vel EGH *erg. L* 13 f. sequentem *(1)* | id est *nicht gestr.* | $1 - \frac{4z^4}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{4z^4}{a^3}$. *(a)* Et differ *(b)* dabit scilicet quadr. BH. *(2)* . a^2 *L*

cuius differentia a $\sqrt{1 - \dfrac{4z^4}{a^2}}$ semper eadem cum per eam sequentes AH arithmetice crescant: Tantum ergo per numeros naturales continue multiplicanda est. Tandem additis EH, HG quadratis habebitur quadr. E E cuius radices sunt elementa curvae.

[*Teil 3*]

Aequatio huius figurae naturam explicans ita investigabitur. Ex punctis E dimittantur ordinatae ad DC, nempe EM. et ex punctis B, sinus BL. et DL positis $= x$. et $BL = y$., quia $DB = a$. eidem semper erit $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. et eodem modo EM posito v, et DM posito ξ, fiet $v^2 = DE^2 - DM^2$, et quia DE est $= a + \beta$, posito β esse arcum AB respondentem, fiet: $DE^2 = a^2 + \beta^2 + 2a\beta$. fietque aequatio haec[:]

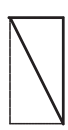
$$v \text{ vel } ME = \sqrt{a^2 + \beta^2 + 2a\beta - \xi^2}.$$

vel brevius MN sinu circuli in rectam ME incidente, vocato z, eius quadratum z^2, erit aequale $a^2 - \xi^2$, vel $DN^2 - DM^2$, ergo[:]

$$ME \text{ erit} = \sqrt{z^2 + \beta^2 + 2a\beta}.$$

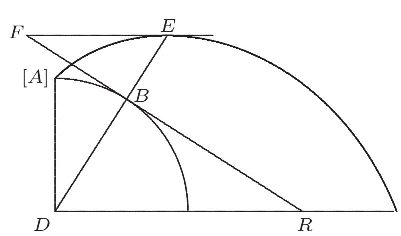
Ergo haberi quoque possunt quadrata omnium ME, sive solidum figurae circa axem DG, revolutione genitum.

Definiendum ex his punctum, ubi maxima figurae latitudo.



a	b	(1)	ab
$a + \alpha$	$b + \beta$	(2)	$ab + a\beta + \alpha b + \alpha\beta$
$a + 2\alpha$	$b + 2\beta$	(3)	$ab + 2a\beta + 2\alpha b + 4\alpha\beta$

[*Teil 4*]



[*Fig. 3*]

22 A *erg. Hrsg.*

Maxima curvae altitudo est, ubi tangens FE basi parallela est. Producatur FB in R. ubi occurrat basi, triangula EBF et DBR similia sunt. Ergo:

$$\frac{EB}{BF} \text{ sive } \frac{AD}{AD+BE} \sqcap \frac{AD}{BR}.$$

Ergo cum tangens complementi aequatur arcui et radio simul, radius productus occurrit curvae vertici.

1 Maxima curvae altitudo: Teil 4 steht in direktem Zusammenhang mit dem Schreiben an Bertet (s. *LSB* III, 1 S. 310) und dürfte daher im November 1675 entstanden sein.

51. DE ELEMENTIS FIGURARUM.
[Herbst] – Ende 1673

Die in dieser Nummer zusammengefassten Teilstücke stehen in lockerem sachlichen Zusammenhang; sie befinden sich alle auf dem gleichen Bogen.

Die Notiz N. 51_1 ist unter dem Eindruck der Sendung Oldenburgs vom 20. IV. 1673 (= *LSB* III, 1 N. 13) entstanden, die Leibniz noch im selben Monat erhalten, aber erst nach und nach durchgearbeitet hat. Sie zeigt einen anderen Duktus als die übrigen Teilstücke und ist als erste auf den Bogen geschrieben worden.

In dem Konzept N. 51_2 beginnt Leibniz eine Konstruktionsaufgabe zu behandeln. Eine verwandte Fragestellung tritt in N. 51_3 auf, so dass N. 51_2 als Vorstudie dafür angesehen werden darf, außerdem ist der Duktus dem von N. 51_3 sehr ähnlich.

Das Hauptstück N. 51_3 ist datiert.

Das Wasserzeichen des Bogens ist ab August 1673 belegt.

Daraus ergibt sich die Datierung.

51_1. DE ARTE DIGNOSCENDI FIGURARUM NATURAM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 3 Bl. 250–251. 1 Bog. 2°. 1/3 S. auf Bl. 251 v° oben. Auf dem übrigen Bogen N. 51_2 u. 51_3.
Cc 2, Nr. 607 tlw.

Opus est arte quadam dignoscendi ex figura quadam oblata, quaenam sit natura eius. Hoc optime fiet, si directrice adhibita tabulae innumeris quadratis plenae applicetur, numerus quadratorum, ordinatam dabit, progressio numerorum aequationem figurae, saltem circiter. Unde tabulas fieri utile erit, quae numerorum seriebus explicent figurarum naturas, a latere recto appellato 1. (sed 1. infinito), v. g.

$$x = \frac{y^2}{a}. \text{ fiet: } \quad 1. \;\; 4. \;\; 9. \;\; 16. \;\; \text{et ita porro.}$$

Sed saepe non statim ex numeris dignosci potest, ex qua nascuntur aequatione series, quoniam sunt aequationes quaedam valde compositae. Hinc quae Collinius de interpolationibus.

---

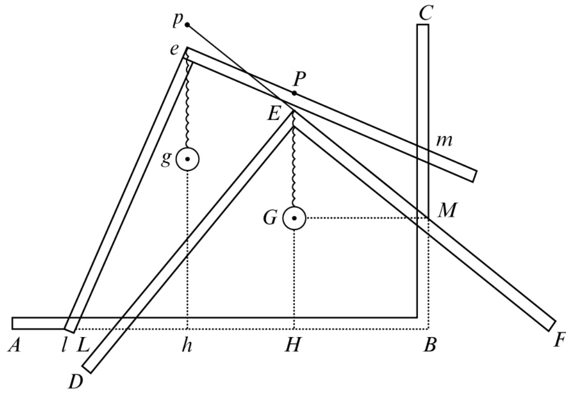
27 Collinius: s. dazu *LSB* III, 1 S. 58 f. u. 68 sowie *LSB* VII, 3 N. 21 S. 252.

Nota: si figura ipsa quadrato imponi non potest, poterit imago eius repraesentatione optica. Operae pretium est hoc modo exacte definiri figuram doliorum vinariorum, aliorumque quorum usus publice introductus est, ut exacta eorum mensurandorum ratio stabiliatur. Adde quae Andersonus ni fallor textor, in diario Anglico de figuris geometricis cum vasis comparatis. Ita examinandae volutae quae in architectura veterum reperiuntur, qualis est Ionica, de qua disputatur, ut ad earum veram constructionem accedatur; idem de aliis architecturae ductibus, columnarumque formis. Iam hac arte examinari possunt figurae physicae, ut motus proiectorum, aliaque innumera; ut figura vera lentium naturalium, quas oculo indidit natura, ubi quidam nescio quid hyperbolicum sibi observare videntur.

51_2. DE CERTO PROBLEMATE GEOMETRICO
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* fragmentarisches Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 250–251. 1 Bog. 2°. 2/5 S. auf Bl. 250 v°. Rest der Seite leer. Auf dem übrigen Bogen N. 51_1 u. 51_3.
Cc 2, Nr. 607 tlw.

4 Adde: s. die Besprechungen von R. Anderson, *Stereometrical propositions*, 1668, und Ders., *Gaging promoted. An appendix to Stereometrical propositions*, 1669, in den *Philosophical Transactions* Bd III Nr. 39 vom 21. Sept./1. Okt. 1668, S. 785–787 und Bd IV, Nr. 47 vom 10./20. Mai 1669, S. 960.



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

Datis duabus normis rigidis, altera immobili ABC cuius crus AB horizonti parallelum, alterum crus BC ei perpendiculare, altera vero mobili DEF ex cuius angulo E perpendiculum [EG] mobile, filo dependeat: mobilem ita collocare ut si unum crus DE, rectam AB secet alicubi in L, alterumque crus EF rectam BC secet in M, tunc MB sit ipsi GH distantiae ponderis ex filo EG pendentis ab horizontali GH aequalis.

Manifestum est rectam EG esse constantem ac datam a, de caetero rectam BH appellemus x et EH y, erit $GH = MB = y - a$. Ob triangula similia EGM, LHE, manifestum est esse $LH = \dfrac{ya}{x}$. sive $\dfrac{LH}{a} = \dfrac{y}{x}$.
Cumque nulla alia conditio in problemate praescripta sit patet y et x pro arbitrio sumi posse (Ideo et MB pro arbitrio sumetur, pendet enim ex y, quia $= y - a$.), tantumque

2–4 ABC *(1)* , altera vero mobili DEF, ita ut AB sit horizonti parallela, cuius unum *(a)* latus *(b)* crus *(2)* | cuius ... perpendiculare *erg.* | , altera vero mobili DEF | ex cuius ... perpendiculum | EF *ändert Hrsg.* | mobile ... unum *erg.* | crus *L* 5 secet | alicubi *erg.* | in L, *(1)* alterumque vero *(2)* | tunc *erg. u. gestr.* | alterumque crus *L* 7 f. BH | = HB *erg.*, *streicht Hrsg.* | appellemus *L* 11 (Ideo ... y − a.) *erg. L*

1 [*Fig. 1*]: In seiner Handzeichnung hat Leibniz zunächst den Punkt e (und die zugehörigen Linien) ganz dicht beim Punkt E gezeichnet; er hat dann aber bemerkt, dass die Zeichnung unübersichtlich wird, und e weiter von E abgerückt.

fieri debere LH ad a ut est y ad x. vel sumtis pro arbitrio punctis M et E. iunctaque EM, inde erectam et perpendicularem ad EM daturam punctum L quaesitum.

Sed quid si aliqua circumstantia addita, nonnihil augeatur problematis difficultas. Nimirum punctum L sumendum esse tale, ut si postea aliud eius loco sumatur ultra citraque, ut distantiae ab L utcunque exiguae, eodemque modo intelligantur ductae le, et em. et $eg = EG$, et $mB = gh$, ut inquam, tunc punctum E sit citra rectam em, et punctum e citra rectam ME, productam si opus est, seu ut recta HE sit minor recta HP. et he minor recta hp. posita p cadere in EM, et P in em, productas si opus est.

51_3. DE INVENIENDA CURVA EX ELEMENTIS SUIS.
Ende 1673

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 250–251. 1 Bog. 2°. 1 1/2 S. und 1 Sp. Durch Kustoden gesicherte Reihenfolge: Bl. 250 r°, Bl. 251 v° unten (ab S. 821 Z. 9), Bl. 251 r° (ab S. 823 Z. 5). Überschrift u. Datum ergänzt. Auf dem übrigen Bogen N. 51_1 u. 51_2.
Cc 2, Nr. 607 tlw.

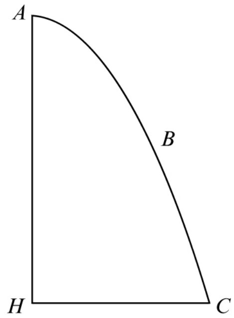
1673 fin.

De invenienda curva cuius data est elementorum progressio, deque aliis circa functiones.

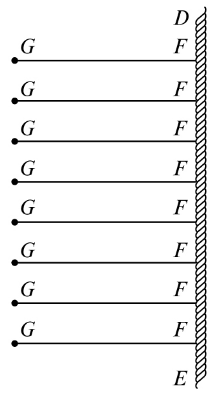
Problema geometriae practicae a me inventum est admirabile. Data specie cuiuslibet figurae planae, curvae aut solidae praeparare instrumentum aliquod sive baculum, sine ullo calculo, cuius ope portio quaedam eiusdem figurae positione data, ac in materia ipsa designata, mensurari, cum alia qualibet comparari, et portio ab ea in data ratione abscindi possit.

Modus hic est. Data specie figura datur utique et aequatio eius, datur ergo et aequatio curvae ei homogeneae, quare et modus describendi curvam ei homogeneam.

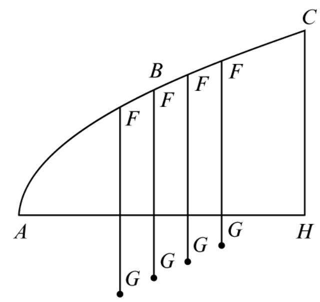
1 f. Vel ... quaesitum. *erg. L* 3 addita *erg. L* 6 mB = gh, *(1)* at *(2)* neque *(3)* | ut inquam, tunc *erg.* | punctum *L* 18 Data *(1)* qualibet curva *(2)* specie *L*



(*fig. 1.*)



(*fig. 2.*)



(*fig. 3.*)

Qua descripta, instrumento ad eam rem apto; ponatur curva homogenea descripta esse ABC.

Esto filum quoddam DE vel chorda praeparata, quae omnibus aeque figuris adhiberi potest, divisa in partes v. g. 1000 aequales, quantum scilicet ad praxin sufficere posse iudicatur. Ex punctis divisionis F. F. exeant totidem baculi rigidi, FG, sed in F chordae filo alligatus quilibet, ut scilicet sint circa eam flexiles.

Haec chorda curvae in tabula descriptae ABC superimponatur, ita ut ei congruat, et ne rursus exeat, collae cuiusdam genere fieri potest, item si curva intelligatur impressa tabulae planae ex materia factae, quae modo mollis modo dura esse potest, in fossae modum.

Tabula plana in eo situ iam locetur, ut planum sit horizonti perpendiculare, et recta AH quaelibet quae scilicet directrix est ad quam omnia curvae puncta referuntur sit horizonti parallela.

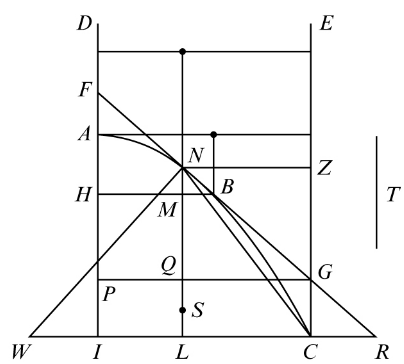
Manifestum est baculos omnes ob gravitatem naturalem fore horizonti perpendiculares et parallelos inter se, atque ita pro ordinatis haberi posse, quibus portiones altitudinis portionibus curvae aequalibus respondentes designentur.

Potest iam alius quidam baculus in usum scilicet figurae ad mensurandum propositae praeparandus applicari in AH, longitudinis quanta est figurae mensurandae altitudo,

2 homogenea *erg. L* 7 f. flexiles. *(1)* Sed omnes infixi sunto baculo alio rigido. Hi eos transverse secant, ut maneant semper *(2)* Haec 10 planae ... factae *erg. L* 12 plana *erg. L*

eidem scilicet axi vel directrici comparatae. Et posito baculum illum ex ipsa applicatione notis quibusdam sive maculis distingui; ita iam instrumentum erit praeparatum. Cuius ope eiusdem figurae abscindi poterunt, quando lubuerit, partes quotlibet maxima certitudine, quod alioquin aut difficillimo calculo, aut incertissima divinatione faciendum esset. Praeparatus semel baculus v. g. pro hyperbola, poterit servire omni hyperbolae simili, ope instrumenti proportionum; vel augentis, ac diminuentis, inprimis si id sit opticum. Sed et poterit alii v. g. hyperbolae licet dissimili adhiberi exiguo calculo adhibito, quo regula statim semel in universum praescribi potest, quomodo baculus pro una figurae eiusdem seu eandem aequationem habentis specie paratus, serviat omnibus.

Explicanda tantum ratio est, inveniendi figuram curvae, cuius elementorum progressio aequatione data est, seu modum illam describendi.



(*fig. 4.*)

Quod ut fiat inspice figuram 4. ubi curva ABC et duae quaelibet parallelae DA, EC. curvae occurrentes, et quaelibet curvae tangens producatur utrinque dum occurrat utrique, ut FBG tangens curvam in B.

Aio figuram, cuius ordinatae sint omnes FG, ad FAI, applicatae in locis H, ubi perpendiculariter ordinatae respondentes HB applicatae sint, esse curvae datae homogeneam, et syntomon, seu aequisecabilem.

At dato loco omnium FG invenire curvam ABC non paulo difficilior quaestio est, pertinetque ad magna illa problemata de invenienda curva ex datis functionum locis.

Imo erravi, FG applicanda non in H, sed in L. Nam ob triangula similia FPG, et NMB. erit PG in NB aequalis FG in MB. Et cum PG sit semper eadem, erit superficies cylindrica, cuius basis ABC, altitudo $PG = IC$ aequalis figurae omnium FG perpendiculariter applicatarum in L.

Ex his patet data curva ABC non esse difficile invenire figuram seu locum omnium FG. At contra data figura invenire curvam, patet problema esse satis difficile.

Esto e. g. FG ordinata parabolae, $\dfrac{y^2}{a}$. PG esto a. Patet MB posita $= 1$. fore $LC = QG$. applicatam trianguli, atque ideo notam, ac proinde cum sit $\dfrac{FG}{NB} = \dfrac{PG}{MB}$, fore

$$NB = \frac{MB \frown FG}{PG} = \frac{1 \frown \dfrac{y^2}{a}}{a} = \frac{y^2}{a^2}.$$

Eodem modo et NG facile habetur, quoniam $\dfrac{NG}{QG} = \dfrac{FG}{PG}$. vel

$$NG = \frac{FG \frown QG}{PG} = \frac{y^3}{a^2}.$$

posita $QG = LC$ abscissa, $= y$.

Habita iam NG et QG utique habetur NQ ob angulum NQG rectum. Deest tantum recta $QL = GC$.

Porro cum detur $NG = BG$. dabitur et FB, ac proinde et $HB = IL = a - y$. Imo habetur et FH.

Iam ut NL inveniamus fiat $LM = x$ ad $LR = l$, ut est $x + NM$ ad $l + MB = 1$. Ipsam NM, quippe notam vocabo γ, erit $\dfrac{x+\gamma}{l+1} = \dfrac{x}{l}$.

Ergo $\dfrac{x}{l+1} = \dfrac{x}{l} - \dfrac{\gamma}{l+1}$, seu $\dfrac{\gamma}{l+1} = \dfrac{x}{l} - \dfrac{x}{l+1}$, seu $x = \dfrac{\gamma}{l+1}$.

Caeterum cum reliqua problematis solutio difficillima sit, et ex analysi indivisibilium pendeat, eam hoc loco absolvere inutile est, cum alibi methodum exposuerim generalem, problemata eiusmodi de c u r v a r u m f u n c t i o n i b u s , absolvendi.

5 esto a. *(1)* NB appelletur y. et MB vocetur β. *(2)* Patet *L* 13 f. Imo . . . FH. *erg. L*

17 seu: genauer müsste es $x = \gamma l$ heißen. 20 de c u r v a r u m f u n c t i o n i b u s : Anspielung auf N. 40.

Unum tantum annotandum est[:] data descriptione curvae ABC dari semper quadraturam omnium NQ. aequantur enim triangulo CNL duplicato cum summa omnium CG vel LQ segmento $NBCN$ duplicato aequetur.

Posito FG esse applicatam hyperbolae $= \sqrt{4x^2+a^2}$ curva ABC erit parabolica. $NG = \dfrac{\sqrt{4y^2+a^2} \frown y}{a} = \dfrac{\sqrt{4y^3+a^2y^2}}{a}$. *(!)* addatur eius $\square = \dfrac{4y^3+a^2y^2}{a^2}$ ad y^2, fiet $\sqrt{\dfrac{4y^3}{a}+2y^2} = NQ$. Figura ergo cuius haec aequatio est, quadrari potest.

Eadem methodo credo investigari posse quadraturam aliorum paraboloeidum aequationis compositae ut $\sqrt{\dfrac{y^4}{a^2}+\dfrac{y^3}{a}} = x$. unde fit $\dfrac{y^4}{a^2}+\dfrac{y^3}{a} = x^2$. sive $x^2a^2 = y^4+y^3a$.

Fig. 4.

$IL = x$. $NQ = n$. $NL = y$. $QL = y-n$. eiusque dimidium $SL = SQ = \dfrac{y-n}{2}$, et $SN = n + \dfrac{y-n}{2} = \dfrac{n+y}{2} = SQ+QN$.

Iam facta $\dfrac{x\underset{\cdot\cdot}{y}+\beta\underset{\cdot\cdot}{y}}{\cancel{2}} - \dfrac{xy}{\cancel{2}} = \dfrac{y+n}{\cancel{2}}$ vel $\underset{\cdot\cdot}{y} \frown \dfrac{x+\beta}{1} = y \frown \dfrac{x+1}{\beta} + n$. Ergo $\underset{\cdot\cdot}{y} - y = \dfrac{n}{x+1}$.

Quod et ex figura patet quia $\dfrac{GQ = CL}{QN} = \dfrac{BM = 1 = \beta}{MN = \underset{\cdot\cdot}{y} - y}$. Ergo $\underset{\cdot\cdot}{y} - y = \dfrac{n = QN \frown 1}{CL = x}$.

Unde iam theorema memorabile ducimus: ipsam n per abscissam divisam dare differentias applicatarum, ac proinde figuram omnem cui homogeneae sunt n per abscissas x divisae, esse quadrabilem. Ergo hac methodo rursus tot habentur novae quadraturae quot sunt figurae datae, seu quot sunt variae NQ.

2 duplicato *erg. L* 12 facta *(1)* ny *(2)* $\frac{\mathrm{xy}}{2}$ *(3)* $\frac{\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{x}}\,\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{y}}}{2}$ − *(4)* $\frac{\mathrm{x}\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{y}}+\beta\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{y}}}{\cancel{2}}$ *L* 13 Quod ... $\frac{\mathrm{n = QN} \frown 1}{\mathrm{CL = x}}$. *erg. L*

1 annotandum est: von dem Dreieck CNL ist noch ein Segment $NBCN$ abzuziehen. 6 NQ: bei konsequenter Rechnung würde sich $\frac{2}{a}y^2$ ergeben. 12 Iam facta: $\underset{\cdot\cdot}{y}$ bezeichnet den Funktionswert an der Stelle $x+dx$.

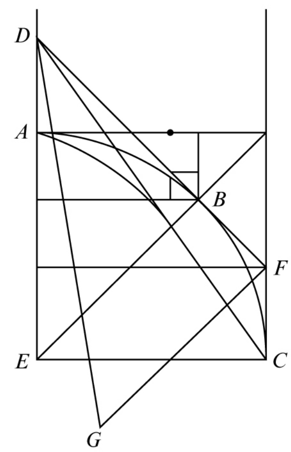
Quod si figura reperiri posset, cuius n, esset a. seu recta quaedam constans, haberetur quadratura hyperbolae, forent enim differentiae $\frac{a}{x}$. Quare ad veram hyperbolae quadraturam habendam solvendum est hoc problema:
figuram reperire eius naturae, ut si ex puncto aliquo C in axe CI sumto perpendicularis erigatur CE, et ex quolibet puncto in curva sumto ducatur tum NL ordinata ad axem ipsi CE parallela, tum tangens NG quae rectae CE occurrat in G, et inde abscindat rectam GC, cui si aequalis sumatur ordinatae portio QL, residua NQ sit semper aequalis uni eidemque rectae datae T.
Hoc problema certe videtur facilius, videtur saltem, quam si ita proponeretur, quadrare hyperbolam, aut figuram invenire, cuius applicatarum differentiae sint homogeneae applicatis spatii hyperbolici ad asymptoton, vel figuram invenire, in qua producta sit ad applicatam ut recta quaedam constans ad applicatam ad hyperbolae asymptoton.

Eadem methodo procedendum est in aliis figuris quae ad quadrandum proponuntur. Nimirum figura generalis eousque ductis lineis transformanda est, donec lineae quaedam ducantur, et in triangulum characteristicum simile ingrediuntur, aut si non lineae, rectangula, cubi, etc. ex quibus applicatae figurae propositae facile nascantur, ut hoc loco x. unde tantum figura quaeritur in qua NQ sit a.

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = y. \text{ Ergo } \frac{a^4}{a^2+x^2} = -y^2. \text{ Ergo } a^4 \underset{-}{=} a^2y^2 \underset{=}{+} x^2y^2. \text{ Ergo } \frac{a^4}{y^2} + a^2 = x^2.$$

1 cuius *(1)* segmenta *(2)* n, esset *(a)* hyperbola cubica: *(b)* a. seu *L* 4 naturae, *(1)* ut sumto in axe eius *(a)* utcunque producto RI, puncto C, ex quo *(b)* CI, puncto C, ubi curva axem attingit, *(2)* ut si ex CI *(3)* ut si ex puncto C in axe CI sumto, ubi curva CNA axem CI attingit *(4)* ut *L* 5 sumto *(1)* tangens ducatur quae *(2)* ducatur *L* 18 | $\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{\mathrm{a}^2}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}}$ *L* 18 $= \mathrm{x}^2$ | $= \mathrm{a}^4 + \mathrm{a}^2 \frown \mathrm{y}^2 + \frac{\mathrm{y}^4}{4} =$ *gestr.* | *L*

18 Die analytische Beziehung in Z. 18 ist mit einem Vorzeichenfehler behaftet; ihr geometrisches Pendant hingegen ist korrekt und gilt unabhängig von dem in der Figur gezeichneten Spezialfall allgemein. — Die Betrachtung wird nicht weiter fortgesetzt, dadurch bleiben einige Elemente der Figur unerklärt.



(*fig. 5.*)

Ergo si in figura 5. adiecta sit ABC quadrans circuli, et ad punctum B tangens BD. secans ED. et EC radius, vel EB, vel EA. iuncta DC erit x. et quia $DF = ED$. posito $FG =$ et parallela ad EB erit $DG = DC = x$.

Adde pag. versae finem ibique inspice fig. 4.

Ut iam problema illud de differentiis hyperbolae homogeneis solvere saltem tentemus, esto $NQ = a$. $CL = GQ = x$. $NL = y$. $GC = QL = y - a$. Et quia $\frac{GQ}{NQ}$ seu $\frac{x}{a} = \frac{LR = p}{NL = y}$. erit $p = \frac{yx}{a} = LR$. Ductaque ex curva perpendiculari NW [esto LW] $= e$. Quoniam $NL = y$. media proportionalis inter p et e, fiet $\frac{y^2}{p} = e = \frac{y^2}{\frac{yx}{a}} = \frac{ya}{x}$.

et $WN = w = \sqrt{NL^2 + LW^2} = \sqrt{e^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2a^2}{x^2} + y^2}$.

et $w^2 = \frac{y^2a^2}{x^2} + y^2$. vel $w^2x^2 = y^2a^2 + y^2x^2$, vel $w^2x^2 - y^2\,\frac{a^2}{x^2} = 0$.

in qua aequatione duae sunt verae radices aequales. Sed duae sunt quoque quantitates

1–4 fig. 5 *sowie* Ergo si ... = x. *erg.* L   8 esto LW *erg. Hrsg.*   12 verae *gestr. u. wieder erg.* L incognitae vel indeterminatae, nec altera in alterius locum substitui potest, cum aequatio illa, quae relationem ipsius x ad y exprimat, quaeratur.

$$\frac{\overset{ZN^2}{x^2}\ \ \overset{NM}{\dfrac{a}{\varrho}}}{2}=\frac{xa}{2}.$$ quae si applicata ad ipsam unitatem constructionis intelligantur, fiet $\dfrac{x^2}{2}\ \dfrac{a}{2}=\dfrac{ax^2}{4}$ momentum trianguli $CBNZC$ ex CZ. Momentum vero rectanguli $CLNZ$, fiet $\dfrac{x^2y}{2}$. posita ϱ maxima $= CL$. a qua si auferatur momentum figurae ipsius $CLNBC$ restabit utique momentum trilinei quod supra. Momentum autem figurae habebitur, ductis $NL = y$, in x, fiet $\overset{CL^2y}{x^2y}$ − summa omnium $\overset{\varrho \text{ variab. } y}{xy} = \overset{aCL^2}{\dfrac{ax^2}{4}}$.

At figuram talem invenire difficillimum haud dubie problema est, non minus quam propositum, quodque etiam pendet ex hyperbolae quadratura. Et memorabilia sunt eiusmodi problemata, quoniam iis similia nunquam hactenus proposita sunt.

Sed si y per suum valorem exprimamus, vereor ne aequatio fiat eiusdem cum eodem, tentandum tamen[:]

$y = \dfrac{y-a}{2}+$ differentia inter $\dfrac{xy}{2}$ et $\dfrac{x\underset{\cdot\cdot}{y}-\underset{\cdot\cdot}{y}}{2}$ per x seu $\dfrac{yx-ax+x^2y-x^2\underset{\cdot\cdot}{y}+x\underset{\cdot\cdot}{y}}{2}$. Ergo

$$\frac{a\,\underset{\smile}{x^2}}{4}-\underset{\smile}{x^2}\ \underset{\smile}{y}=\text{summa omnium }\underbrace{yx-ax+x^2y-x^2\underset{\cdot\cdot}{y}+x\underset{\cdot\cdot}{y}}_{2xy-ax}.$$

Atque ita habemus problemata quae in quadraturis fundantur, seu quae magnitudine quorundam spatiorum locum determinant, uti communia magnitudine rectarum.

Differentiae in abscissas ductae, conflant spatium ut $NZCBN$. Id ergo spatium hoc loco aequatur a in CL ducto, cum rectangulum QMB (quia QN et QM non differunt)

3 ZN^2 NM *erg. L* 6 posita ϱ maxima = CL. *erg. L* 8 CL^2 y; ϱ variab. y; a CL^2 *erg. L*

4 ϱ ist die laufende Variable mit der oberen Grenze x. 14 f. Ergo: bei konsequentem Rechnen müssten die Vorzeichen auf der linken Seite vertauscht werden. $\underset{\smile}{x}$ und $\underset{\smile}{y}$ bezeichnen hier die oberen Grenzen.

aequetur rectangulo ZNM. Ergo ipsa ZC in partes aequales infinitas divisa, natura figurae complementi haec est, ut area eius semper aequetur rectae datae $a = NQ = 1$, in applicatam ZN ductae.

$$\frac{a}{a} + b = ba, \text{ vel } a + ba = ba^2, \text{ vel } 1 + b = b,$$

$$\text{vel } 1 = ba - b, \text{ vel } b = \frac{1}{a-1}.$$

Ergo terminus huius seriei primus est (1). secundus $\left(\frac{1}{a-1}\right)$. tertius c, et erit $1 + \frac{1}{a-1} + c = ca$. $1 + \frac{1}{a-1} = ca - c$. Ergo

$$\frac{1 + \frac{1}{a-1}}{a-1} = c.$$

Fit ergo series applicatarum haec:

$$1 \quad \boxed{\frac{1}{a}} \quad \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} \quad \boxed{\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3}}$$

Nam pro $a-1$ puto substitui tuto posse a simpliciter, repetitis semper prioribus omnibus et per a divisis.

Imo male.

1 ZNM. *(1)* applicatae ergo complementi huius NZCBN, ipsi ZC parallelae, seu complementa ipsarum NL ad basin, sunt: differentiae inter duo ax proxima, ea autem *(a)* est ax + a − ax *(b)* est a si sci *(2)* Ergo *L* 2 complementi *erg. L*

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS

Verfasser bzw. Mitverfasser von hier abgedruckten Stücken werden mit der betreffenden Stücknummer genannt, ebenso Personen, auf die sich ein ganzes Stück bezieht. Diese Nummerneintragungen sind zur Unterscheidung von den Seitenangaben mit einem Stern versehen. Im übrigen wird nach Seiten zitiert. Bei Autoren ist zusätzlich das Schriftenverzeichnis heranzuziehen. Variierende Namensformen werden nur genannt, wenn sie stärker voneinander abweichen. Kursivdruck weist auf den Petitteil hin.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Das Schriftenverzeichnis (SV.) enthält die im Text und in den Apparaten angeführte Literatur; es ist zweigeteilt. Autoren, die Leibniz grundsätzlich zugänglich waren, sind einschließlich ihrer modernen Ausgaben im ersten Teil verzeichnet. Neuere Literatur erscheint im zweiten Teil. Unter Leibniz wird neben seinen eigenen Schriften zusätzlich die für diesen Band relevante Leibniz-Korrespondenz erfasst. Noch nicht edierte Leibniz-Stücke sind im Handschriftenverzeichnis Teil 3 zu finden. — Jeder Autor und Sachtitel erhält eine Leitnummer, die Reihenfolge der Einzelwerke ist chronologisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern ausgezeichnet sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einen bestimmten Titel zuzuordnen ist. Werke mit eigenhändigen Eintragungen von Leibniz sind mit dem Zusatz [Marg.] versehen. Für die Erwähnung von Autorennamen ist auch das Personenverzeichnis mitheranzuziehen. Kursiv gedruckte Seitenangaben weisen auf den Petitteil hin.

SCHRIFTEN DER LEIBNIZZEIT

1. *Acta Eruditorum*. Leipzig 1682 ff.: Jan. 1705: S. *5*.
2. Anderson, R.
   1. *Stereometrical propositions*. London 1668: S. *815*.
   Rez.: *Philosophical Transactions* Bd III Nr. 39 vom 21. Sept./1. Okt. 1668 S. 785 bis 787: S. 815.
   2. *Gaging promoted*. An appendix to stereometrical propositions. London 1669: S. *815*.
   Rez.: *Philosophical Transactions* Bd IV Nr. 47 vom 10./20. Mai 1669, S. 960: S. 815.
3. Angeli, St. degli, *De infinitorum spiralium spatiorum mensura, opusculum geometricum*. Venedig 1660: S. *574*.
4. Apollonius v. Perga, *Conica*: S. 50. 726.
5. Archimedes
   1. *De lineis spiralibus*: S. *217*. *221*.
   2. *Dimensio circuli*: S. *189*. *334*.
   3. *Quadratura parabolae*: S. *336*.
6. Aynscom, Fr.-X., *Expositio ac deductio geometrica quadraturarum circuli R. P. Gregorii a S. Vincentio*. Antwerpen 1656: S. 549. *550*.

– Bartholinus, E. [Hrsg.] s. SV. N. 16,2.

7. Brouncker, W., *The squaring of the hyperbola, by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration*. In: *Philosophical Transactions*, Bd III Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649: S. *596*.
8. Cardinael, S. H., *Hondert geometrische questien met hare solutien*. Amsterdam [1612]: S. 229.
9. Cavalieri, B.
   1. *Directorium generale uranometricum*. Bologna 1632: S. 229.
   2. *Exercitationes geometricae sex*. Bologna 1647: S. *60*.

– Clerselier, Cl. de [Hrsg.] s. SV. N. 11,2.

10. Debeaune, Fl., *De aequationum natura, constitutione et limitibus, opuscula duo*. Hrsg. E. Bartholinus. In: SV. N. 16,2 Tl II S. 49–152: S. *733*.

– Deprez, G. [Hrsg.] s. SV. N. 33,9.

11. Descartes, R.
   1. *La géometrie*. Leiden 1637 u. ö. [auch in *DO* VI S. 367–485]; lat. Fassung u. d. T. *Geometria* hrsg. von Fr. v. Schooten in SV. N. 16,1 S. 1–118; 2. Ausg. in SV. N. 16,2 Tl I S. 1–106

[Marg.]: S. *307*. 415. 585. 595. 701. *706*. *711*. *712*. 714. 722.

2. *Lettres*. [Hrsg. Cl. de Clerselier]. 3 Bde. Paris 1657–67; lat. Fassung u. d. T. *Epistolae*. Amsterdam 1668–82: S. *595*.

– DETTONVILLE, A. [Pseud.] s. Pascal.

12. EUKLID, *Elemente*: S. 88. 191. 597. 619.

13. FABRI, H.,

1. *Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide, auctore Antimo Farbio* [Honoré Fabri]. Rom 1659: S. 16. 103. *183*. *222*.

2. *Synopsis optica*. Lyon 1667 [Marg.]: S. 440.

3. *Synopsis geometrica cui accessere tria opuscula, nimirum; De linea sinuum et cycloide; De maximis et minimis, centuria; et Synopsis trigonometriae planae*. Lyon 1669 [Marg.]: N. 1*. S. *60 f*. 89. 103. *109*. *167*. *170*. *183*. *222*. *291*. *348*. 570. 726.

14. FAILLE, J.-Ch. de la, *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis*. Antwerpen 1632: S. 52.

15. GALILEI, G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Leiden 1638; Nachdr.: Brüssel 1966; [auch in *GO* VIII S. 39–318 u. *GO* I S. 187 bis 208]: S. *105*.

16. *G e o m e t r i a*

1. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten. Leiden 1649. [Darin: DESCARTES, R., SV. N. 11,1; DEBEAUNE, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S. 119–161; SCHOOTEN, Fr. v., SV. N. 40,1; Ders., *Additamentum*. S. 295 bis 336.]

2. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten ... Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus ... exornata. 2 Tle. Amsterdam 1659–61 [Marg.]: S. 532. *584*. *585*. [In Tl I: DESCARTES, R., SV. N. 11,1; DEBEAUNE, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S. 107–142; SCHOOTEN, Fr. v., SV. N. 40,1; Ders., *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*. 2. Aufl., S. 345–368; HUDDE, J., SV. N. 21; HEURAET, H. v., SV. N. 19. In Tl II: SCHOOTEN, Fr. v., *Principia matheseos universalis, seu introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes*. Hrsg. E. Bartholinus. 2. Aufl., S. 1–48; Ders., SV. N. 40,2; DEBEAUNE, Fl., SV. N. 10; WITT, J. de, SV. N. 46.]

– Gregorius, a S. Vincentio s. SAINT-VINCENT.

17. GREGORY, J.

1. *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Padua 1667; Nachdr. ebd. 1668 [Marg.]: S. *260*.

Rez.: *Philosophical Transactions* Bd III, Nr. 33 vom 16./26. März 1667/68, S. 641 bis 644: S. *229*.

2. *Geometriae pars universalis*. Padua 1668 [Marg.]: S. *325*.

Rez.: *Philosophical Transactions* Bd III, Nr. 35 vom 18./28. Mai 1668, S. 685–688: S. *325*.

3. *Exercitationes geometricae*. London 1668 [Marg.]: S. *14*. *48*. 92. *259*. *260*. *338*. 340. *402*. 417.

18. GULDIN, P., [Centrobaryca.] *De centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae* [libri IV]. 2 Bde. Wien 1635–1641: S. *106*. *160*. *272*. *333*.

19. HEURAET, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*. In SV. N. 16,2 Tl I S. 517–520 [Marg.]: S. *337*. *795*.

20. HOBBES, T., *Opera philosophica*. Amsterdam 1668: S. *58*.

21. HUDDE, J., *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit*. In SV. N. 16,2 Tl I S. 401–516 [Marg.]: S. *585*. *706*.

22. Huygens, Chr.
1. *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus subiuncta est ἐξέτασις cyclometriae cl. viri Gregorii a S. Vincentio*. Leiden 1651; [auch in *HO* XI S. 281–337]: S. *340*. *673*.
2. *De circuli magnitudine inventa*. Leiden 1654; [auch in *HO* XII S. 113–181]: S. 14.
3. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris 1673 [Marg.]; Nachdr. London 1966; [auch in *HO* XVIII S. 69–365 u. XVI S. 315–318]: N. 2*. 9_1^*. 11*. S. *73*. *75*. 77. *107*. *108*. 145. *158*. *209*. *211*. 213. 215. 220. 223. *337*. *338*. *436*. 509. *515*. *519*. *530*. *539*. *595*. 615. *623*. *672*. *718*.

23. Kinner, G. A. von Löwenthurn, *Elucidatio geometrica problematis Austriaci*. Prag 1653: S. *549*.

24. Leibniz, G. W.
Schriften:
1. *Vorarbeiten zur Theoria motus abstracti*. Erste Fassung. Frühjahr 1670 – Winter 1670/71(?). Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 2 N. 38_5 S. 176–186]: S. *57*.
2. *Aus und zu Galileis Discorsi*. Herbst 1672 bis Winter 1672/73. Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 3 N. 11 S. 163–168]: S. *105*.
3. *Trigonometria*. Ende 1672 – Anfang 1673(?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 2 S. 4]: S. *409*.
4. *Data basi, altitudine et summa laterum invenire triangulum*. Ende 1672 – Anfang 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 4 S. 31–36]: S. *19*.
5. *Mathematica*. Ende 1672 – Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 106 S. 653–674]: S. *14*. *19*. *89*.
6. *De figuris similibus*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 6_1 S. 60–70]: S. *90*.
7. *De sectore circuli*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 6_4 S. 79–83]: S. *83*.
8. *De progressionibus intervallorum tangentium a vertice*. April – Mai 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 17 S. 202–227]: S. *89*. *421*.
9. *De geometria seu potius algebra mechanica*. Frühjahr – Sommer 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 8 S. 104–108]: S. *19*.
10. *Characteristica geometrica. De lineis et angulis*. Frühjahr – Sommer 1673 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 9 S. 104–119]: S. *5*.
11. *De arithmetica infinitorum perficienda*. Frühjahr – Sommer 1673 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 3 N. 41 S. 407–409]: S. *678*.
12. *De locis intersectionum opa serierum*. Spätes Frühjahr–Sommer 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 20 S. 249 f.]: S. *719*.
13. *De methodi quadraturarum usu in seriebus*. Aug. – Sept. 1673. Ms. [Gedr: *LSB* VII, 3 N. 21 S. 251–254]: S. *814*.
14. *Progressionis harmonicae differentiae*, Herbst 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 22 S. 255–263]: S. *762*.
15. *Progressio figurae segmentorum circuli aut ei sygnotae*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 23 S. 264–270]: S. *720*. *800*.
16. *De serie differentiae inter segmentum quadrantis et eius fulcrum*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 24 S. 271–281]: S. *773*.
17. *De appropinquatione circuli per seriem I*. Ende 1673 – Mitte 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 26 S. 300–314]: S. *770*.
18. *De serierum summis et de quadraturis pars nona*. Oktober 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 38_{11} S. 475–483]: S. *770*.
19. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cuius corollarium est trigonometria sine tabulis*. Ende 1675 – Herbst 1676. Ms. Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993 [= Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Dritte Folge N. 43]: S. *574*.
20. *Isaaci Newtoni tractatus duo, de speciebus et magnitudine figurarum curvilinearum*. In: *Acta Eruditorum*, Jan. 1705. S. 30–36: S. *3*.

B r i e f e :
21. Leibniz an Fogel, 24. Jan. 1671. [Gedr.: *LSB* II, 1 N. 38 S. 77–78 (1. Aufl.), S. 126–128 (2. Aufl.)]: S. *57*.
22. Oldenburg an Leibniz, Sendung vom 20. April 1673; Auszug von Leibniz, Frühjahr 1675. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 13 S. 49 bis 79; ohne Auszug mit engl. Übers. in *OC* IX S. 549–570]: S. *267*. *493*. *814*.
23. Leibniz für Huygens (?), Sommer 1674. [Gedr.: *LSB* III, 1 N. 29 S. 114–117]: S. *346*. *594*. *672*. *718*.
24. Leibniz an Oldenburg, 15. Juli 1674. [Gedr.: u. a. in: *LSB* III, 1 N. 30 S. 118–121, mit engl. Übers. in: *OC* XI S. 42–47]: S. *346*. *672*.
25. Leibniz für Huygens, Okt. 1674. [Gedr.: *LSB* III, 1 N. 39 S. 141–169]: S. *592*.
26. Leibniz an Tschirnhaus, Ende Dez. 1679. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 2 N. 372 S. 921–941]: S. *711*.
27. Leibniz an Jacob Bernoulli, April 1703. [Gedr.: *LMG* III S. 66–73]: S. *711*.
28. Leibniz an Conti, 9. April 1716. [Gedr. u. a. in: *LBG* S. 274–282]: S. *725*.

25. Leotaud, V., *Examen circuli quadraturae*. Lyon 1654: S. *229*.

26. Magini, G. A., *Primum mobile duodecim libris contentum ... ac praeterea magnus trigonometricus Canon ... ac magna primi mobilis Tabula*. Bologna 1609: S. *176*. *229*.

27. Mercator, N., *Logarithmotechnia ... Huic etiam iungitur M. A. Riccii Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. London 1668 [Marg.]; Nachdr.: Hildesheim 1975: N. 3_1^*. S. *595*.
Rez. s. SV. N. 45,3.

28. Mersenne, M., *Novarum observationum physico-mathematicarum tomus III.* Paris 1647: S. *51*. *549*.

29. Meynier, H. de, *Les nouvelles inventions de fortifier les places*. Paris 1626: S. *548*.

30. Monconys, B., *Journal des voyages*. Hrsg. G. de Monconys sieur de Liergues. 3 Tle. Lyon 1665–1666: S. *167*.

– Monconys, G. de [Hrsg.] s. SV. N. 30.

31. Mydorge, Cl., *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis ... libri primus et secundus*. Paris 1631. — *Libri quatuor priores*. ebd. 1639 u. ö.: S. *519*.

32. Nonancourt, Fr. de, *Euclides logisticus*. Löwen 1652 [Marg.]: S. *549*.

33. Pascal, Bl.
1. [Anonym] *Histoire de la roulette*. [Paris 1658]; lat. Fassung u. d. T. *Historia trochoidis*. [Paris] 1658; [auch in *PO* VIII S. 181–223]: S. 137.
2. *Lettres de A. Dettonville* [Bl. Pascal] *contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*. Paris 1658–59; Nachdr. London 1966; [auch in *PO* Bde VIII-IX]: S. *366*. *597*.
3. *Lettre à Monsieur de Carcavy*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* VIII S. 325–384]: N. 10_1^*. S. *96*. *145*. *146*. *156*. *209*. *287*. *322*.
4. *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* IX S. 3–45]: N. 19*. S. *96*. *155*. 210. 211. *334*.
5. *Propriétez des sommes simples, triangulaires, et pyramidales*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* IX S. 46–59]: S. *187*.
6. *Traité des sinus du quart de cercle. Traité des arcs de cercle*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* IX S. 60–104]: N. 10_2^*. 12*. S. 112. *115*. *210*. *222*. 397. *583*.
7. *Traité général, de la roulette*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* IX S. 116–133]: S. *147*. 397.
8. *Lettre à Monsieur Hugguens de Zulichem*. In SV. Nr. 33,2; [auch in *PO* IX S. 187–201]: S. 534.
9. *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Hrsg. G. Deprez. Paris 1665 [Marg.]; [auch in *PO* III S. 433–593, 341–367, 311 bis 339]: S. 632.

34. Pell, J., *Controversiae de vera circuli mensura anno 1644 exortae inter Christianum*

Severini, Longomontanum ... et Ioannem Pellium ... pars prima [mehr nicht ersch.]. Amsterdam 1647: S. *394*.

35. *Philosophical Transactions*. London 1665 ff.:
— 16./26. März 1667/1668: S. *229.*
— 23. April/3. Mai 1668: S. *596.*
— 18./28. Mai 1668: S. *325.*
— 17./27. August 1668: S. 271. 304. *337.*
— 21. Sept./1. Okt. 1668: S. 815.
— 11./21. Jan. 1668/1669: S. *279.*
— 25. März/4. April 1669: S. *91*. 271.
— 10./20. Mai 1669: S. 815.
— 25. März/4. April 1672: S. *661.*
— 14./24. Oktober 1672: S. *278. 337.*
— 20./30. Januar 1672/1673: S. *70. 706.*
— 23. Juni/3. Juli 1673: S. *706.*

36. Proclus, D., *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*: S. 607.

37. Ricci, M., *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. Rom 1666. Nachdr. zus. mit N. Mercator, *Logarithmotechnia*. London 1668 [Marg.] u. Hildesheim 1975: N. 3_2^*.

38. Saint-Vincent, Gr. de, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Antwerpen 1647 [Marg.]: S. *162. 229. 325. 329. 337. 548–550. 702.*

39. Sarasa, A. A. de, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*. Antwerpen 1649 [Marg.]: S. *51. 548. 549. 581. 622.*

40. Schooten, Fr. v.
1. *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*. In SV. N. 16,1 S. 162–294. 2. Aufl. in SV. N. 16,2 Tl I S. 143–344 [Marg.]: S. *307.* 415. 504. *509.* 532. 585. *706. 711. 726.* 774.
2. *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. Hrsg. P. v. Schooten. In SV. N. 16,2 Tl II S. 341–420: S. *394.*
3. [Hrsg.] s. SV. N. 16,1; 16,2; 46.

– Schooten, P. v. [Hrsg.] s. SV. N. 40,2.

41. Sluse, R. Fr. W. de
1. *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas ... exhibitae*. Lüttich 1659. 2. Aufl. ebd. 1668 [Marg.]: S. 91. 271.
Rez.: *Philosophical Transactions* Bd IV Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 903 bis 909: S. *91.* 271.
2. *An extract of a letter from the excellent Renatus Franciscus Slusius ... to the publisher ... concerning his new and easie method of drawing tangents to all geometrical curves*. In: *Philosophical Transactions* Bd VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1672/1673 S. 5143–5147; Nachtrag *a. a. O.* Bd VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059: N. 6*. S. *706.*

42. Statius, P. Papinius, *Thebais*: S. *203.*

– Sybrandt, Hansz. s. Cardinael.

43. Tacquet, A., *Opera mathematica*. Antwerpen 1669 u. 1707: S. *279.*
Rez.: *Philosophical Transactions* Bd III N. 43 vom 11./21. Jan. 1668/69, S. 869–876: S. *279.*

44. Torricelli, Ev., *De dimensione parabolae*. In: *Opera geometrica*. Florenz 1644. Tl II S. 17–84; [auch in *TO* I, 1 S. 102–162]: S. *336.* 337.

45. Wallis, J.
1. *Arithmetica infinitorum*. Oxford 1656. In: *Operum mathematicorum pars altera*; [auch in *WO* I S. 355–478]: S. *550. 574. 632.*
2. *Tractatus duo, prior de cycloide ... posterior ... de cissoide*. Oxford 1659 [Marg.]; [auch in *WO* I S. 489–569]: S. *360.*
3. *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris: discoursed of in a letter ... to the Lord Viscount Brouncker ...* In: *Philosophical Transactions* Bd 3 N. 38 vom 17./27. Aug. 1668, S. 753–759: S. *337.*
4. *Mechanica: sive de motu, tractatus geometricus*. 3 Tle. London 1670–1671; [auch in *WO* I S. 570–1063]: S. *61. 360.* 574. *575. 621. 632. 736.*
5. *Epitome binae methodi tangentium*. In: *Philosophical Transactions* Bd VII N. 81 vom 25. März/4. April 1672, S. 4010–4016: S. *360.*

47. Child, J. M., *The early mathematical manuscripts of Leibniz*. Chicago u. London 1920: S. *114.*

48. Fellmann, E. A., *Die mathematischen Werke von Honoratus Fabry*. In: *Physis* I (1959) S. 5 bis 54: S. *3. 170. 570.*

49. Gerhardt, C. I., *Leibniz und Pascal*. In: *Sitzungsberichte* der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1891, S. 1053–1068: S. *114.*

50. Hofmann, J. E., *Leibniz in Paris. 1672–1676. His growth to mathematical maturity*. Cambridge 1974: S. *70. 377. 632. 711.*

51. Knobloch, E., *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672–1676)*. In: *Leibniz à Paris (1672–1676)*. Symposion à Chantilly du 14 au 18 Nov. 1976. Bd I S. 3–43 = *Studia Leibnitiana Supplementa* Bd XVII. Wiesbaden 1978; russ. u. d. T. *Rukopisi Lejbnica 1672–1676 gg.* In: *Istoriko-matematičeskie Issledovanija* 24 (1979) S. 258 bis 309: S. *685.*

52. Mahnke, D., *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*. In: *Abhandlungen* der Preuß. Akademie der Wissenschaften. Phys.-math. Klasse, Jahrgang 1925, Nr. 1. Berlin 1926: S. *115. 358. 495. 620. 656.*

53. Pasini, E., *La nozione di infinitesimo in Leibniz: tra matematica e metafisica*. Diss. Turin 1985/1986: S. *256.*

SACHVERZEICHNIS

Die Grundsprache des vorliegenden Sachverzeichnisses ist deutsch. Leibniz' termini technici erscheinen in Kursivschrift. Zu Leibniz' Terminologie s. a. die Einleitung, insbesondere S. XVIII–XXII. Deren Reichhaltigkeit und Ausdifferenzierung spielt im vorliegenden Band eine entscheidende Rolle, was bei der Aufnahme von Sachwörtern zu berücksichtigen war. Die Sachworte sind alphabetisch geordnet. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur besseren Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern versehen sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einem bestimmten Sachwort zuzuordnen ist. Kursiv gedruckte Seitenangaben beziehen sich auf Herausgebertext.

Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 4

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS

FUNDSTELLEN

Verzeichnet sind hier die im vorliegenden Band edierten Hand- und Druckschriften, geordnet nach Fundorten und Signaturen.

Hannover, *Niedersächsische Landesbibliothek*

LH 35	II 1	Bl. 89–90	N. 42_1
		Bl. 93–94	N. 49
		Bl. 95–96	N. 39
		Bl. 135–136	N. 38
		Bl. 138–139	N. 39
		Bl. 140	N. 39
		Bl. 141–143	N. 23
		Bl. 194	N. 33
		Bl. 201–204	N. 9
		Bl. 229–232	N. 26
		Bl. 239	N. 37
		Bl. 242–245	N. 27
		Bl. 250–251	N. 39
		Bl. 252–253	N. 16_1
		Bl. 254–255	N. 31
			N. 32
		Bl. 256	N. 36
		Bl. 261–262	N. 17
		Bl. 263–264	N. 34
		Bl. 265–266	N. 35
		Bl. 267–268	N. 20
			N. 21
		Bl. 284	N. 43
			N. 44
		Bl. 285–290	N. 12
			N. 13
		Bl. 293–296	N. 15
		Bl. 297–298	N. 16_2
		Bl. 299–300	N. 16_3
		Bl. 301–304	N. 16_4
		Bl. 312–313	N. 17
		Bl. 314	N. 14
LH 35	II 1	Bl. 321–322	N. 47
		Bl. 323–324	N. 22
	V 6	Bl. 12–13	N. 45
	VIII 2	Bl. 5	N. 18
	VIII 3	Bl. 1–8	N. 40
	VIII 30	Bl. 107–108	N. 50
		Bl. 150	N. 6
	XII 1	Bl. 13	N. 4
		Bl. 38	N. 19
		Bl. 180–181	N. 41
		Bl. 266–267	N. 30
	XII 2	Bl. 69	N. 24
		Bl. 113	N. 8
		Bl. 125–126	N. 7
		Bl. 129–130	N. 5
		Bl. 159–160	N. 48
		Bl. 161–162	N. 42_2
	XIII 1	Bl. 353–354	N. 29
		Bl. 359–360	N. 28
		Bl. 379–380	N. 25
	XIII 3	Bl. 243	N. 46
		Bl. 250–251	N. 28_1
			N. 28_2
			N. 28_3
	XIV 2	Bl. 70–71	N. 11
	XV 1	Bl. 18–23	N. 10
Leibn. Marg.	7,1		N. 1
Leibn. Marg.	70		N. 2
Ms IV 377			N. 3

Cc-2-KONKORDANZ

Verzeichnet sind hier die Nummern der im *Catalogue critique* 2 erfassten Stücke mit Angabe der ihnen entsprechenden Stücke des vorliegenden Bandes. Die ersten vier hier aufgeführten Stücke werden im *Catalogue critique* 2 nicht erfasst. Steht hinter einer Cc-2-Nr.: tlw., so heißt dies, dass mindestens ein Teil des bezeichneten Stückes in diesem Band nicht abgedruckt ist.

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
—	1	549	29	608	44	639	5
—	3	550 A, B	20	609	7	641	30
—	25	551	21	610	7	642	19
—	46	552	36	611	7	692	39
500	8	555 B	39	612	34	693	37
542A, B	2	555 C, D	23	613	35	695	22
544	10	559	49	614	44	696	27
545A	14	560	47	616	6	697	26
545B	17	561 tlw.	42_2	617	12	817	4
546	16_1		48	618	13	883	31
547	15	564	9	619	11		32
	16_2	575	40	620	33	905	18
	16_3	607	51_1	625	41	1112	50
	16_4		51_2	635 A, B	39	1233 A tlw.	42_1
	17		51_3	636	24	1237	45
548	28	608	43	638	38	1238	45

Die Entsprechung von Stücknummer und Cc-2-Nummer ist in der Überlieferung des jeweiligen Stückes vermerkt.

ERWÄHNTE LEIBNIZ-HANDSCHRIFTEN

In dem vorliegenden Band wird lediglich auf zwei nicht edierte, inhaltlich zusammengehörige Handschriften Bezug genommen. Es sind dies (nach Cc2-Nummern und Handschriftensignaturen geordnet):

Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.
563	35 II 1	Bl. 240–241	*725. 762.*
1233 A	35 II 1	Bl. 87–92	*725. 762. 763. 796.*

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

L	Leibniz, eigenhändig
LiH	Leibniz' eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
[ ]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen und Eingriffe des Herausgebers (ursprüngliche Form im Variantenapparat). Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
⟨ ⟩	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
⟨–⟩	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
Kursivierung	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
S p e r r u n g	Hervorhebungen durch Leibniz
	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang
	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a. a. O.	am angegebenen Ort
Aufl.	Auflage
Ausg.	Ausgabe
Bd(e)	Band (Bände)
Bl.	Blatt
Bog.	Bogen
bzw.	beziehungsweise
ca	circa
CJR	Corpus Juris Reconcinnatum (vgl. *LSB* VI, 2 S. XXI f.)
Ders.	Derselbe
ebd.	ebenda
erg.	ergänzt
Erl.	Erläuterung
ersch.	erschienen
gedr.	gedruckt
gestr.	gestrichen
ggf.	gegebenenfalls
Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)
Hs.	Handschrift
im Allg.	im Allgemeinen
Jh.	Jahrhundert
LH	HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibniz-Handschriften
Marg.	Marginalie(n)

Ms.	Manuskript
N., Nr.	Nummer
Nachdr.	Nachdruck
NB.	nota bene
r^{o}	recto
S.	Seite
s.	siehe
s. a.	siehe auch
s. o.	siehe oben
Sp.	Spalte
s. u.	siehe unten
SV.	Schriftenverzeichnis
s.v.a.	siehe vor allem
Tl(e)	Teil(e)
tlw.	teilweise
u. a.	und andere, unter anderem
u. d. T.	unter dem Titel
Übers.	Übersetzung
u. ö.	und öfter
usf.	und so fort
v.	von, vor
vgl.	vergleiche
v^{o}	verso
Z.	Zeile
zus.	zusammen
🝪	destilletur, distilletur

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

Cc 2 *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676).* Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914–1924.

DGS *Geometria, a Renato Descartes anno 1637 gallice edita ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten.* 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659–1661 (= SV. N. 16,2).

DO DESCARTES, R., *Oeuvres.* Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879–1910; 2. Aufl. ebd. 1964–1972.

GO GALILEI, G., *Opere*. Edizione Nazionale. 20 Bde. Florenz 1890–1909; Nachdr. ebd. 1929–1939 u. ö.

HO HUYGENS, Chr., *Oeuvres complètes*. Hrsg. D. Bierens de Haan, J. Bosscha u. a. 22 Bde. Den Haag 1888–1950.

LBG *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin 1899.

LMG *Leibnizens mathematische Schriften.* Hrsg. C. I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin, Halle 1849–1863; Nachdr.: Hildesheim 1962 u. 1971.

LSB LEIBNIZ, G. W., *Sämtliche Schriften und Briefe*. Hrsg. von der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Berlin — Im Erscheinen.

MCW MERSENNE, M., *Correspondance*. Hrsg. C. de Waard u. a. 16 Bde. Paris 1931–1986.

OC OLDENBURG, H., *The Correspondence.* Hrsg. A. R. Hall u. M. Boas Hall. 13 Bde. Madison [usw.] 1965–1986.

PO PASCAL, Bl., *Œuvres.* Hrsg. P. Boutroux u. a. 14 Bde. Paris 1904–1914; Nachdr.: Vaduz 1965.

TO TORRICELLI, E., *Opere*. Hrsg. G. Loria u. G. Vassura. 4 Bde (5 Tle). Faenza 1919–1944.

WO WALLIS, J., *Opera mathematica*. 3 Bde. Oxford 1693–1699 [Marg.]; Nachdr.: Hildesheim 1972.

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im Folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im einzelnen erklärt sind. Bei einigen Zeichen sind zusätzlich die Autoren angegeben, von denen Leibniz sie wahrscheinlich kennengelernt hat. Für weitere Einzelheiten vgl. die Einleitung S. XXIX–XXXI.
Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht von Leibniz' mathematischen Bezeichnungsweisen gibt F. Cajori, *Leibniz the master builder of mathematical notation* (in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429) bzw. F. Cajori, *A history of mathematical notation*, Bd. 2 S. 189–196 (La Salle, Ill. 1929 u. ö.).

$\frown$	Multiplikation
$\times$	Überkreuzmultiplikation
$\smile$	Division
$\mid$	Kürzung eines Bruches
$\overset{2}{\ulcorner}$	Kürzung durch 2
$\not{f}$	facit
$a \smile b$	Summe (Kolumnen)
$\overset{\frown}{a}$	Differenz (Kolumnen)
$\square$	Quadrat
x^{β}	allgemeine (reelle) Potenz
$\sqrt{}$, Rq	Quadratwurzel
Rq, Rqq ...	iterierte Quadratwurzel
$\sqrt{③}$, $\sqrt{c}$	Kubikwurzel
$\sqrt{n}$, $\sqrt{ⓝ}$	n-te Wurzel
$\sqcap$	gleich
aequ.	gleich
∞	gleich
$\sqcap$	größer als
$\sqcap$	kleiner als
$a : b :: c : d$	geometrische Proportion

$a - c \infty b - d$	arithmetische Proportion
$\bigtriangledown MFB ::$	
$\bigtriangledown^{lo} MAL$	ähnlich
$\circ$	Platzhalter Vorzeichen
$\bullet$	Platzhalter Term
$\mathbf{\|}$	Zusammenfassung
$x^{\cdot\cdot}$	laufende Variable
x	laufende Variable mit oberer Grenze x
$\underset{\smile}{x}$	obere Grenze
$\overset{a}{23}$	Substitution
$\underset{\cdot\cdot}{y}$	Funktionswert an der Stelle $x + dx$
$\underset{\cdot}{D}\underset{\cdot}{X}$	alle DX
$\mathbb{X}$	alle x
a	alle a
Ozanam:	
∞	gleich
$a, b :: c, d$	Proportion